Решение задач

Задача. На соревнованиях по лёгкой атлетике Андрей, Боря, Серёжа и Володя заняли первые четыре места. Но когда девочки стали вспоминать, как эти места распределились между победителями, то мнения разошлись:

Даша: Андрей был первым, а Володя – вторым.

Галя: Андрей был вторым, а Борис – третьим.

Лена: Боря был четвёртым, а Серёжа – вторым.

Ася, которая была судьёй на этих соревнованиях и хорошо помнила как распределились места сказала, что каждая из девочек сделала одно правильное и одно неправильное заявление.

Кто из мальчиков и какое место занял?

Ответ*:* Андрей занял первое место, Серёжа – второе, Боря – третье, Володя – четвёртое.

Пример 1. Построить таблицу значений для следующей булевой функции: $f(x,y,z) = ((x \vee \bar{y}) \to z)((x \mid y) \leftrightarrow \bar{z})$.

Решение:

x	y	z	$\bar{y}$	$x \vee \bar{y}$	$(x \vee \bar{y}) \to z$	$x \mid y$	$\bar{z}$	$(x \mid y) \leftrightarrow \bar{z}$	$f(x,y,z)$
0	0	0	1	1	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0	0	1	1

Пример 2. Показать, что $x \vee y \equiv (x \mid x) \mid (y \mid y)$.

Решение.

$$x \vee y \equiv \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}.$$

Штрих Шеффера

$$\bar{x} \equiv \bar{x} \vee \bar{x} \equiv x \mid x;$$

$$\bar{y} \equiv \bar{y} \vee \bar{y} \equiv y \mid y.$$

Тогда $x \vee y \equiv \bar{\bar{x}} \cdot \bar{y} \equiv \overline{(x \mid x)(y \mid y)}$.

$$x \vee y \equiv (x \mid x) \mid (y \mid y).$$

Пример 3. Выяснить, эквивалентны ли формулы $x \to (y \oplus z)$ и $(x \to y) \oplus (x \to z)$.

Решение. Для каждой формулы составим таблицу значений.

$x \to (y \oplus z)$:

x	y	z	$y \oplus z$	$x \to (y \oplus z)$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

$(x \to y) \oplus (x \to z)$:

x	y	z	$x \to y$	$x \to z$	$(x \to y) \oplus (x \to z)$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0

Так как таблицы значений не совпадают, то формулы не являются эквивалентными

Пример 4. Привести к СДНФ $A \equiv (x \vee \overline{z}) \to (y \to z)$

Решение: 1 способ - с помощью равносильных преобразований

$$A \equiv (x \vee \overline{z}) \to (y \to z) \equiv \overline{x \vee \overline{z}} \vee (\overline{y} \vee z) \equiv$$

$$\equiv (\overline{x} \wedge z) \vee \overline{y} \vee z - \text{ДНФА}$$

Произведем преобразования элементарных конъюнкций:

Первой: $\overline{x} \wedge z = (\overline{x} \wedge z) \wedge (y \vee \overline{y}) = (\overline{x} \wedge z \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge z \wedge \overline{y})$

Второй:

$$\overline{y} \equiv \overline{y} \wedge (x \vee \overline{x}) \wedge (z \vee \overline{z}) = (\overline{y} \wedge x \wedge z) \vee (\overline{y} \wedge x \wedge \overline{z}) \vee (\overline{y} \wedge \overline{x} \wedge z) \vee (\overline{y} \wedge \overline{x} \wedge \overline{z})$$

Третьей:

$$z \equiv z \wedge (x \vee \overline{x}) \wedge (y \vee \overline{y}) = (z \wedge x \wedge y) \vee (z \wedge x \wedge \overline{y}) \vee (z \wedge \overline{x} \wedge y) \vee (z \wedge \overline{x} \wedge \overline{y})$$

$$\text{СДНФА} \equiv (x \wedge y \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z})$$

2 способ - с помощью таблиц истинности

x	y	z	$\overline{z}$	$x \vee \overline{z}$	$y \to z$	$(x \vee \overline{z}) \to (y \to z)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1

Выделяем строки, где формула принимает значение 1, составляем дизъюнкцию конъюнкций и получаем СДНФ

$$СДНФА \equiv (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee$$
$$\vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}).$$

Пример: Построить полином Жегалкина функции $f(x,y)=x\to y$.

Решение. 1. (метод неопределенных коэффициентов). Запишем искомый полином в виде

$$P= c_0\oplus c_1x\oplus c_2y\oplus c_{12}xy$$

Пользуясь таблицей истинности

x	y	$x \to y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$f(0,0)=P(0,0)= c_0=1$, $f(0,1)=P(0,1)= c_0\oplus c_2=1$,

$f(1,0)=P(1,0)= c_0\oplus c_1=0$, $f(1,1)=P(1,1)= c_0\oplus c_1\oplus c_2\oplus c_{12}=1$

Откуда последовательно находим, $c_0=1$, $c_1=1$, $c_2=0$, $c_{12}=1$.

$$x\to y=1\oplus x\oplus xy$$

2.(Метод преобразования формул.) Имеем

$$x \to y = \overline{x} \vee y = \overline{x \cdot \overline{y}} = (x \cdot (y \oplus 1)) \oplus 1 = 1 \oplus x \oplus x \cdot y$$

Алгебра Жегалкина – это алгебра над множеством двух бинарных булевых функций ($\cdot, \oplus$) и функции 1.

Для нее справедливы все свойства булевых функций, а также:

$x \oplus y \equiv y \oplus x;$

$x(y \oplus z) \equiv x \cdot y \oplus x \cdot z;$

$x \oplus x \equiv 0;$

$x \oplus 0 \equiv x;$

$\bar{x} \equiv x \oplus 1;$

$x \vee y \equiv x \cdot y \oplus x \oplus y.$

Формула, имеющая вид суммы (по модулю два) произведений, называется ***полиномом Жегалкина***.

Утверждение 3.1.1. Через операции алгебры Жегалкина можно выразить все другие булевы функции:

$\neg x = 1 \oplus x, \quad x \vee y = x \oplus y \oplus xy, \quad x \sim y = 1 \oplus x \oplus y,$

$x \rightarrow y = 1 \oplus x \oplus xy, \; x \downarrow y = 1 \oplus x \oplus y \oplus xy, x | y = 1 \oplus xy.$