

Решение задач

Задача. На соревнованиях по лёгкой атлетике Андрей, Боря, Серёжа и Володя заняли первые четыре места. Но когда девочки стали вспоминать, как эти места распределились между победителями, то мнения разошлись:

Даша: Андрей был первым, а Володя – вторым.

Галя: Андрей был вторым, а Борис – третьим.

Лена: Боря был четвёртым, а Серёжа – вторым.

Ася, которая была судьёй на этих соревнованиях и хорошо помнила как распределились места сказала, что каждая из девочек сделала одно правильное и одно неправильное заявление.

Кто из мальчиков и какое место занял?

Ответ: Андрей занял первое место, Серёжа – второе, Боря – третье, Володя – четвёртое.

Пример 1. Построить таблицу значений для следующей булевой функции: $f(x, y, z) = ((x \vee \bar{y}) \rightarrow z)((x | y) \leftrightarrow \bar{z})$.

Решение:

x	y	z	\bar{y}	$x \vee \bar{y}$	$(x \vee \bar{y}) \rightarrow z$	$x y$	\bar{z}	$(x y) \leftrightarrow \bar{z}$	$f(x, y, z)$
0	0	0	1	1	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0	0	1	1

Пример 2. Показать, что $x \vee y \equiv (x | x) | (y | y)$.

Решение.

$$x \vee y \equiv \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}.$$

Штрих Шеффера

$$\bar{x} \equiv \bar{x} \vee \bar{x} \equiv x | x;$$

$$\bar{y} \equiv \bar{y} \vee \bar{y} \equiv y | y.$$

$$\text{Тогда } x \vee y \equiv \bar{x} \cdot \bar{y} \equiv \overline{(x | x)(y | y)}.$$

$$x \vee y \equiv (x | x) | (y | y).$$

Пример 3. Выяснить, эквивалентны ли формулы $x \rightarrow (y \oplus z)$ и $(x \rightarrow y) \oplus (x \rightarrow z)$.

Решение. Для каждой формулы составим таблицу значений.

$x \rightarrow (y \oplus z)$:

x	y	z	$y \oplus z$	$x \rightarrow (y \oplus z)$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

$(x \rightarrow y) \oplus (x \rightarrow z)$:

x	y	z	$x \rightarrow y$	$x \rightarrow z$	$(x \rightarrow y) \oplus (x \rightarrow z)$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0

Так как таблицы значений не совпадают, то формулы не являются эквивалентными

Пример 4. Привести к СДНФ

$$A \equiv (x \vee \bar{z}) \rightarrow (y \rightarrow z)$$

Решени

е: 1 способ - с помощью равносильных преобразований

$$\begin{aligned} A &\equiv (x \vee \bar{z}) \rightarrow (y \rightarrow z) \equiv \overline{x \vee \bar{z}} \vee (\bar{y} \vee z) \equiv \\ &\equiv (\bar{x} \wedge z) \vee \bar{y} \vee z - \text{ДНФА} \end{aligned}$$

Произведем преобразования элементарных конъюнкций:

Первой: $\bar{x} \wedge z = (\bar{x} \wedge z) \wedge (y \vee \bar{y}) = (\bar{x} \wedge z \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge z \wedge \bar{y})$

Второй:

$$\bar{y} \equiv \bar{y} \wedge (x \vee \bar{x}) \wedge (z \vee \bar{z}) = (\bar{y} \wedge x \wedge z) \vee (\bar{y} \wedge x \wedge \bar{z}) \vee (\bar{y} \wedge \bar{x} \wedge z) \vee (\bar{y} \wedge \bar{x} \wedge \bar{z})$$

Третье

$$\bar{z} \equiv z \wedge (x \vee \bar{x}) \wedge (y \vee \bar{y}) = (z \wedge x \wedge y) \vee (z \wedge x \wedge \bar{y}) \vee (z \wedge \bar{x} \wedge y) \vee (z \wedge \bar{x} \wedge \bar{y})$$

$$\text{СДНФА} \equiv (x \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})$$

2 способ - с помощью таблиц истинности

x	y	z	\bar{z}	$x \vee \bar{z}$	$y \rightarrow z$	$(x \vee \bar{z}) \rightarrow (y \rightarrow z)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1

Выделяем строки, где формула принимает значение 1, составляем дизъюнкцию конъюнкций и получаем СДНФ

$$\text{СДНФА} \equiv (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}).$$

Пример Построить полином Жегалкина функции $f(x,y)=x \rightarrow y$.

:

Решение. 1. (метод неопределенных коэффициентов). Запишем искомый полином в виде

$$P = c_0 \oplus c_1 x \oplus c_2 y \oplus c_{12} xy$$

Пользуясь таблицей истинности

$$f(0,0)=P(0,0)=c_0=1, \quad f(0,1)=P(0,1)=c_0 \oplus c_2=1,$$

$$f(1,0)=P(1,0)=c_0 \oplus c_1=0, \quad f(1,1)=P(1,1)=c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_{12}=1$$

x	y	$x \rightarrow y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Откуда последовательно находим, $c_0=1$, $c_1=1$, $c_2=0$, $c_{12}=1$.

$$x \rightarrow y = 1 \oplus x \oplus xy$$

2.(Метод преобразования формул.) Имеем

$$x \rightarrow y = \bar{x} \vee y = \overline{x \cdot \bar{y}} = (x \cdot (y \oplus 1)) \oplus 1 = 1 \oplus x \oplus x \cdot y$$

Алгебра Жегалкина – это алгебра над множеством двух бинарных булевых функций (\cdot , \oplus) и функции 1.

Для нее справедливы все свойства булевых функций, а также:

$$x \oplus y \equiv y \oplus x;$$

$$x(y \oplus z) \equiv x \cdot y \oplus x \cdot z;$$

$$x \oplus x \equiv 0;$$

$$x \oplus 0 \equiv x;$$

$$\bar{x} \equiv x \oplus 1;$$

$$x \vee y \equiv x \cdot y \oplus x \oplus y.$$

Формула, имеющая вид суммы (по модулю два) произведений, называется **полиномом Жегалкина**.

Утверждение 3.1.1. Через операции алгебры Жегалкина можно выразить все другие булевы функции:

$$\neg x = 1 \oplus x, \quad x \vee y = x \oplus y \oplus xy, \quad x \sim y = 1 \oplus x \oplus y,$$

$$x \rightarrow y = 1 \oplus x \oplus xy, \quad x \downarrow y = 1 \oplus x \oplus y \oplus xy, \quad x | y = 1 \oplus xy.$$