

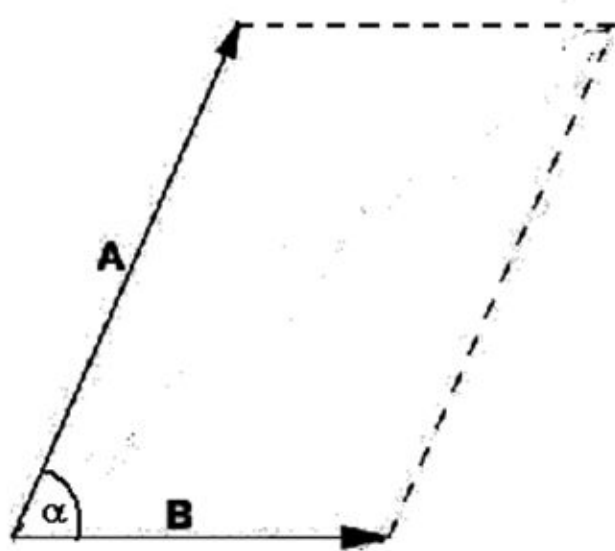
СИМВОЛЫ

	название	пример	пояснение
\Rightarrow	следует	$A \Rightarrow B$	если A, то B
\Leftrightarrow	тогда и только тогда	$A \Leftrightarrow B$	если A, то B и если B, то A
\neg	отрицание	$A \neg B$	если A, то B неверно
\wedge	и	$A \wedge B$	и A, и B
\vee	или	$A \vee B$	или A, или B, или оба
\oplus	исключающее или	$A \oplus B$	или A, или B, но не оба
\forall	квантор всеобщности	$\forall x$	любое значение x
\exists	квантор существования	$\exists x$	существует такое x
$\exists!$	единственность	$\exists! x$	существует только одно x
\nexists	не существует	$\nexists x$	нет ни одного x

Скалярное произведение

6. Скалярное умножение вектора на вектор – из 2 векторов получается скаляр (скалярное произведение)

$$c = (\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \alpha = AB_a = BA_b = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$



α – угол между векторами.

Обозначение скалярного произведения без скобок и с жирной точкой - только в печатном тексте. На доске и в тетради - только способ со скобками и стрелками над векторами.

Свойства скалярного произведения:

а) $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\mathbf{B}, \mathbf{A})$

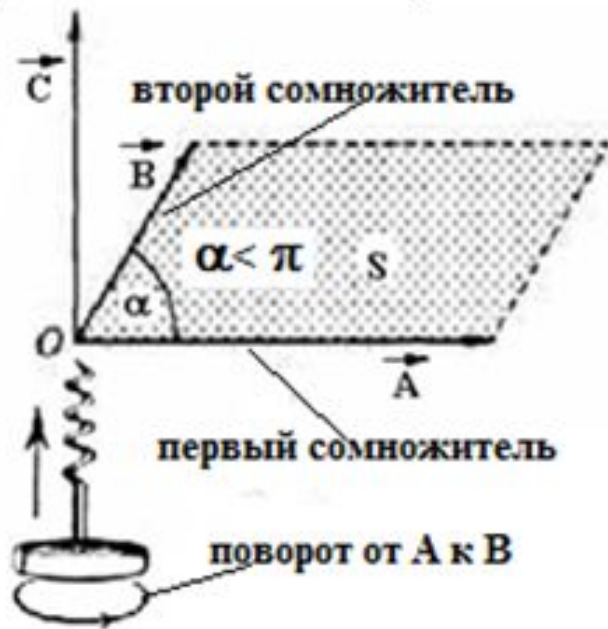
б) знак (\mathbf{A}, \mathbf{B}) определяется знаком $\cos \alpha$

в) $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 0$ при $A \vee B = 0$ или $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$ – это свойство используется для проверки перпендикулярности векторов.

Векторное произведение

7. Векторное умножение вектора на вектор – из 2 векторов получается третий вектор (векторное произведение)

$$\mathbf{C} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$



Векторное произведение это вектор с модулем $C = A B \sin \alpha$ и \perp обоим сомножителям, направление \mathbf{C} указывает буравчик при повороте его рукоятки от 1 сомножителя ко второму на угол $< \pi$.

Геометрический смысл - модуль \mathbf{C} равен площади параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{A} и \mathbf{B} .

Векторное произведение II

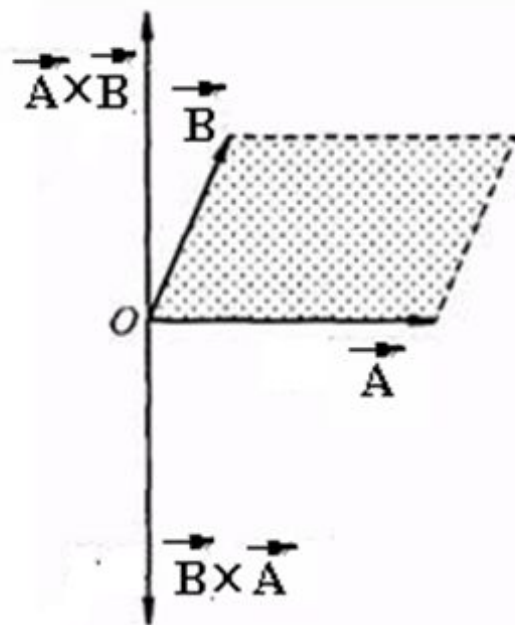
Вект. произ-ние можно выразить через проекции сомножителей (здесь проекции обозначены маленькими буквами):

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \vec{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \vec{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Свойства векторного произведения:

а) $[\mathbf{B}, \mathbf{A}] = -[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ – перемена мест сомножителей изменяет направление векторного произведения.

б) $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$ при $\mathbf{A} \vee \mathbf{B} = 0$ или $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$ – это свойство используется для проверки параллельности векторов.



для проверки

$$[\vec{A}, \vec{B}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \vec{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \vec{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Обозначения скалярного и векторного произведений

-

$A \cdot B$, (A, B) , $[A, B]$ и $A \times B$ - только в печатном тексте, включая слайды

$\vec{A} \cdot \vec{B}$, (\vec{A}, \vec{B}) , $[\vec{A}, \vec{B}]$ и $\vec{A} \times \vec{B}$ - в любом месте

В тетради и на доске только так:

$$(\vec{A}, \vec{B}) , [\vec{A}, \vec{B}]$$

Смешанное произведение

8. Смешанное произведение 3 векторов.

Смешанным произведением векторов $(\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}])$ наз. число (скаляр), равное скалярному произведению вектора \mathbf{A} на вектор $[\mathbf{B}, \mathbf{C}]$.

Свойства:

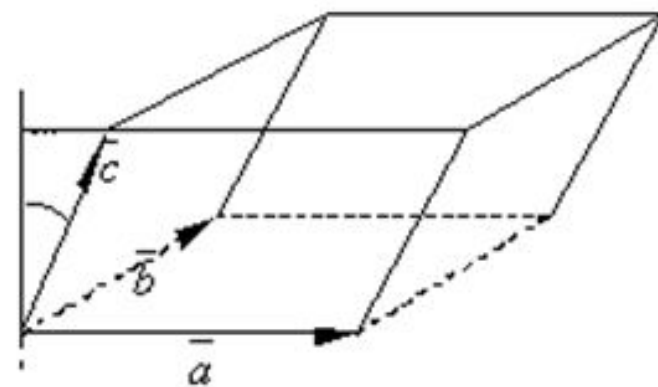
а) $(\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]) = ([\mathbf{A}, \mathbf{B}], \mathbf{C})$

б) циклическая перестановка:
 $(\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]) = (\mathbf{B}, [\mathbf{C}, \mathbf{A}]) = (\mathbf{C}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}])$

в) смеш. произ-ние равно нулю, если среди сомножителей есть нулевой вектор, или среди них есть параллельные, или все три лежат в одной плоскости;

г) геометрический смысл – объем параллелепипеда, построенного на сомножителях.

Значение смешанного произведения может быть выражено через проекции сомножителей:



$$(\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Умножение вектора на матрицу

$$\text{Матрица: } \hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Векторы: } \vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = \hat{A} \vec{B}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_1 + a_{12} \cdot b_2 + a_{13} \cdot b_3 \\ a_{21} \cdot b_1 + a_{22} \cdot b_2 + a_{23} \cdot b_3 \\ a_{31} \cdot b_1 + a_{32} \cdot b_2 + a_{33} \cdot b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Операции с векторами.

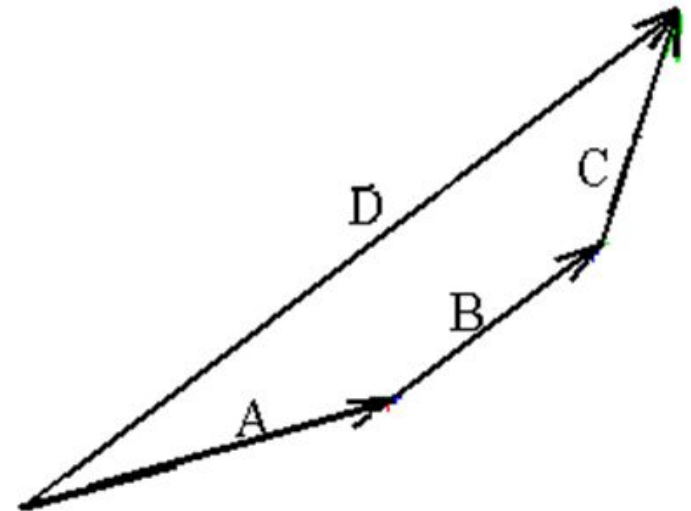
10. Не определены операции деления на вектор – ни обратная скалярному умножению, ни векторному.
∃ умножение на обратную матрицу:

$$\vec{B} = \widehat{A}^{-1} \vec{C}$$

\widehat{A}^{-1} – матрица, обратная матрице \widehat{A}

11. Любой вектор можно разложить на произвольное число векторов, так чтобы сумма:

$$\mathbf{A} = \Sigma \mathbf{B}_k$$



Произведения векторов

Скалярное произведение:

$$c = (\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A B \cos \alpha = AB_a = BA_b = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ – типографские способы записи

(\vec{A}, \vec{B}) - при письме от руки

Векторное произведение:

$\mathbf{C} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ – типографские способы записи

$\vec{C} = [\vec{A}, \vec{B}]$ - при письме от руки

Смешанное произведение 3 векторов.

$(\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}])$ – типографский способ записи

$(\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}])$ - при письме от руки

Траектория. Материальная точка.

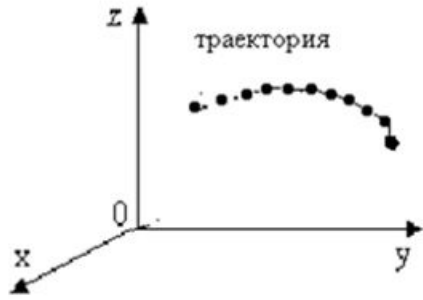
Каждая малая часть тела \Rightarrow геометрическая точка \Rightarrow радиус-вектор этой точки.



Движение тела \Rightarrow изображающая точка \updownarrow свое положение отн. тела отсчета (системы координат) \Rightarrow ее различные положения образуют линию, кот. наз. траекторией. Если

размеры тела \ll характерных размеров для данного движения (напр., радиуса кривизны траектории) \Rightarrow размерами тела пренебрегают \Rightarrow тело представляют в виде модели - материальной точки.

Время. Единица измерения времени.



Движение тела приближенно - движение одной точки.

Движение с-мы тел \approx смена картинок, изображающих их положения друг отн. друга. Смена картинок изображает

течение *времени*.

«Частота смены картинок» - выбор *единицы времени* \Rightarrow найти к.-либо периодический, т.е. регулярно повторяющийся процесс \Rightarrow было выбрано вращение Земли вокруг оси. В системе СИ за единицу времени принята *секунда* - $1/86400$ доля от *средних солнечных суток*. (Солнечные сутки - промежуток времени между двумя полуднями.) Способы хранения эталона секунды: механические \rightarrow кварцевые хронометры \rightarrow мазер на ^{133}Cs : $1 \text{ с} \approx 9.192 \cdot 10^9$ периодов колебания этого мазера.

Уравнение траектории

Уравнение траектории:

$$y = y(x)$$

$$z = z(x)$$

В параметрическом виде (u – параметр):

$$x = x(u)$$

$$y = y(u)$$

$$z = z(u)$$

Если параметр – время, то получится кинематическое уравнение движения:

$$x = x(t)$$

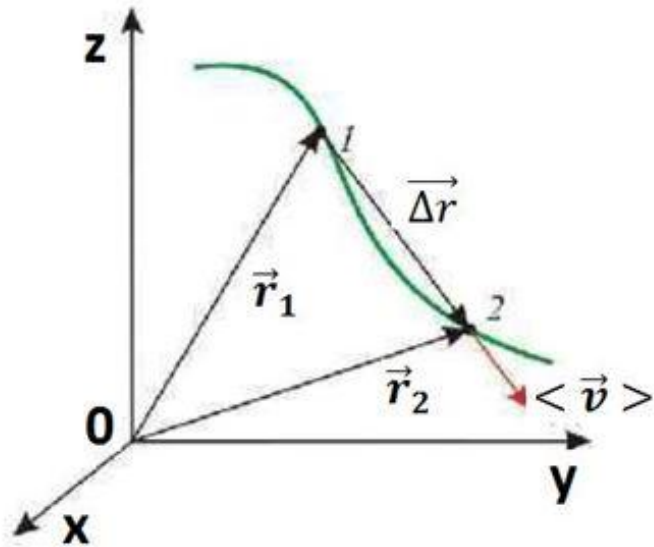
$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$

в векторной форме

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Вектор скорости



Малый промежуток времени $\Delta t \Rightarrow$ приращение радиус-вектора точки $\overrightarrow{\Delta r}$ – вектор перемещения.

Деление вектора $\overrightarrow{\Delta r}$ на скаляр Δt : вектор средней скорости:

$$\langle \vec{v} \rangle = \overrightarrow{\Delta r} / \Delta t$$

Направление вектора $\langle \vec{v} \rangle$ такое же, как у $\overrightarrow{\Delta r}$.

Его проекции: $\langle v_x \rangle = \Delta x / \Delta t$

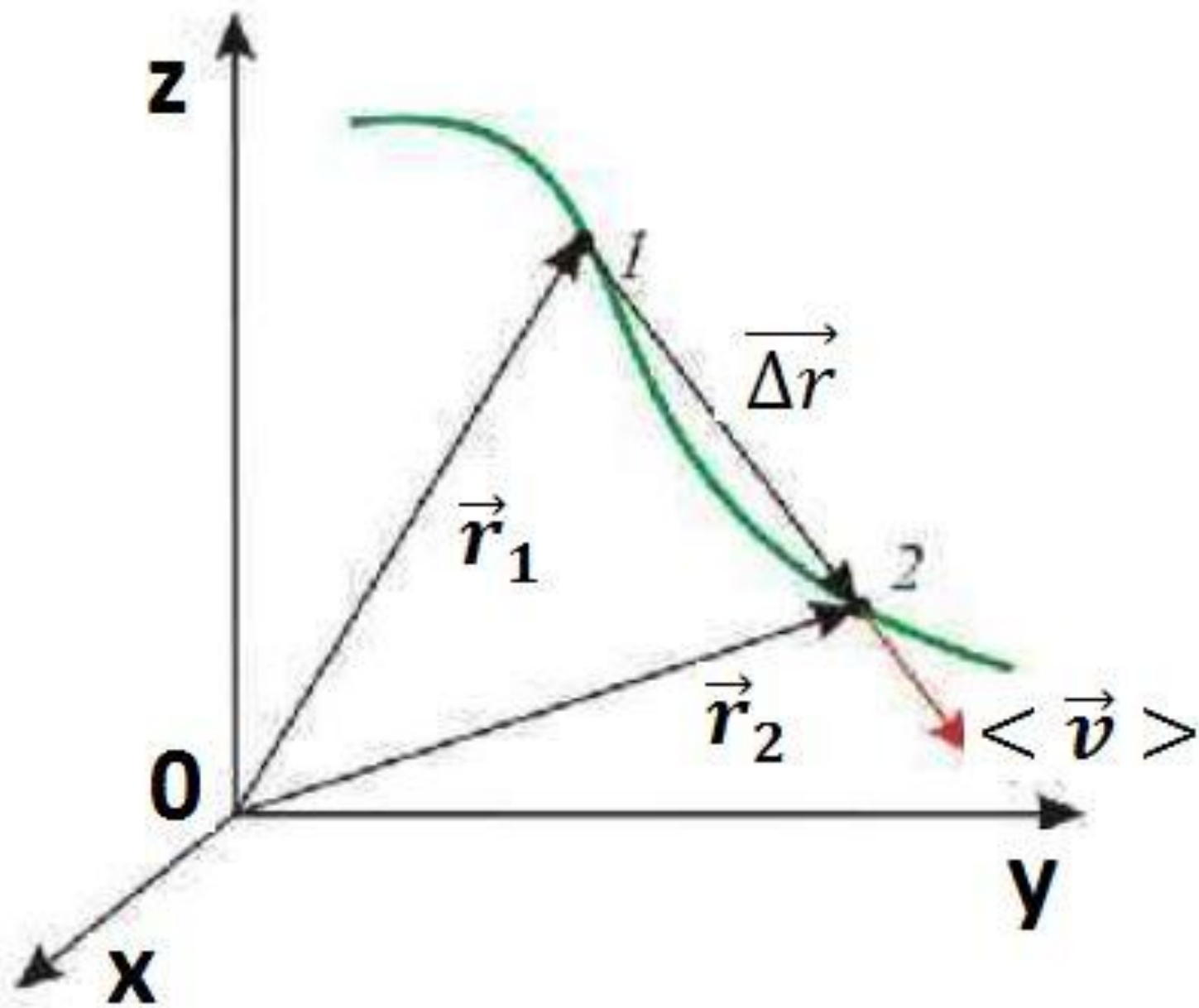
$\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow$ проекции вектора мгновенной скорости \vec{v} :

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x / \Delta t$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = d\vec{r} / dt$$

Ед. измерения скорости в системе СИ является м/с.

Вектор \vec{v} направлен по касательной к траектории.



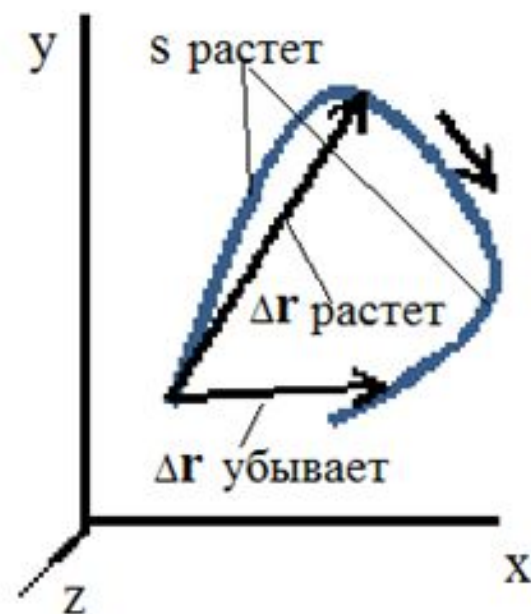
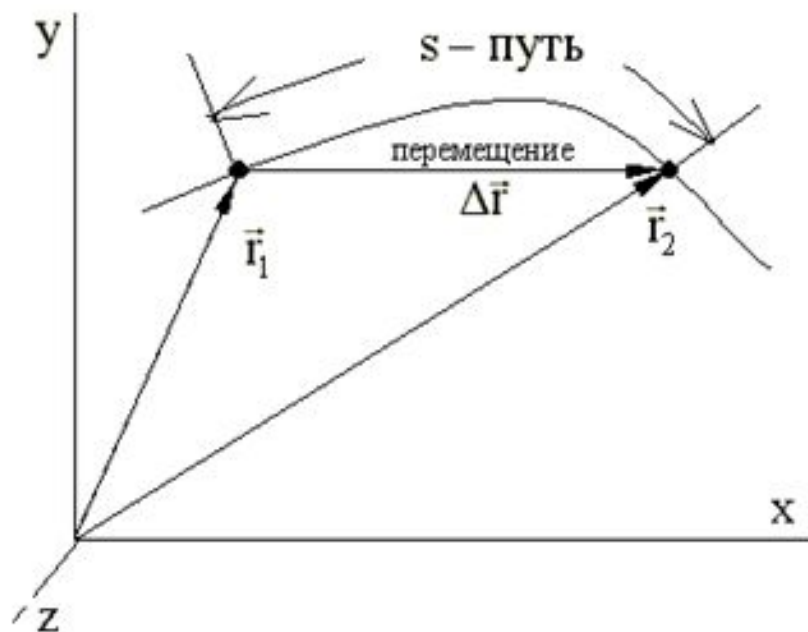
Скорость, путь

Абс. вел-на скорости \Leftrightarrow длина пути s : $s = \int_{t_1}^{t_2} v dt$

Длина пути отличается от вектора перемещения и даже от его модуля.

1) из рисунка путь — длина дуги траектории, а модуль вектора перемещения — ее хорда.

2) $v \geq 0 \Rightarrow s \uparrow$ со временем, а $|\vec{\Delta r}|$ может \downarrow



Ускорение: вектор, тангенциальное,

нормальное

Промежуток $\Delta t \Rightarrow$ приращение вектора скорости $\overline{\Delta v}$.

Вектор $\langle \overline{w} \rangle = \overline{\Delta v} / \Delta t$ наз. *средним ускорением* точки за промежуток Δt .

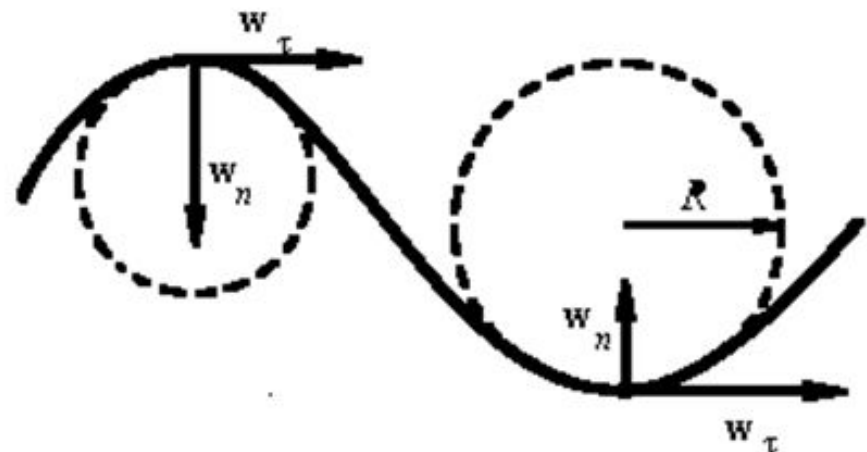
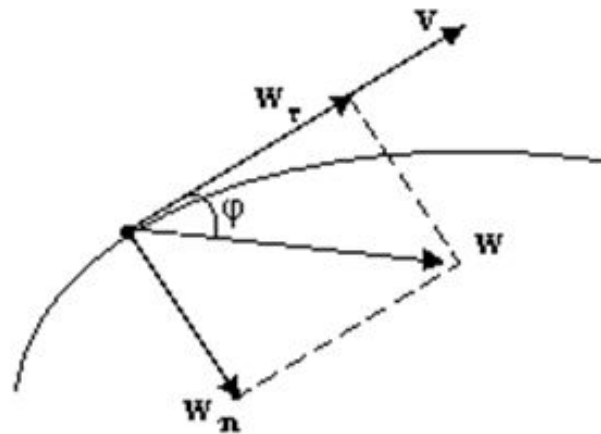
Его проекции $\langle w_x \rangle = \Delta v_x / \Delta t$ и т.п.

При $\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow$ проекции *вектора мгновенного ускорения* \overline{w} :

$$w_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta v_x / \Delta t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\overline{w} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Естественная с-ма координат: оси по касательной и по нормали к траектории $\Rightarrow \overline{w} = \overline{w}_\tau + \overline{w}_n$ - сумма *тангенциальной* \overline{w}_τ и *нормальной* компонент \overline{w}_n



Тангенциальное и нормальное ускорение

Модуль \vec{w}_τ $w_\tau = |dv/dt|$, направление совпадает с \vec{v} , если $dv/dt > 0$ и противоположно ему, если $dv/dt < 0$.

Модуль \vec{w}_n $w_n = v^2/R$, где R – радиус кривизны траектории.

\vec{w}_n направлен к центру кривизны траектории \Rightarrow
 $\vec{w}_\tau \perp \vec{w}_n$

Модуль вектора ускорения удобно выразить либо через его проекции на координатные оси, либо через тангенциальную и нормальную компоненты:

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2}$$

Ед. измерения ускорения в системе СИ является м/с^2 .

Частные случаи кинематики МТ (1)

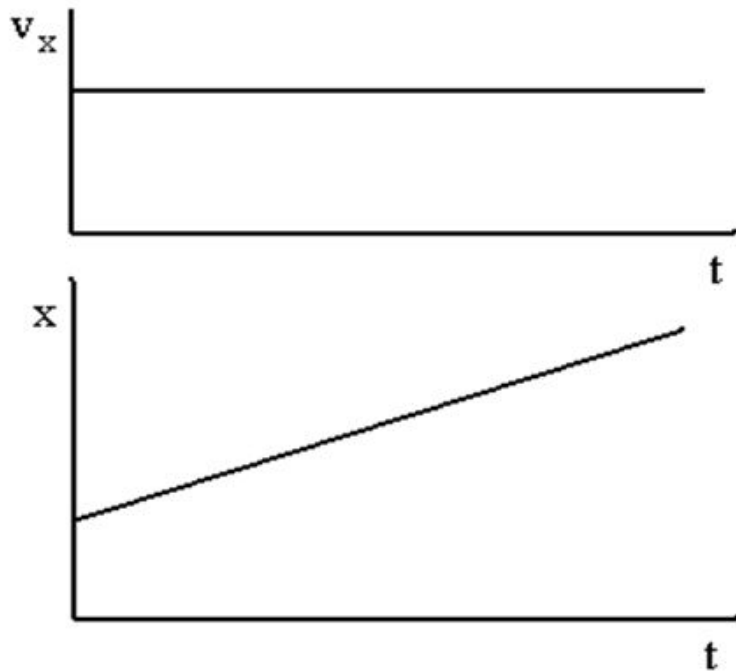
Частные случаи: прямолинейное движение (траектория – прямая, вдоль нее ось Ox) и криволинейное, а также равномерное (с постоянной скоростью) и неравномерное (с меняющейся).

В последнем случае можно выделить равнопеременное движение, когда постоянно ускорение, или его модуль, или одна из компонент.

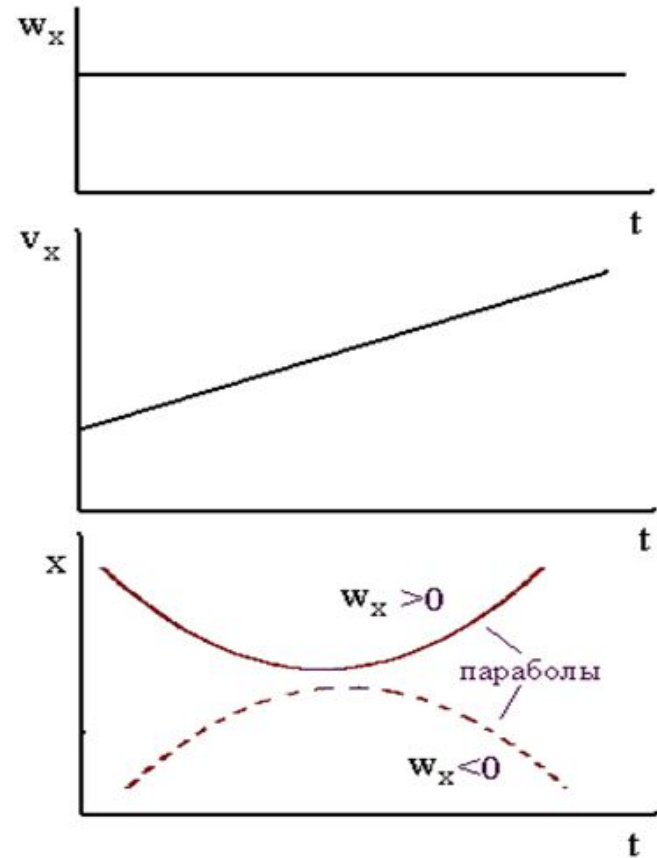
	Равномерное	Неравномерное
Прямолинейное	$\mathbf{v} = \text{const}; \mathbf{w} = 0;$ $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v} t;$ $s = v t$	$\mathbf{w} \neq 0; w = w_\tau \neq 0;$ При $\mathbf{w} = \text{const}$ $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{w} t;$ $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{w} t^2$
Криволинейное	$v = \text{const};$ $\mathbf{v} \neq \text{const};$ $\mathbf{w}_\tau = 0; \mathbf{w} = \mathbf{w}_n$	$\mathbf{w}_\tau \neq 0; \mathbf{w}_n \neq 0;$ $\mathbf{w} = \mathbf{w}_\tau + \mathbf{w}_n;$ $\mathbf{v} \neq \text{const}$

Частные случаи кинематики МТ (2)

Графики равномерного прямолинейного движения



Графики неравномерного прямолинейного движения

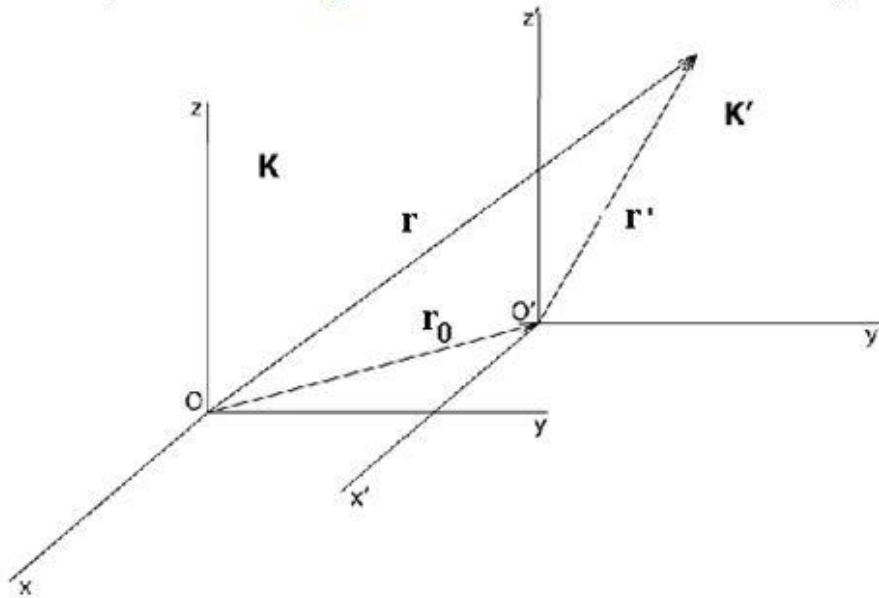


Преобразования Галилея,

КООРДИНАТЫ

Выбор системы координат – произвольный (направления осей, тело отсчета).

Соотношения координат и скоростей МТ в разных системах координат (системах отсчета) - преобразование Галилея.



Две СО K и K' с параллельными осями.

Отн. K начало координат K' движется со скоростью \mathbf{u} , а некая частица со скоростью \mathbf{v} .

Тогда координаты частицы в K' выражаются через

координаты в системе K :

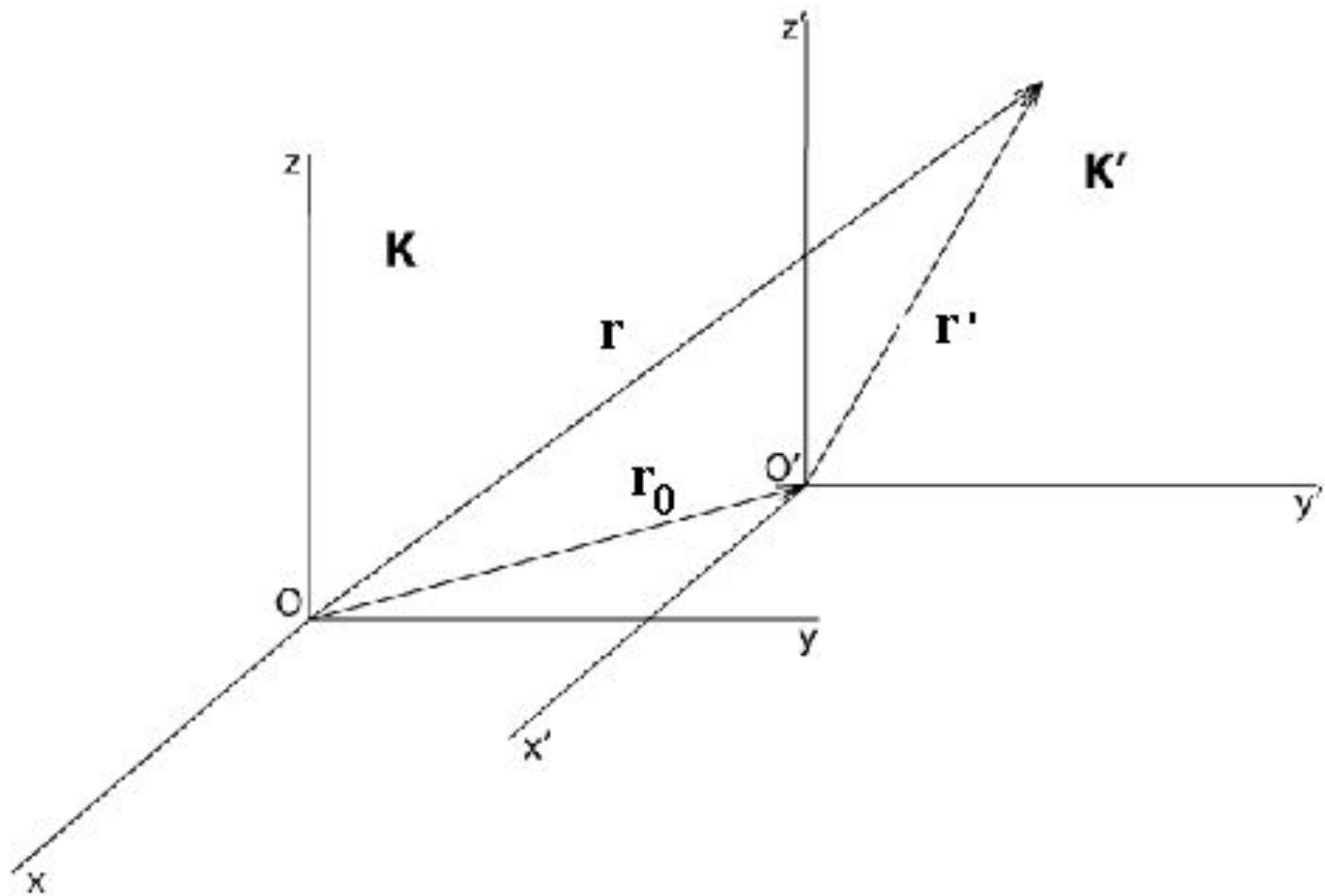
$$x' = x - x_0 - u_x t$$

$$y' = y - y_0 - u_y t$$

$$z' = z - z_0 - u_z t$$

В векторной форме: $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0 - \vec{u} t$.

\vec{r}_0 – радиус-вектор начала координат K' при $t = 0$.



Преобразования Галилея, скорости

• Проекции скорости преобразуются по правилу:

$$v_x' = v_x - u_x$$

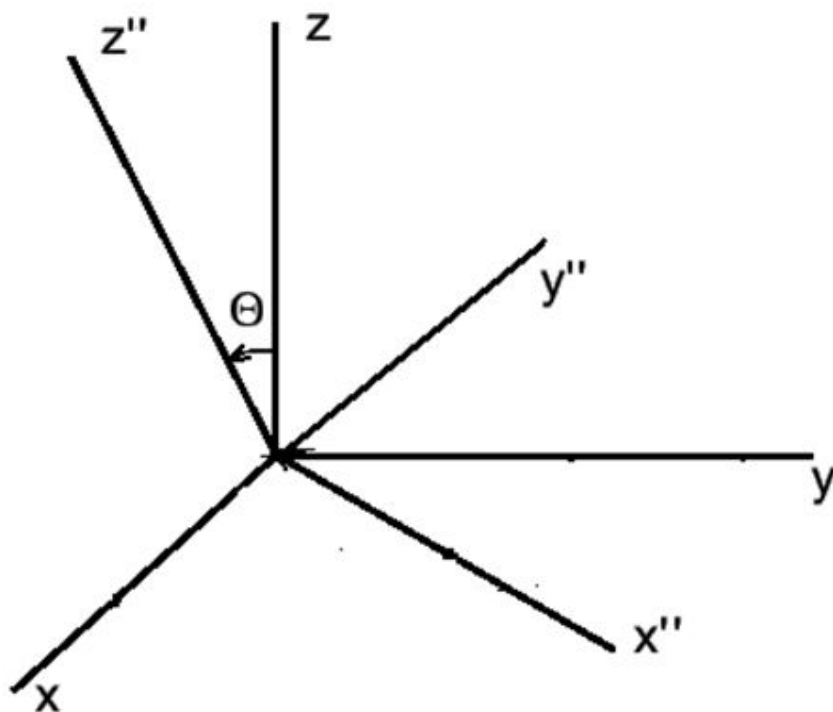
$$v_y' = v_y - u_y$$

$$v_z' = v_z - u_z$$

В векторной форме:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$$

Преобразования вращения (поворота)



Если оси \nparallel , то нужно сначала (или после) провести преобразование поворота координатных осей.

В повернутой K'' «дважды штрихованной», СО координаты задаются по правилу:

$$\vec{r}'' = \hat{T} \vec{r}$$

\hat{T} – тензор вращения (или матрица направляющих

косинусов)

$$x'' = x \cos(x, x'') + y \cos(y, x'') + z \cos(z, x'')$$

$$y'' = x \cos(x, y'') + y \cos(y, y'') + z \cos(z, y'')$$

$$z'' = x \cos(x, z'') + y \cos(y, z'') + z \cos(z, z'')$$

Аргументы косинусов – углы между парами (их 9 штук) осей. На рисунке показан угол (z, z'') .