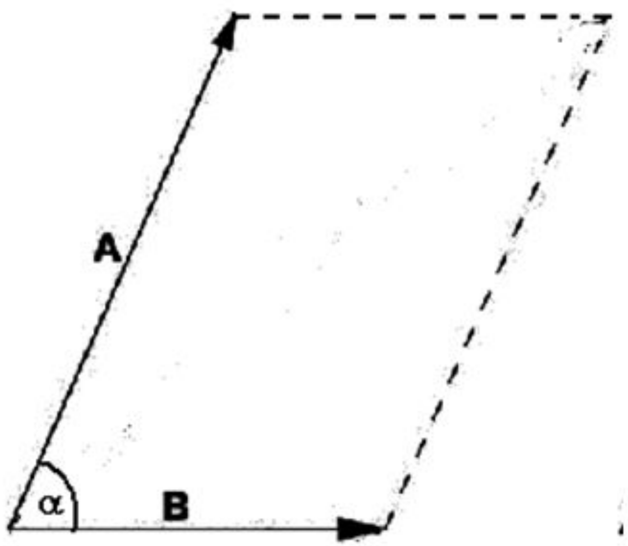
символы

	название	пример	пояснение
$\Rightarrow$	следует	$A \Rightarrow B$	если A, то B
$\Leftrightarrow$	тогда и только тогда	$A \Leftrightarrow B$	если A, то B и если B, то A
$\neg$	отрицание	$A \neg B$	если A, то B неверно
$\wedge$	и	$A \wedge B$	и A, и B
$\vee$	или	$A \vee B$	или A, или B, или оба
$\oplus$	исключающее или	$A \oplus B$	или A, или B, но не оба
$\forall$	квантор всеобщности	$\forall x$	любое значение x
$\exists$	квантор существования	$\exists x$	существует такое x
$\exists!$	единственность	$\exists! x$	существует только одно x
$\nexists$	не существует	$\nexists x$	нет ни одного x

Скалярное произведение

6. Скалярное умножение вектора на вектор – из 2 векторов получается скаляр (скалярное произведение)

$c = (\mathbf{A},\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\alpha = AB_a = BA_b = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$



α – угол между векторами.

Обозначение скалярного произведения без скобок и с жирной точкой - только в печатном тексте. На доске и в тетради - только способ со скобками и стрелками над векторами.

Свойства скалярного произведения:

а) $(\mathbf{A},\mathbf{B}) = (\mathbf{B},\mathbf{A})$

б) знак $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ определяется знаком $\cos\alpha$

в) $(\mathbf{A},\mathbf{B}) = 0$ при $A \vee B = 0$ или $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$ – это свойство используется для проверки перпендикулярности векторов.

Векторное произведение

7. Векторное умножение вектора на вектор – из 2 векторов получается третий вектор (векторное произведение)

C = [**A**,**B**] = **A**×**B**

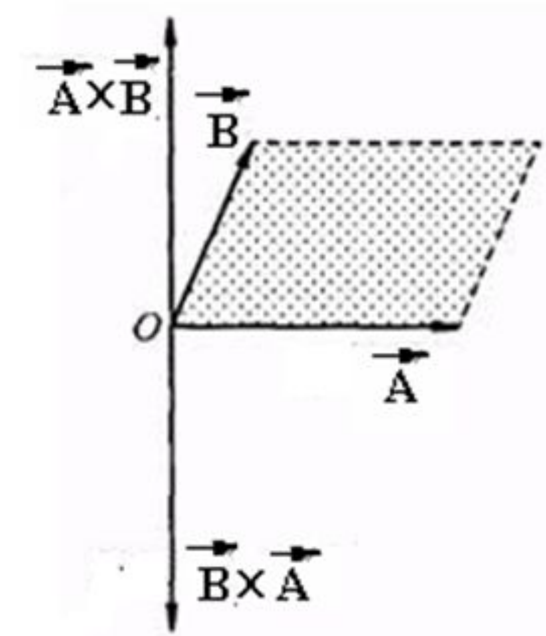
Векторное произведение это вектор с модулем C = A B sinα и ⊥ обоим сомножителям, направление **C** указывает буравчик при повороте его рукоятки от 1 сомножителя ко второму на угол < π.

Геометрический смысл - модуль **C** равен площади параллелограмма, построенного на векторах **A** и **B**.

Векторное произведение II

Вект. произ-ние можно выразить через проекции сомножителей (здесь проекции обозначены маленькими буквами):

$$[\mathrm{A},\mathrm{B}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(a_2b_3 - a_3b_2) - \vec{j}\,(a_1b_3 - a_3b_1) + \vec{k}\,(a_1b_2 - a_2b$$



Свойства векторного произведения:

а) [**B,A**] = - [**A,B**] – перемена мест сомножителей изменяет направление векторного произведения.

б) [**A,B**] = 0 при A $\vee$ B = 0 или **A ∥ B** – это свойство используется для проверки параллельности векторов.

$$[\vec{\mathrm{A}},\vec{\mathrm{B}}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \vec{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \vec{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Обозначения скалярного и векторного произведений

•

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, **(A,B), [A,B]** и $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ **-** только в печатном тексте, включая слайды

$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ **,** $(\vec{\boldsymbol{A}}, \vec{\boldsymbol{B}})$**,** $[\vec{\boldsymbol{A}}, \vec{\boldsymbol{B}}]$ и $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ - в любом месте

В тетради и на доске только так:

$$(\vec{\boldsymbol{A}}, \vec{\boldsymbol{B}})\ \mathbf{,}\ [\vec{\boldsymbol{A}}, \vec{\boldsymbol{B}}]$$

Смешанное произведение

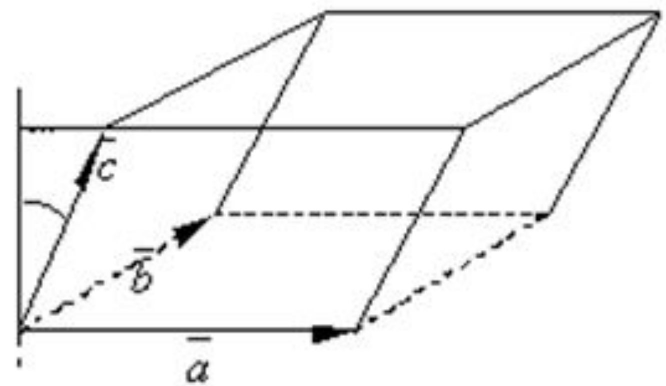
8. Смешанное произведение 3 векторов.

Смешанным произведением векторов (**A**,[**B**,**C**]) наз. число (скаляр), равное скалярному произведению вектора **A** на вектор [**B**,**C**].

Свойства:

а) (**A**,[**B**,**C**]) = ([**A**, **B**],**C**)

б) циклическая перестановка: (**A**,[**B**,**C**]) = (**B**,[**C**,**A**]) = (**C**,[**A**,**B**])



в) смеш. произ-ние равно нулю, если среди сомножителей есть нулевой вектор, или среди них есть параллельные, или все три лежат в одной плоскости;

г) геометрический смысл – объем параллелепипеда, построенного на сомножителях.

Значение смешанного произведения может быть выражено через проекции сомножителей:

$$(\mathbf{A},[\mathbf{B},\mathbf{C}]) = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_x & \mathbf{A}_y & \mathbf{A}_z \\ \mathbf{B}_x & \mathbf{B}_y & \mathbf{B}_z \\ \mathbf{C}_x & \mathbf{C}_y & \mathbf{C}_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Умножение вектора на матрицу

Матрица: $\widehat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$

Векторы: $\vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ и $\vec{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

$$\vec{C} = \widehat{A}\,\vec{B}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_1 + a_{12} \cdot b_2 + a_{13} \cdot b_3 \\ a_{21} \cdot b_1 + a_{22} \cdot b_2 + a_{23} \cdot b_3 \\ a_{31} \cdot b_1 + a_{32} \cdot b_2 + a_{33} \cdot b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Операции с векторами.

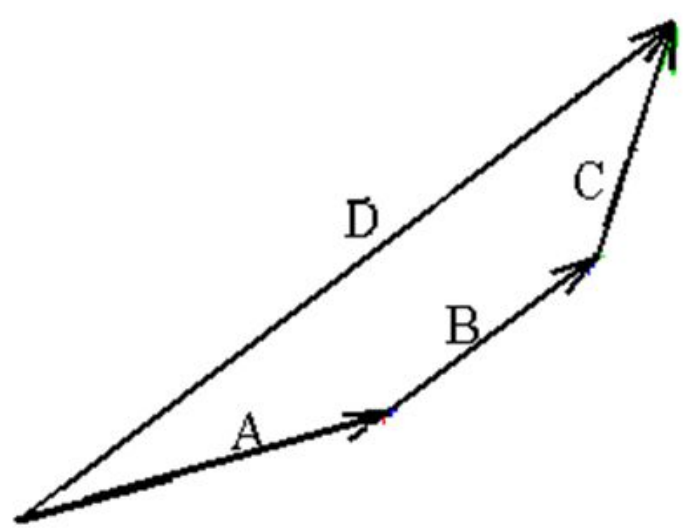
10. Не определены операции деления на вектор – ни обратная скалярному умножению, ни векторному.
$\exists$ умножение на обратную матрицу:

$$\vec{B} = \widehat{A^{-1}}\vec{C}$$

$\widehat{A^{-1}}$ – матрица, обратная матрице $\hat{A}$

11. Любой вектор можно разложить на произвольное число векторов, так чтобы сумма:

$$\mathbf{A} = \Sigma\, \mathbf{B}_k$$



Произведения векторов

Скалярное произведение:

$c = (\mathbf{A},\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A\ B\cos\alpha = AB_a = BA_b = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

$(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ – типографские способы записи

$(\vec{A},\vec{\mathrm{B}})$ - при письме от руки

Векторное произведение:

$\mathbf{C} = [\mathbf{A},\mathbf{B}] = \mathbf{A}\times\mathbf{B}$ – типографские способы записи

$\vec{C} = [\vec{A},\vec{B}]$ - при письме от руки

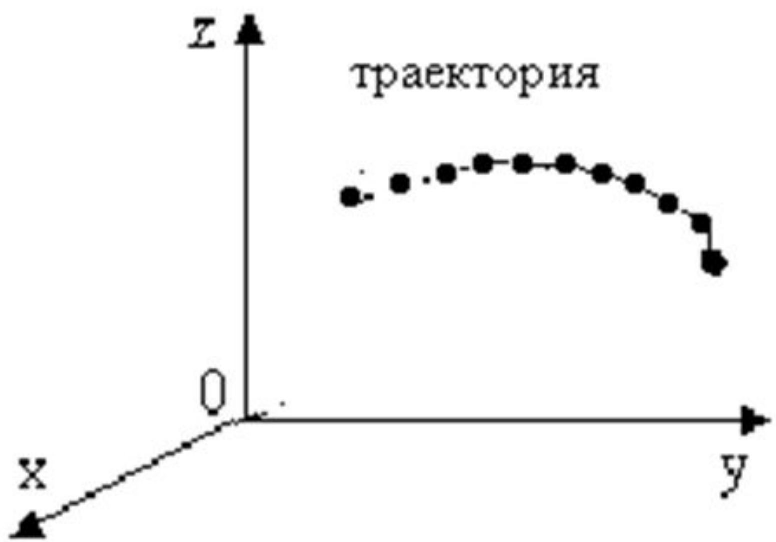
Смешанное произведение 3 векторов.

$(\mathbf{A},[\mathbf{B},\mathbf{C}])$ – типографский способ записи

$(\vec{\mathrm{A}},[\vec{\mathrm{B}},\vec{\mathrm{C}}])$ - при письме от руки

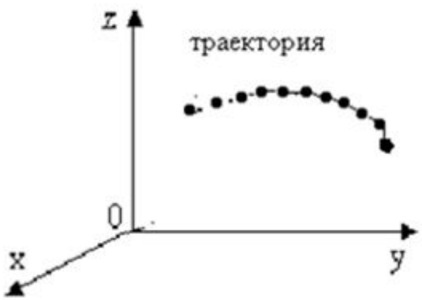
Траектория. Материальная точка.

Каждая малая часть тела ⇨ геометрическая точка ⇨ радиус-вектор этой точки.



Движение тела ⇨ изображающая точка ⇅ свое положение отн. тела отсчета (системы координат) ⇨ ее различные положения образуют линию, кот. наз. ***траекторией***. Если размеры тела << характерных размеров для данного движения (напр., радиуса кривизны траектории) ⇨ размерами тела пренебрегают ⇨ тело представляют в виде модели - ***материальной точки***.

Время. Единица измерения времени.



Движение тела приближенно - движение одной точки.
Движение с-мы тел ≈ смена картинок, изображающих их положения друг отн. друга. Смена картинок изображает течение *времени*.
«Частота смены картинок» - выбор *единицы времени* ⇨ найти к.-либо периодический, т.е. регулярно повторяющийся процесс ⇨ было выбрано вращение Земли вокруг оси. В системе СИ за единицу времени принята *секунда* – 1/86400 доля от *средних солнечных суток*. (Солнечные сутки – промежуток времени между двумя полуднями.) Способы хранения эталона секунды: механические → кварцевые хронометры → мазер на ^{133}Cs: 1 с ≈ $9.192 \cdot 10^9$ периодов колебания этого мазера.

Уравнение траектории

Уравнение траектории:

$$y = y(x)$$
$$z = z(x)$$

В параметрическом виде (u – параметр):

$$x = x(u)$$
$$y = y(u)$$
$$z = z(u)$$

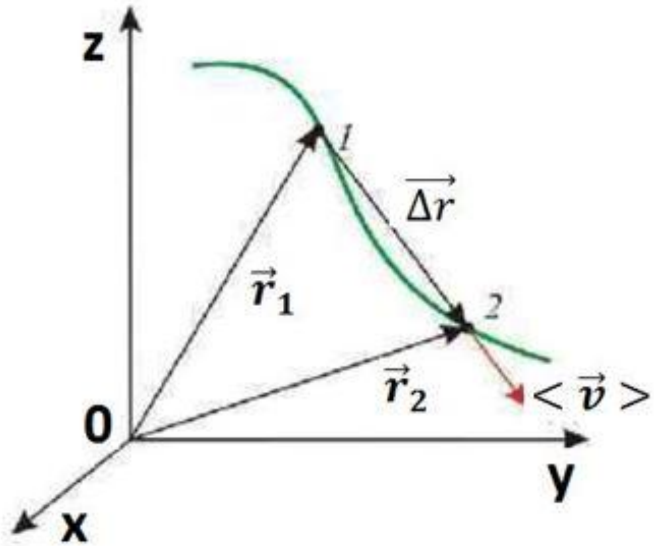
Если параметр - время, то получится <u>*кинематическое уравнение движения*</u>:

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$
$$z = z(t)$$

в векторной форме

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Вектор скорости



Малый промежуток времени Δt ⇨ приращение радиус-вектора точки $\overrightarrow{\Delta \boldsymbol{r}}$ – *вектор перемещения*.

Деление вектора $\overrightarrow{\Delta \boldsymbol{r}}$ на скаляр Δt: *вектор средней скорости*:

$$<\vec{\boldsymbol{v}}> = \overrightarrow{\Delta \boldsymbol{r}}/\Delta t$$

Направление вектора $<\vec{\boldsymbol{v}}>$ такое же, как у $\overrightarrow{\Delta \boldsymbol{r}}$.

Его проекции: $<v_x> = \Delta x/\Delta t$

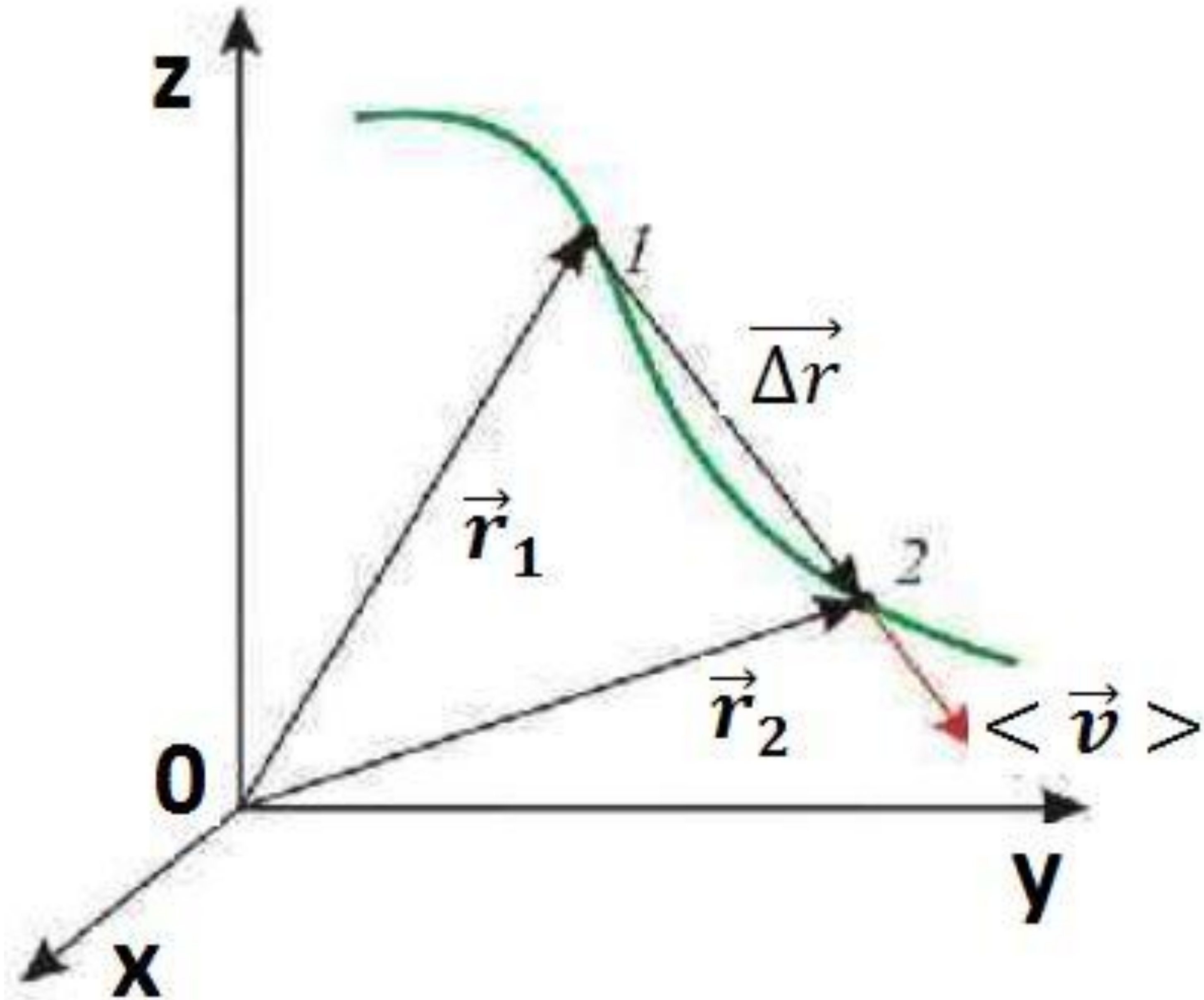
$\Delta t \rightarrow 0$ ⇨ проекции *вектора мгновенной скорости* $\vec{\boldsymbol{v}}$:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta x / \Delta t$$

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_x \vec{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{v}_y \vec{\boldsymbol{j}} + \boldsymbol{v}_z \vec{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{r}}/\boldsymbol{dt}$$

Ед. измерения скорости в системе СИ является м/с.

Вектор $\vec{\boldsymbol{v}}$ направлен по касательной к траектории.



z
1
$\overrightarrow{\Delta r}$
$\vec{r}_1$
2
$\vec{r}_2$
$<\vec{v}>$
0
y
x

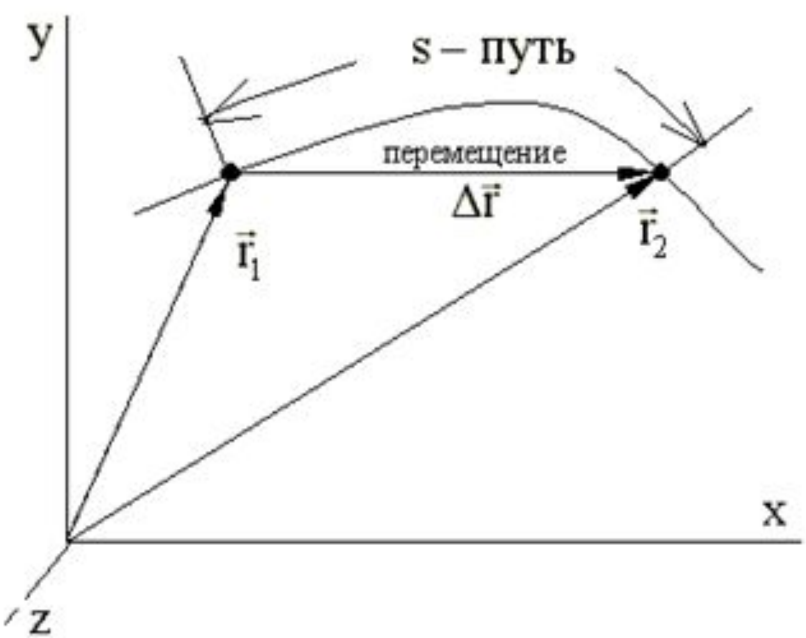
Скорость, путь

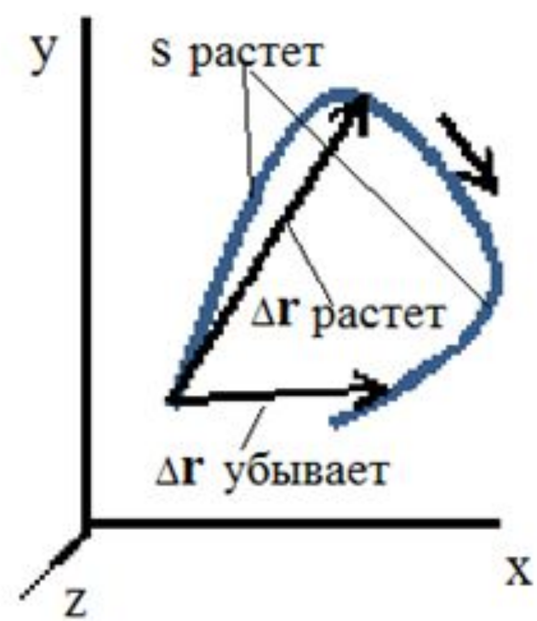
Абс. вел-на скорости ⇔ *длина пути* s: $s = \int_{t_1}^{t_2} v\, dt$

Длина пути отличается от вектора перемещения и даже от его модуля.

1) из рисунка путь длина дуги траектории, а модуль вектора перемещения – ее хорда.

2) $v \geq 0$ ⇨ s ↑ со временем, а $|\overrightarrow{\Delta r}|$ может ↓





Ускорение: вектор, тангенциальное, нормальное

Промежуток $\Delta t \Rightarrow$ приращение вектора скорости $\overrightarrow{\Delta v}$.

Вектор $\langle\vec{w}\rangle = \overrightarrow{\Delta v}/\Delta t$ наз. *средним ускорением* точки за промежуток Δt.

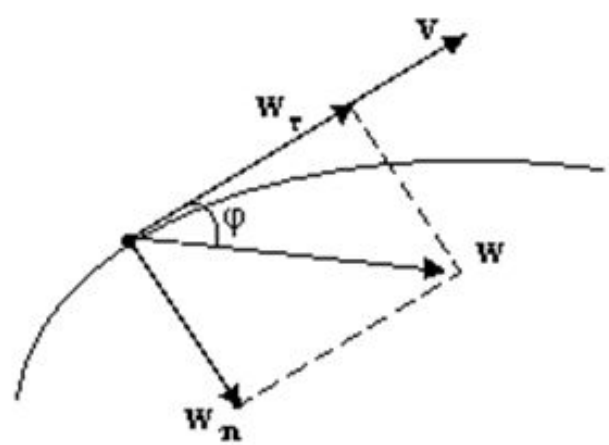
Его проекции $\langle w_x \rangle = \Delta v_x/\Delta t$ и т.п.

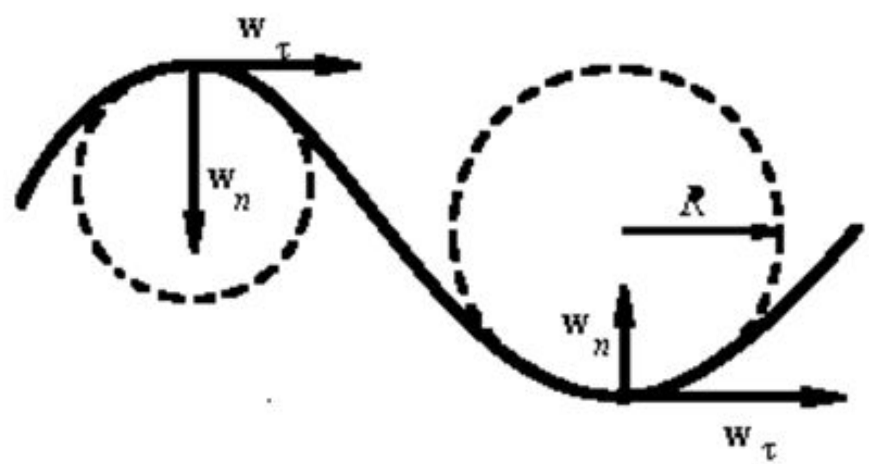
При $\Delta t \to 0 \Rightarrow$ проекции *вектора мгновенного ускорения* $\vec{w}$:

$$w_x = \lim_{\Delta t\to 0}(\Delta v_x/\Delta t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\vec{w} = w_x\,\vec{i} + w_y\,\vec{j} + w_z\,\vec{k} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Естественная с-ма координат: оси по касательной и по нормали к траектории $\Rightarrow$ $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_\tau + \overrightarrow{\boldsymbol{w}}_n$ - сумма *тангенциальной* $\vec{w}_\tau$ *и нормальной* компонент $\vec{w}_n$





Тангенциальное и нормальное ускорение

Модуль $\vec{w}_\tau$ $w_\tau = |dv/dt|$, направление совпадает с $\vec{v}$, если $dv/dt > 0$ и противоположно ему, если $dv/dt < 0$.

Модуль $\vec{w}_n$ $w_n = v^2/R$, где R – радиус кривизны траектории.

$\vec{w}_n$ направлен к центру кривизны траектории ⇨

$$\vec{w}_\tau \perp \vec{w}_n$$

Модуль вектора ускорения удобно выражать либо через его проекции на координатные оси, либо через тангенциальную и нормальную компоненты:

$$w = \sqrt{w_x{}^2 + w_y{}^2 + w_z{}^2} = \sqrt{w_\tau{}^2 + w_n{}^2}$$

Ед. измерения ускорения в системе СИ является м/с^2.

Частные случаи кинематики МТ (1)

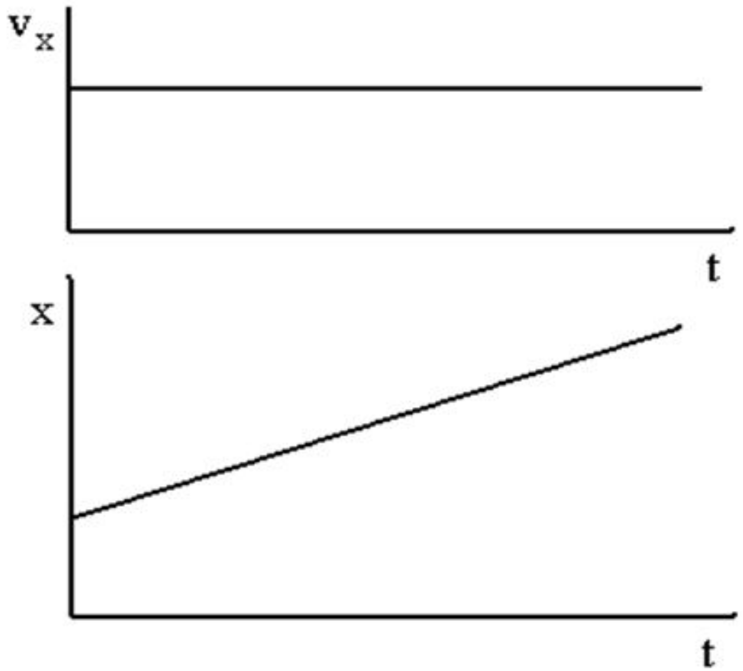
Частные случаи: прямолинейное движение (траектория – прямая, вдоль нее ось 0x) и криволинейное, а также равномерное (с постоянной скоростью) и неравномерное (с меняющейся).

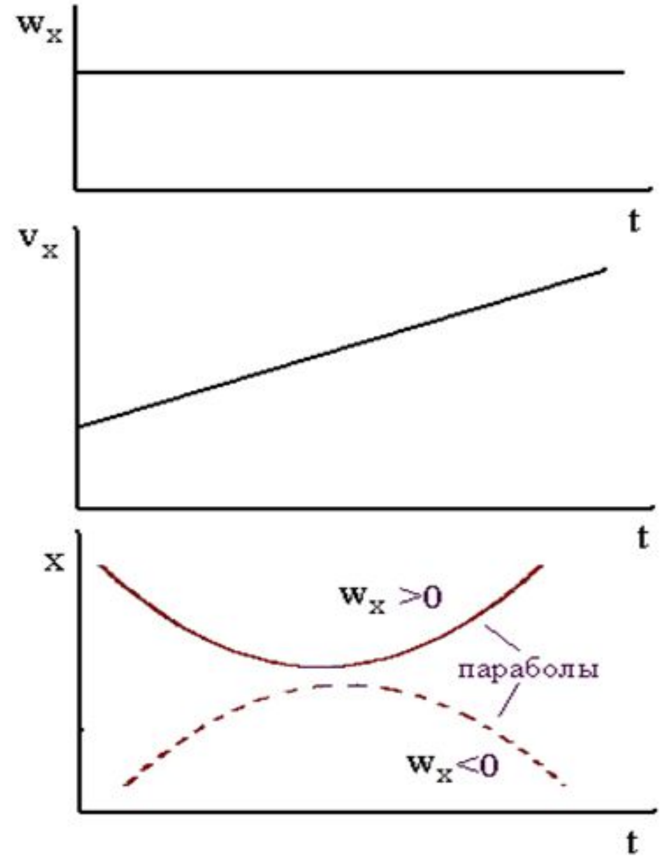
В последнем случае можно выделить равнопеременное движение, когда постоянно ускорение, или его модуль, или одна из компонент.

	Равномерное	Неравномерное
Прямолинейное	$\mathbf{v}$ = const; $\mathbf{w} = 0$; $\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{v}\, t$; $s = v\, t$	$\mathbf{w} \neq 0$; $w = w_\tau \neq 0$; При $\mathbf{w}$ = const $\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \mathbf{w}\, t$; $\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{v_0}\, t + ½\, \mathbf{w}\, t^2$
Криволинейное	v = const; $\mathbf{v} \neq$ const; $\mathbf{w_\tau} = 0$; $\mathbf{w} = \mathbf{w_n}$	$\mathbf{w_\tau} \neq 0$; $\mathbf{w_n} \neq 0$; $\mathbf{w} = \mathbf{w_\tau} + \mathbf{w_n}$; $\mathbf{v} \neq$ const

Частные случаи кинематики МТ (2)

Графики равномерного прямолинейного движения	Графики неравномерного прямолинейного движения

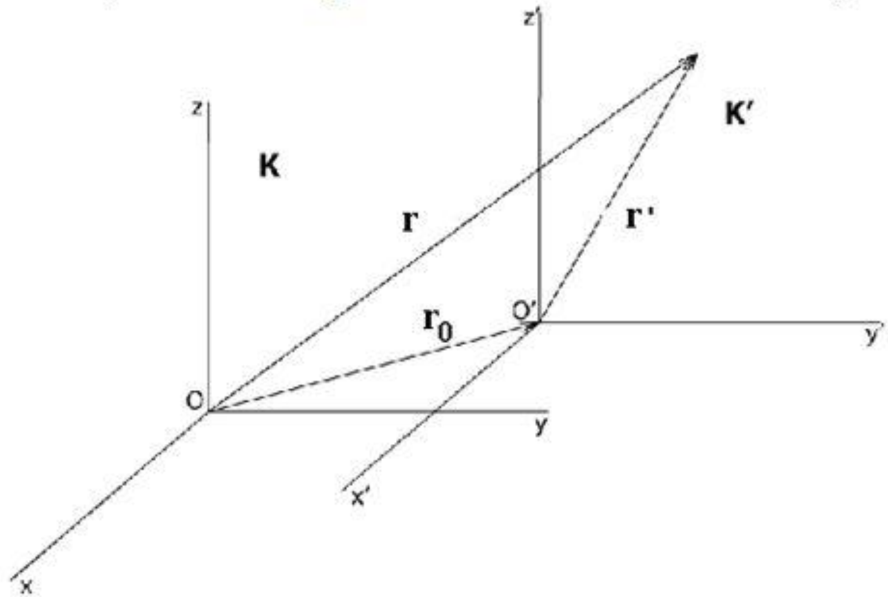




Преобразования Галилея, координаты

Выбор системы координат – произвольный (направления осей, тело отсчета).

Соотношения координат и скоростей МТ в разных системах координат (системах отсчета) - преобразование Галилея.



Две СО К и К′ с параллельными осями.

Отн. К начало координат К′ движется со скоростью **u**, а некая частица со скоростью **v**. Тогда координаты частицы в К′ выражаются через координаты в системе К:

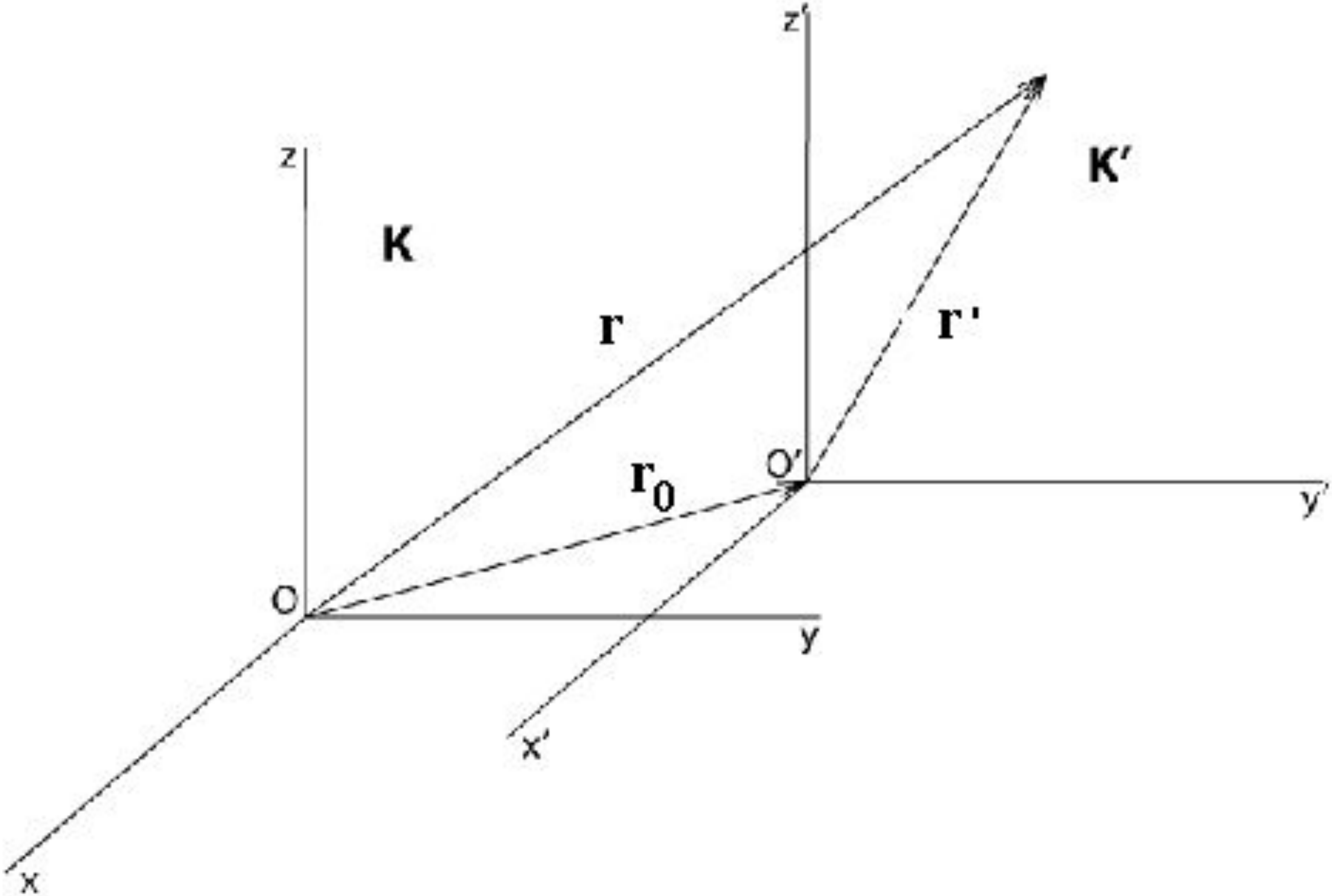
$$x' = x - x_0 - u_x t$$

$$y' = y - y_0 - u_y t$$

$$z' = z - z_0 - u_z t$$

В векторной форме: $\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_o - \vec{u}\,t.$

$\vec{r}_o$ – радиус-вектор начала координат К′ при t = 0.



z
K
z′
K′
r
r′
r
0
O′
y′
O
y
x′
x

Преобразования Галилея, скорости

- Проекции скорости преобразуются по правилу:

$$v_x' = v_x - u_x$$

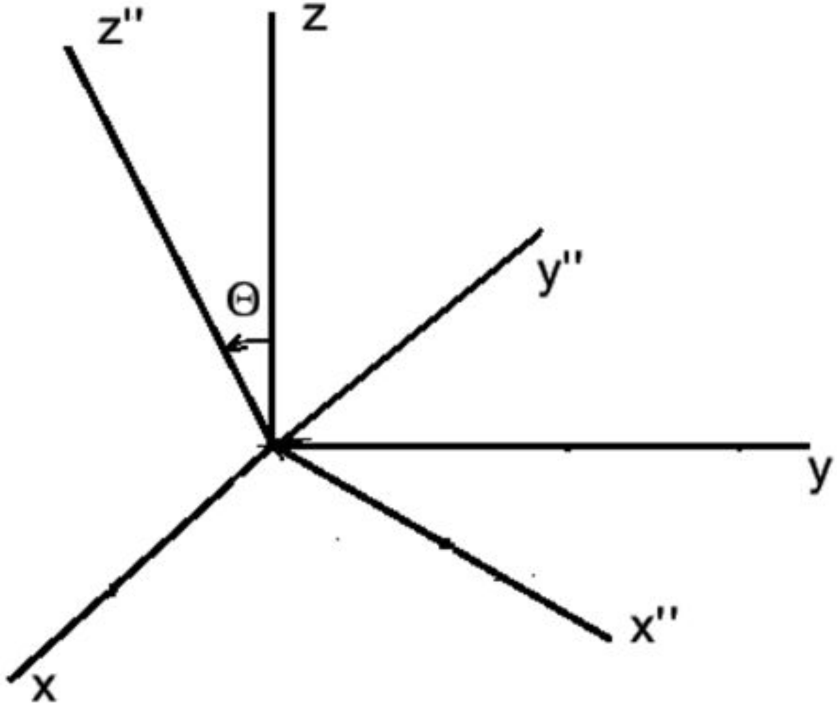
$$v_y' = v_y - u_y$$

$$v_z' = v_z - u_z$$

В векторной форме:

$$\vec{\boldsymbol{v}}' = \vec{\boldsymbol{v}} - \vec{\boldsymbol{u}}$$

Преобразования вращения (поворота)



Если оси $\nparallel$, то нужно сначала (или после) провести преобразование поворота координатных осей.

В повернутой К″ «дважды штрихованной», СО координаты задаются по правилу:

$$\overrightarrow{r''} = \hat{T}\vec{r}$$

$\hat{T}$ – тензор вращения (или матрица направляющих косинусов)

$$x'' = x\cos(x, x'') + y\cos(y, x'') + z\cos(z, x'')$$
$$y'' = x\cos(x, y'') + y\cos(y, y'') + z\cos(z, y'')$$
$$z'' = x\cos(x, z'') + y\cos(y, z'') + z\cos(z, z'')$$

Аргументы косинусов - углы между парами (их 9 штук) осей. На рисунке показан угол (z, z″).