



ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ИНФОРМАТИКИ

8 класс

Ключевые слова

- алгебра логики
- высказывание
- логическая операция
- конъюнкция
- дизъюнкция
- отрицание
- логическое выражение
- таблица истинности
- законы логики



Логика



Аристотель (384-322 до н.э.).
Основоположник формальной логики (понятие, суждение, умозаключение).



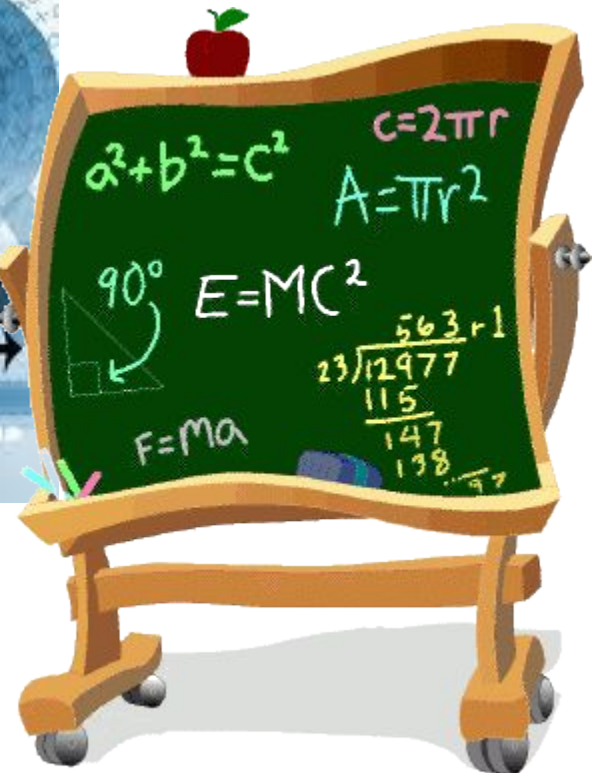
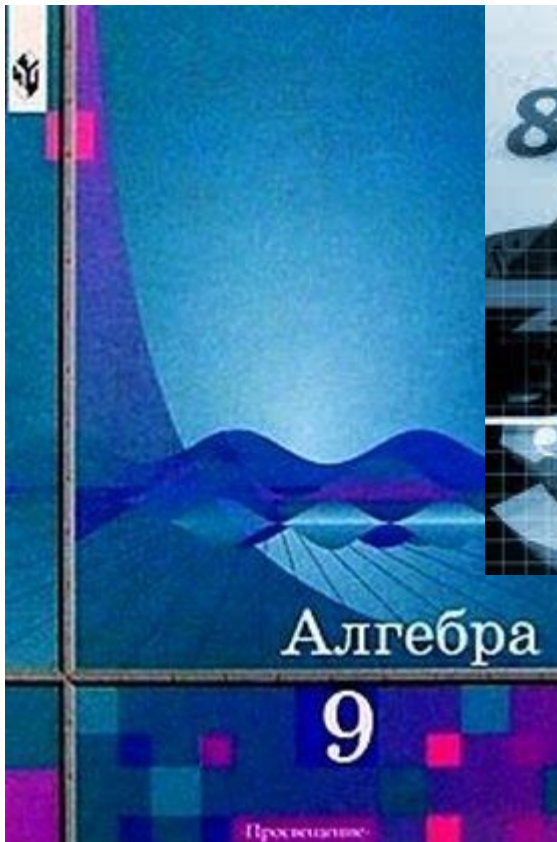
Джордж Буль (1815-1864). Создал новую область науки - Математическую логику (Булеву алгебру или Алгебру высказываний).



Клод Шеннон (1916-2001). Его исследования позволили применить алгебру логики в вычислительной технике

Алгебра

Алгебра - наука об общих операциях, аналогичных сложению и умножению, которые могут выполняться над разнообразными математическими объектами – числами, многочленами, векторами и др.



Высказывание

Высказывание - это предложение на любом языке, содержание которого можно однозначно определить как **истинное** или **ложное**.

В русском языке высказывания выражаются повествовательными предложениями:

*Земля вращается вокруг Солнца.
Москва - столица.*

Но не всякое повествовательное предложение является высказыванием:

Это высказывание ложное.

Побудительные и вопросительные предложения высказываниями не являются.

*Без стука не входите!
Откройте учебники.
Ты выучил стихотворение?*

Высказывание или нет?

- ✓ Зимой идет дождь.
- ✓ Снегири живут в Крыму.

Кто к нам пришел?

- ✓ У треугольника 5 сторон.

Как пройти в библиотеку?

Переведите число в десятичную систему.

Запишите домашнее задание

Алгебра логики

Алгебра логики определяет правила записи, вычисления значений, упрощения и преобразования высказываний.

В алгебре логики высказывания обозначают буквами и называют **логическими переменными**.

Если высказывание истинно, то значение соответствующей ему логической переменной обозначают единицей (**$A = 1$**), а если ложно - нулём (**$B = 0$**).

0 и **1** называются **логическими значениями**.

Простые и сложные высказывания

Высказывания бывают простые и сложные.

Высказывание называется **простым**, если никакая его часть сама не является высказыванием.

Сложные (составные) высказывания строятся из простых с помощью логических операций.

Название логической операции	Логическая связка
Конъюнкция	«и»; «а»; «но»; «хотя»
Дизъюнкция	«или»
Инверсия	«не»; «неверно, что»

Логические операции

Конъюнкция - логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум высказываниям новое высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны.

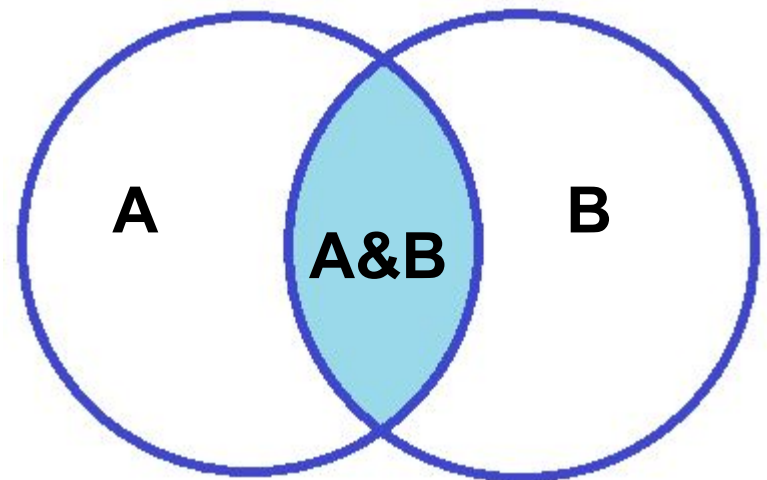
Другое название: **логическое умножение**.

Обозначения: \wedge , \times , $\&$, И.

Таблица истинности:

A	B	A&B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Графическое представление



Логические операции

Дизъюнкция - логическая операция, которая каждому двум высказываниям ставит в соответствие новое высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны.

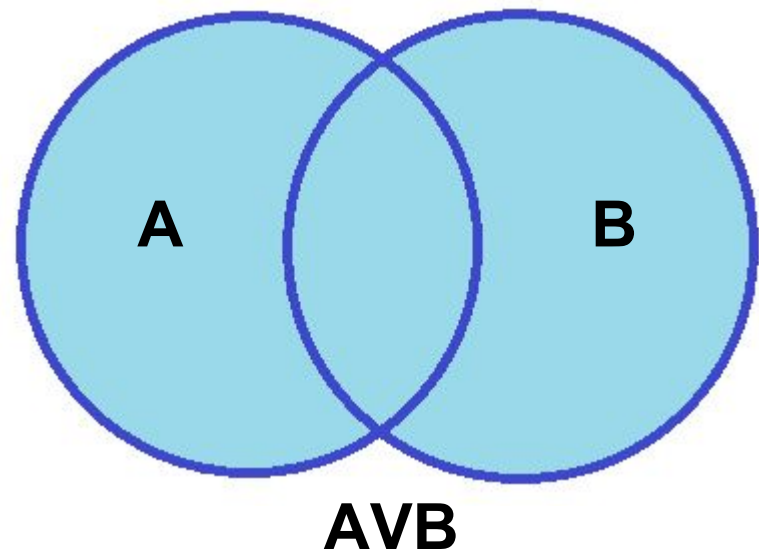
Другое название: **логическое сложение**.

Обозначения: **\vee , $|$, ИЛИ, $+$** .

Таблица истинности:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Графическое представление



Логические операции

Инверсия - логическая операция, которая каждому высказыванию ставит в соответствие новое высказывание, значение которого противоположно исходному.

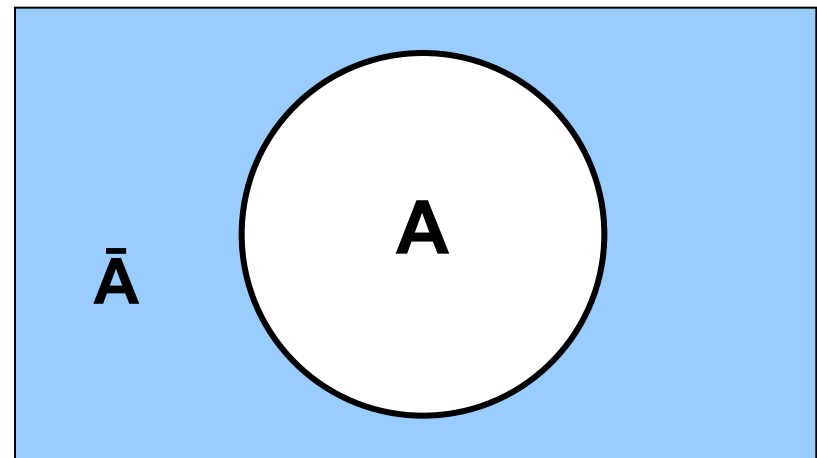
Другое название: **логическое отрицание**.

Обозначения: **НЕ**, \neg , $\bar{}$.

Таблица истинности:

A	\bar{A}
0	1
1	0

Графическое представление



Логические операции имеют следующий приоритет:
инверсия, конъюнкция, дизъюнкция.

Решаем задачу

Пусть A = «На Web-странице встречается слово "крейсер"», B = «На Web-странице встречается слово "линкор"».

В некотором сегменте сети Интернет 5000000 Web-страниц. В нём высказывание A истинно для 4800 страниц, высказывание B - для 4500 страниц, а высказывание AVB - для 7000 страниц.

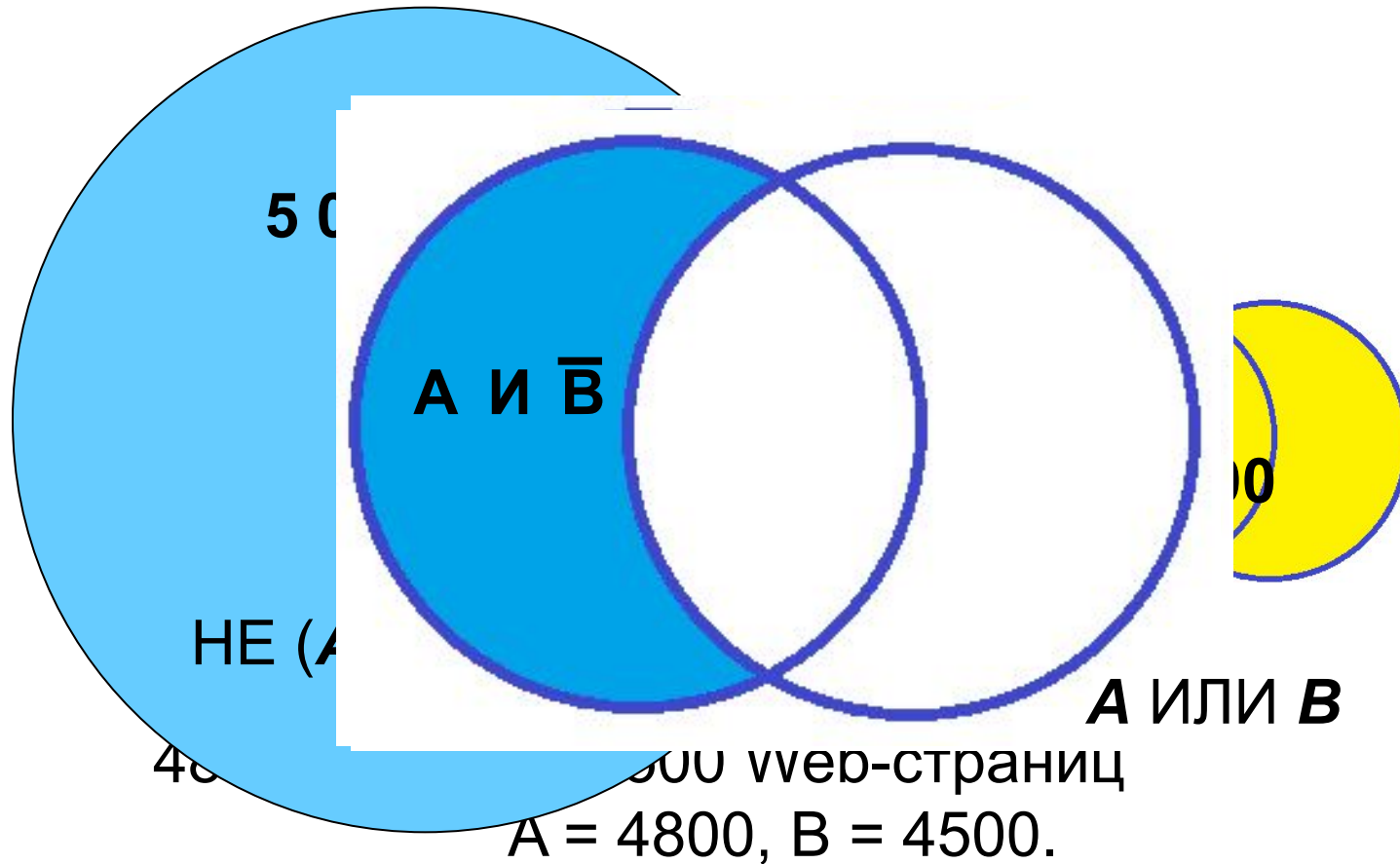
Для какого количества Web-страниц в этом случае будут истинны следующие выражения и высказывание?

а) **НЕ (A ИЛИ B)**;

б) **A & B**;

в) *На Web-странице встречается слово "крейсер" И НЕ встречается слово "линкор"*.

Представим условие задачи графически:



Сегмент Web-страниц
 На 2500 Web-страницах встречается слово "пинкор" НЕ (A ИЛИ B)
 И НЕ встречается слово "пинкор" 9300 = 7000 = 2300 Web-страниц A&B

Построение таблиц истинности для логических выражений

подсчитать n - число переменных в выражении

подсчитать общее число логических операций в выражении

установить последовательность выполнения логических операций

определить число столбцов в таблице

заполнить шапку таблицы, включив в неё переменные и операции

определить число строк в таблице без шапки: $m = 2^n$

выписать наборы входных переменных

провести заполнение таблицы по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной последовательностью

Пример построения таблицы ИСТИННОСТИ

$$A \vee A \& B$$

$$n = 2, m = 2^2 = 4.$$

Приоритет операций: $\&$, \vee

A	B	$A \& B$	$A \vee A \& B$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Свойства логических операций

Законы алгебры-логики

Закон исключения
третьего

$$A \& \bar{A} = 0$$

$$A \vee \bar{A} = 1$$

Закон повторения

$$A \& A = A$$

$$A \vee A = A$$

Законы операций
с 0 и 1

$$A \& 0 = 0; A \& 1 = A$$

$$A \vee 0 = A; A \vee 1 = 1$$

Законы общей
инверсии

$$\overline{A \& B} = \bar{A} \vee \bar{B}$$

$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \& \bar{B}$$

Доказательство закона

Распределительный закон для логического сложения:

$$A \vee (B \& C) = (A \vee B) \& (A \vee C).$$

A	B	C	B&C	$A \vee (B \& C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \& (A \vee C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Утверждение $(A \vee (B \& C)) \equiv ((A \vee B) \& (A \vee C))$ истинно для всех значений переменных. доказывает распределительный закон.

Решение логических задач

Задача. Коля, Вася и Серёжа гостили летом у бабушки. Однажды один из мальчиков нечаянно разбил любимую бабушкину вазу.

На вопрос, кто разбил вазу, они дали такие ответы:

Серёжа: 1) Я не разбивал. 2) Вася не разбивал.

Вася: 3) Серёжа не разбивал. 4) Вазу разбил Коля.

Коля: 5) Я не разбивал. 6) Вазу разбил Серёжа.

Бабушка знала, что один из её внуков (правдивый), оба раза сказал правду; второй (шутник) оба раза сказал неправду; третий (хитрец) один раз сказал правду, а другой раз - неправду. Назовите имена правдивого, шутника и хитреца.

Кто из внуков разбил вазу?



Решение. Пусть K = «Коля разбил вазу»,
 V = «Вася разбил вазу»,
 C = «Серёжа разбил вазу».

Представим в таблице истинности высказывания каждого мальчика. Так как ваза разбита одним внуком, составим не всю таблицу, а только её фрагмент, содержащий наборы входных переменных: 001, 010, 100.

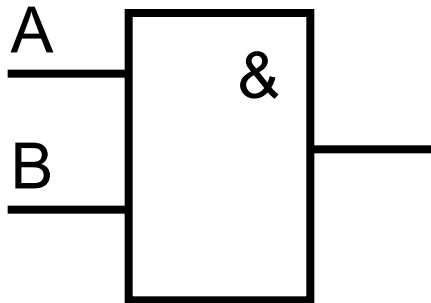
K	V	C	Утверждение Серёжи		Утверждение Васи		Утверждение Коли	
			\overline{C}	\overline{V}	\overline{C}	K	\overline{K}	C
0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0

Исходя из того, что знает о внуках бабушка, следует искать в таблице строки, содержащие в каком-либо порядке три комбинации значений: 00, 11, 01 (или 10). Это первая строка.

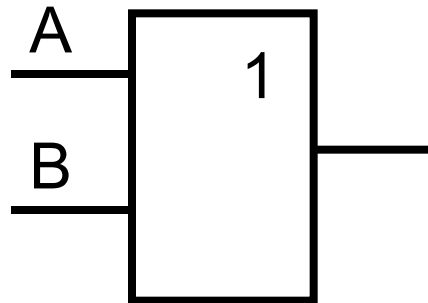
Вазу разбил Серёжа, он - хитрец. Шутником оказался Вася. Имя правдивого внука - Коля.

Логические элементы

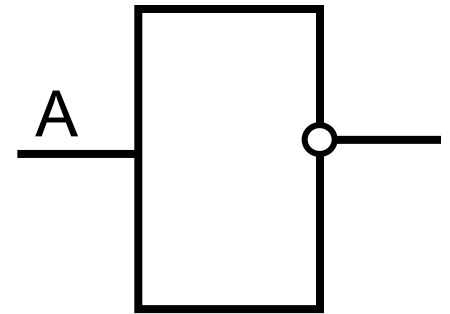
Логический элемент – устройство, которое после обработки двоичных сигналов выдаёт значение одной из логических операций.



И (конъюнктор)



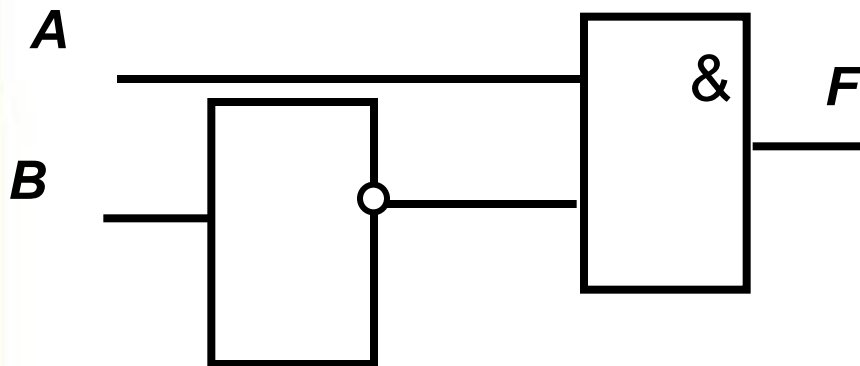
ИЛИ (дизъюнктор)



НЕ (инвертор)

Анализ электронной схемы

Решение. Все возможные комбинации сигналов на входах **A** и **B** в таблице будут выходы истинности. Проследим преобразование каждой пары сигналов при прохождении их через логические элементы и запишем полученный результат в таблицу. Заполненная таблица истинности полностью описывает рассматриваемую электронную схему.



A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

В инвертор поступает сигнал от входа **B**.

В конъюнктор поступают сигналы от входа **A** и от инвертора. Таким образом, $F = A \& \bar{B}$.

Самое главное

Высказывание — это предложение на любом языке, содержание которого можно однозначно определить как истинное или ложное.

Ос выс	A	\bar{A}	Лог	A	B	A&B	A∨B
Н	0	1	«и», «а», «но», «хотя»	0	0	0	0
Операции	1	0	«или»	0	1	0	1
Инверсия			«не»	1	0	0	1
Конъюнкция			«и», «а», «но», «хотя»	1	1	1	1
Дисъюнкция			«или»				

При вычислении логических выражений сначала выполняются действия в скобках. Приоритет выполнения логических операций: $\bar{}$, &, ∨.



Вопросы и задания

В следующих высказываниях выделите простые высказывания, как бы они должны выглядеть на выходе электронной логической цепи. Объясните, почему следующие предложения не являются высказываниями.

Зачем идти к компьютеру, если на нем нет ни одного из необходимых элементов?
Пусть A = «Ане нравятся уроки математики», а B = «Ане нравятся уроки физики». Какими логическими операциями можно выразить высказывание: «Ане нравятся уроки математики и физики»? Выразите следующие высказывания логическими формулами, где сидит фазан, фазан сидит на обыкновенном языке.

- 3) Число x не превосходит единицы.
- 2) Зимой дети катаются на коньках или на лыжах.
- 4) В натуральном числе оканчивается цифрой 0, не являясь нулем.

1) $A \& B$;	4) $A \vee B$;	7) $\neg(A \& B)$;
2) $\overline{A} \& B$;	5) $A \vee \overline{B}$;	8) $\overline{(A \vee B)}$;
3) $A \& \overline{B}$;	6) $\overline{A \vee B}$;	9) $(A \& B)$.

Красной
числа

- 5) Эта тема скучна.
- 6) Коля решил все задания контрольной работы, космоса кажется всякому Дарвин самым популярным деревом.
- 7) Во всякой школе некоторые ученики интересуются математикой.
- 8) В уроке математики старшеклассники отвечали на вопросы учителя, а капитан команды не жил в самостоятельную работу.

Вопросы и задания

Алёша, Боря и Гриша нашли в земле старинный сосуд. Рассматривая удивительную находку, каждый высказал по два предположения: каждый из подозреваемых сделал два заявления:

1) **Алёша:** «Я не делал этого, Браун и Смит сделали это в V веке».
Джон: «Браун не виновен. Смит сделал это».

2) **Боря:** «Этот сосуд финикийский и изготовлен в III веке».
Браун: «Я не делал этого. Джон не делал этого».

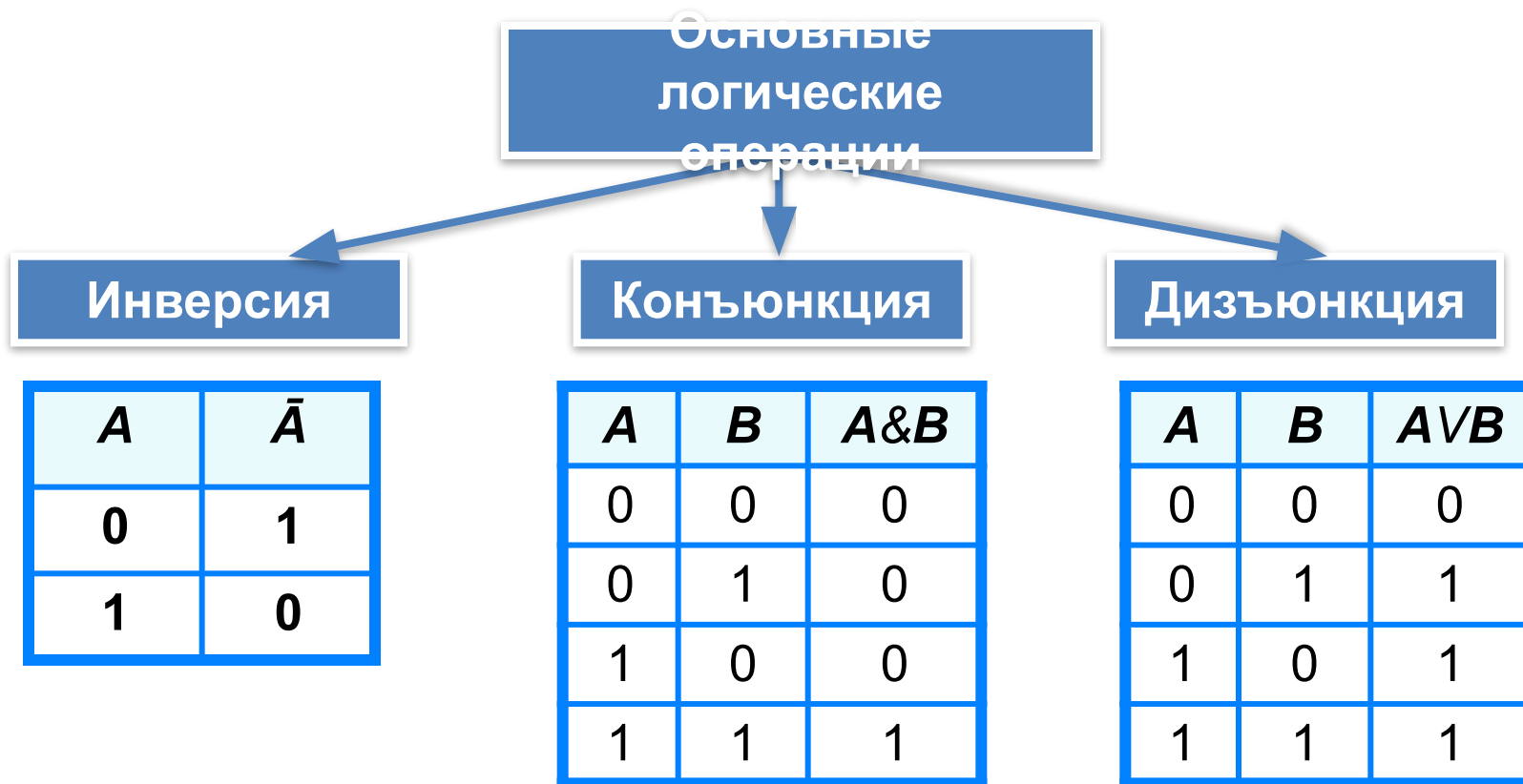
Суд установил, что один из них дважды солгал, другой дважды сказал правду, третий один раз солгал, один раз сказал правду.

3) **Гриша:** «Это сосуд не греческий и изготовлен в IV веке».

Учитель истории сказал ребятам, что каждый из них прав только в одном из двух предположений. Где и в каком веке изготовлен сосуд?

Опорный конспект

Высказывание – это предложение на любом языке, содержание которого можно однозначно определить как истинное или ложное.



Приоритет выполнения логических операций: \neg , $\&$, \vee .

Электронные образовательные ресурсы

1. <http://school-collection.edu.ru/catalog/res/9e997f40-f285-4369-aa7d-88b892beca45/?interface=catalog&class=51&subject=19> – Элементарные логические операции