

В ящике находится много белых шаров (более 100) одного и того же веса и радиуса. Из него вынули 100 шаров и вместо них в ящик насыпали 100 чёрных шаров того же веса и радиуса. После тщательного перемешивания всех шаров снова вынули из него 40 шаров, среди которых чёрных оказалось 5. Сколько примерно было в ящике белых шаров первоначально?

Случайные величины

Таблицы распределения

Понятие случайной величины считается, чуть ли не основным в теории вероятностей, поэтому обойти эту тему даже в элементарном курсе не представляется возможным, хотя математический аппарат, привлекаемый к изучению случайных величин, предъявляет достаточно высокие требования к уровню абстрактного мышления учащихся.



Брошены две игральные кости. Игроки делают ставки на выпавшую сумму очков на двух костях. Есть ли сумма, на которую выгодно делать ставку?

Брошены две игральные кости. Игроки делают ставки на выпавшую сумму очков на двух костях. Есть ли сумма, на которую выгодно делать ставку?

1-я кость	2-я кость					
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Брошены две игральные кости. Игроки делают ставки на выпавшую сумму очков на двух костях. Есть ли сумма, на которую выгодно делать ставку?

1-я кость	2-я кость					
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$m_2 = m_{12} = 1, m_3 = m_{11} = 2, m_4 = m_{10} = 3,$$

$$m_5 = m_9 = 4, m_6 = m_8 = 5, m_7 = 6.$$

Сумма очков	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятность $\left(P = \frac{m}{n}\right)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Определение случайной величины

- Случайная величина – это величина, принимающая в результате испытания одно из возможных значений, при этом появление того или иного значения является случайным событием.
- Различают *дискретные* и *непрерывные* случайные величины.

В задаче появляющаяся при бросании костей сумма очков — *случайная величина*. Обозначим её X . Тогда $X_1 = 2, X_2 = 3, \dots, X_{10} = 11, X_{11} = 12$ — значения случайной величины X . Соответствующие каждому значению X вероятности их появления $P_1, P_2, \dots, P_{10}, P_{11}$ указаны в таблице:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

С помощью этой таблицы легко увидеть, например, какие значения величина X принимает с одинаковыми вероятностями; какое значение величины X появляется с большей вероятностью и т. д.

Такие таблицы называют *таблицами распределения значений случайной величины по их вероятностям*. Очевидно, что они составлены после *теоретического* расчёта вероятностей событий.

Пример

Случайная величина X — оценка за контрольную работу учащихся IX класса — может принимать значения $X_1 = 1$, $X_2 = 2$, $X_3 = 3$, $X_4 = 4$, $X_5 = 5$. Распределение величины X по частотам (или относительным частотам) можно записать после подсчёта числа случаев появления каждого её значения.

Задача После проверки контрольной работы в IX классе учитель сделал подсчёт числа случаев получения каждой из оценок и составил таблицу распределения значений величины X (оценка учащегося) по частотам M .

X	1	2	3	4	5
Подсчёт случаев			++++ ++++ ++++	++++ 	
M	1	3	15	9	3

Составить таблицу распределения значений величины X по относительным частотам.

X	1	2	3	4	5
W					

Когда нужно находить сумму всех значений некоторой величины, используют знак \sum , введённый Л. Эйлером. Например, если частота M принимает значения M_1, M_2, \dots, M_k , то будем использовать обозначение:

$$M_1 + M_2 + \dots + M_k = \sum M.$$

Зная, что сумма всех частот случайной величины равна числу испытаний N , можно записать

$$\sum M = N.$$

Для любой случайной величины сумма относительных частот всех её значений равна 1.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sum W &= \sum \left(\frac{M}{N} \right) = \frac{M_1}{N} + \frac{M_2}{N} + \dots + \frac{M_k}{N} = \\ &= \frac{M_1 + M_2 + \dots + M_k}{N} = \frac{\sum M}{N} = \frac{N}{N} = 1. \quad \circ \end{aligned}$$

Задача

В таблице записаны размеры обуви 20 девочек IX класса:

34	35	35	35	36	36	36	36	37	37
37	37	37	37	38	38	38	39	39	40

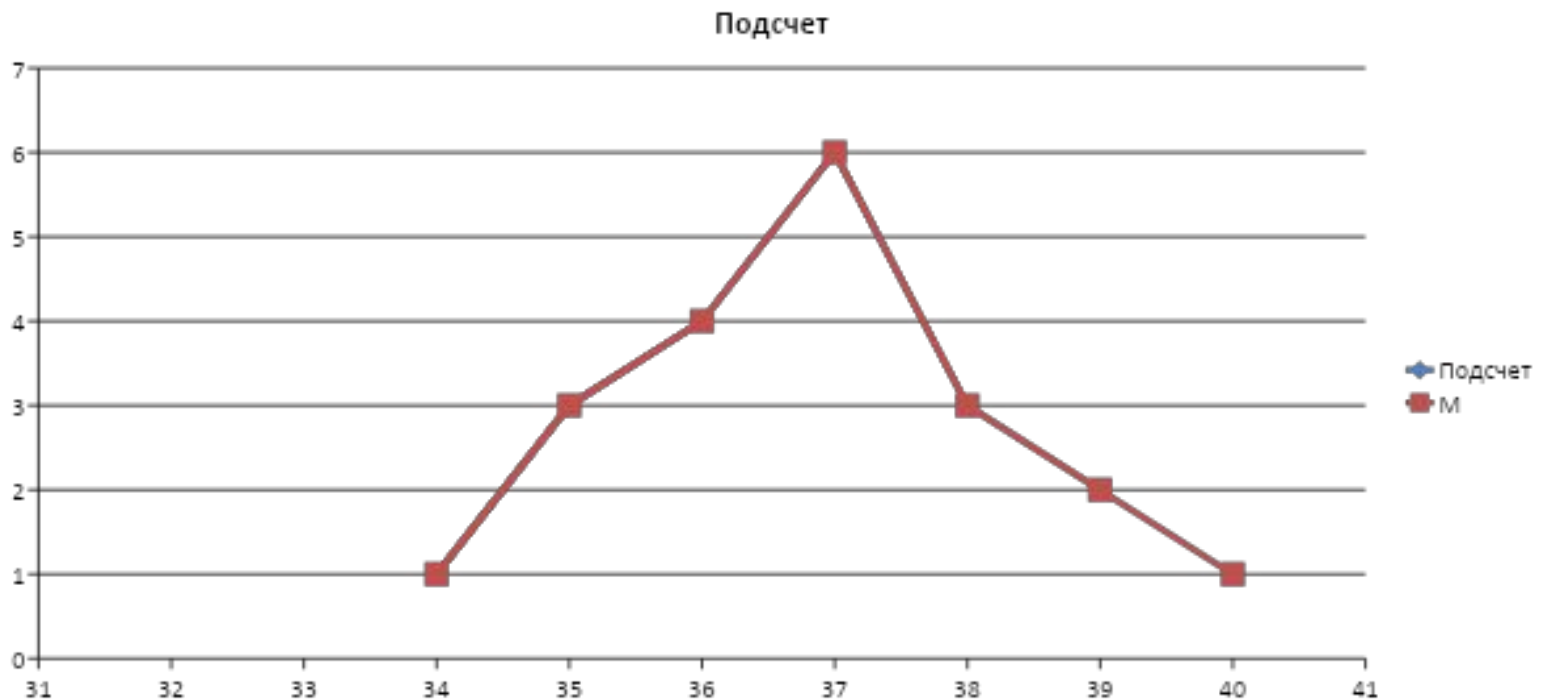
На основании этих данных составить таблицы распределения по частотам (M) и относительным частотам (W) значений случайной величины X — размеров обуви девочек IX класса.

X		
Подсчёт случаев		
M		
W		

Полигоны частот

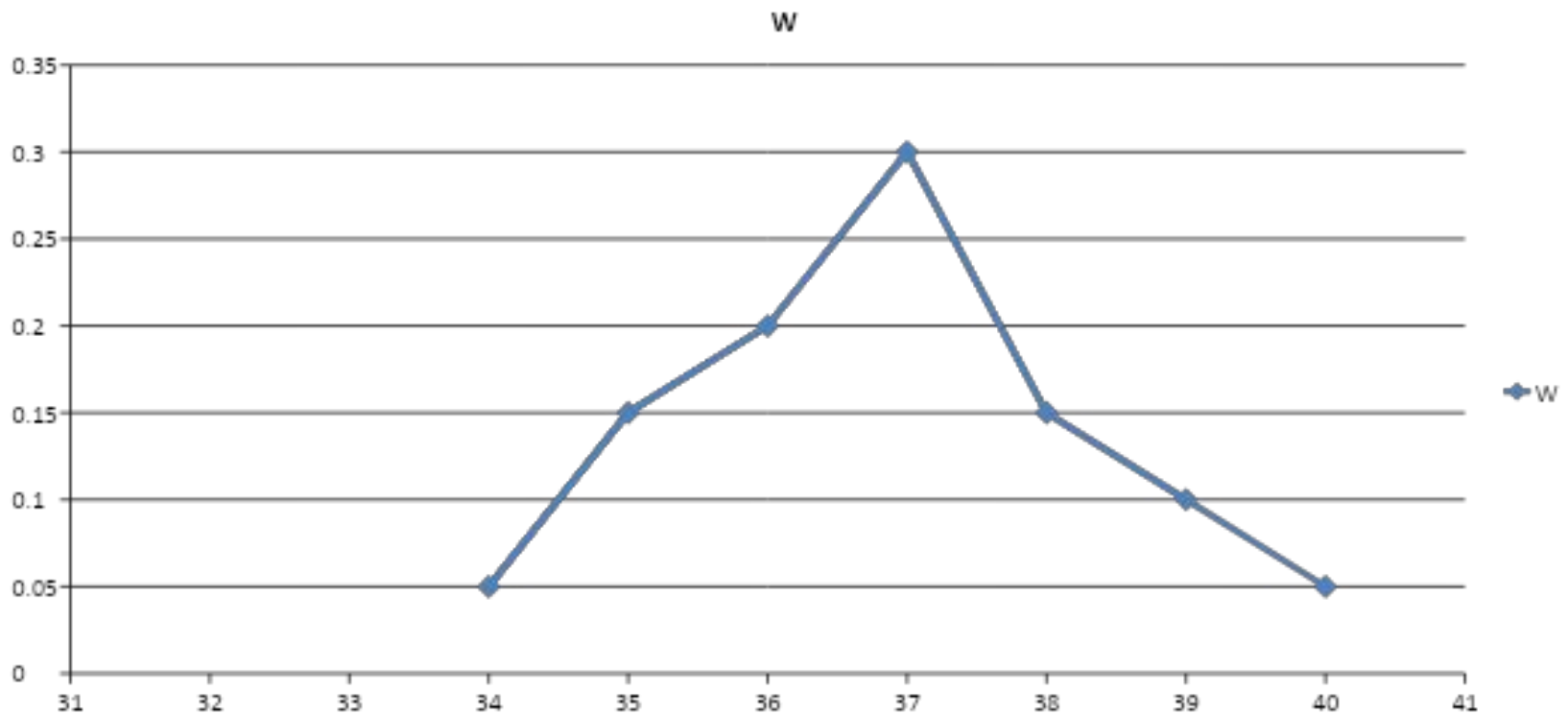
Распределение случайных величин можно задавать и демонстрировать графически.

X	34	35	36	37	38	39	40
M	1	3	4	6	3	2	1

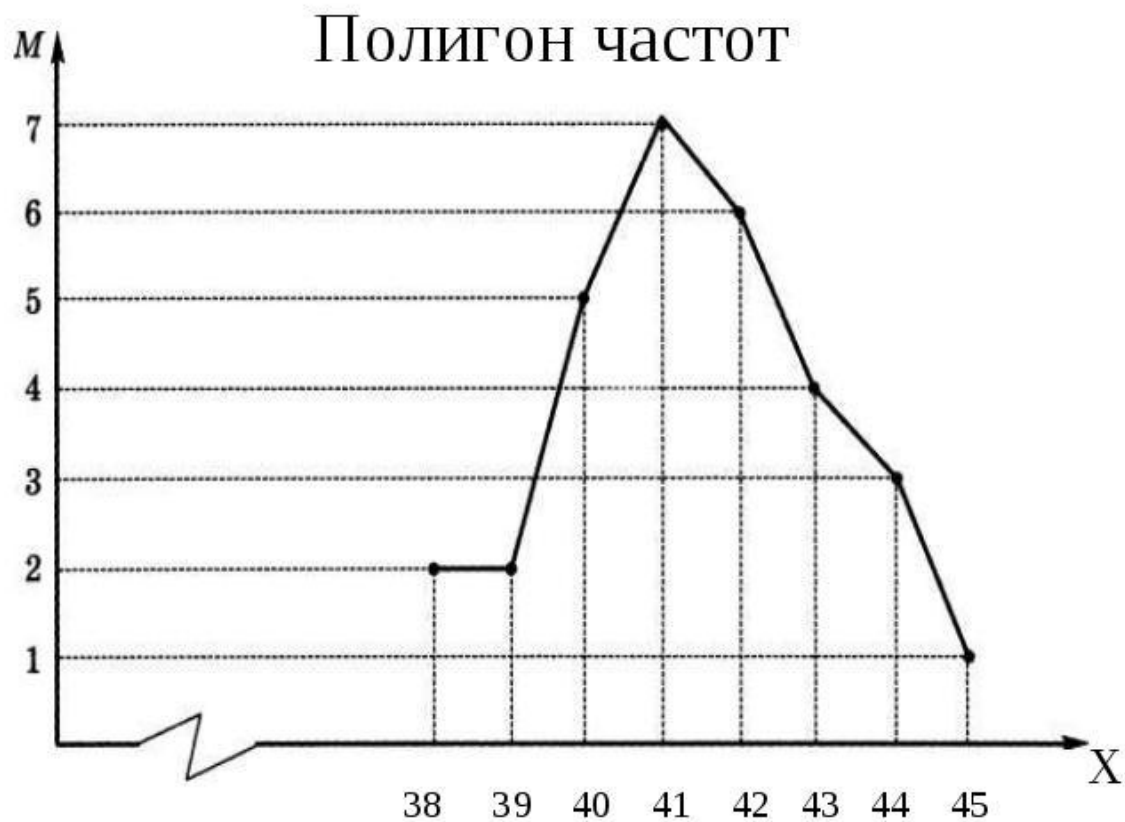


Можно задавать графически распределение по относительным частотам

X	34	35	36	37	38	39	40
W	0,05	0,15	0,2	0,3	0,15	0,1	0,05



Полученную ломаную линию называют ПОЛИГОНОМ ЧАСТОТ

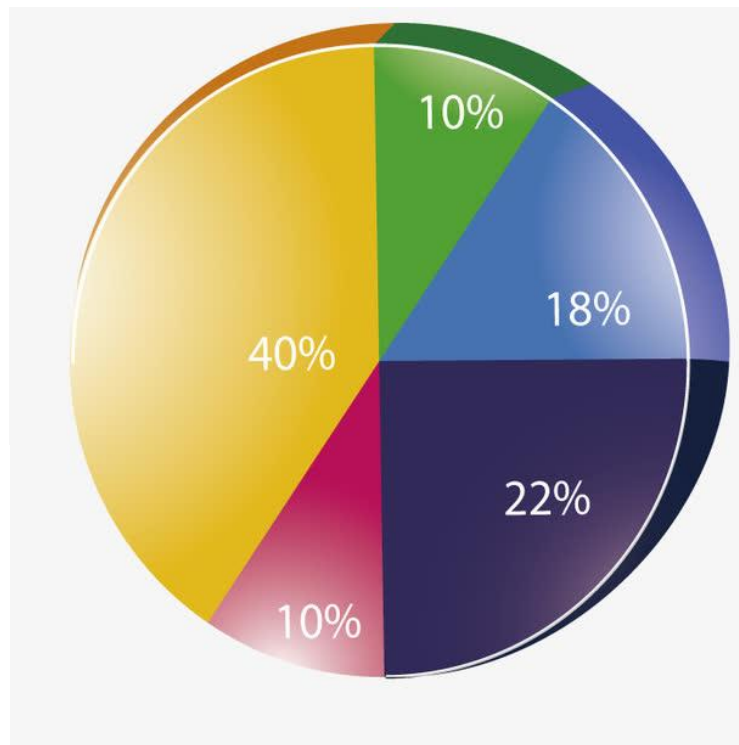
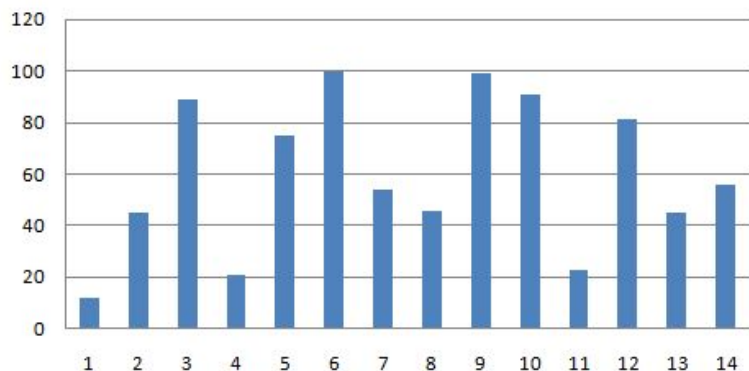


Полигон частот

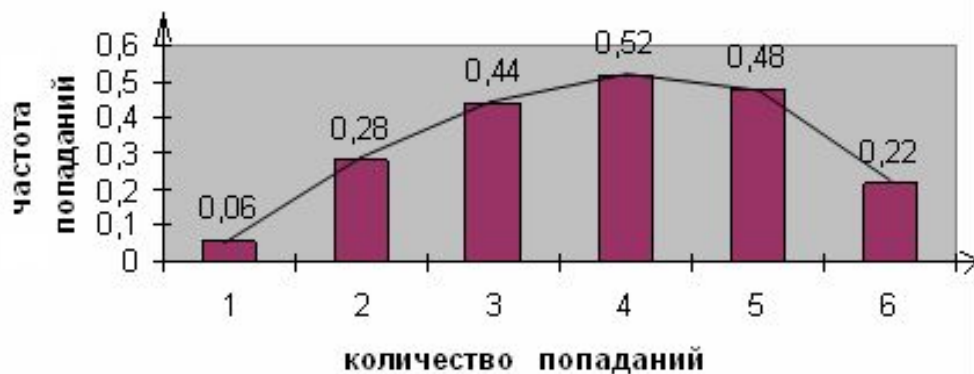


Кроме полиглона частот, используется наглядное представление в виде столбиковой (гистограммы) или круговой диаграммы

Столбиковая диаграмма. Пример



гистограмма и полигон частот



На основании данных таблицы представить в виде столбчатой и круговой диаграмм распределение значений случайной величины X :

1)

X	1	2	3	4
W	0,1	0,3	0,4	0,2

Построить столбчатую и круговую диаграммы относительных частот распределения значений величины X .

Построить полигон частот и полигон относительных частот значений случайной величины X , распределение которой представлено в таблице:

X	11	12	13	14	15
M	3	1	5	6	5

На основании данных таблицы представить в виде столбчатой и круговой диаграмм распределение значений случайной величины X :

2)

X	1	2	3	4	5
W	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

Построить столбчатую и круговую диаграммы относительных частот распределения значений величины X .

Построить полигон частот и полигон относительных частот значений случайной величины X , распределение которой представлено в таблице:

X	23	24	25	26	27	28
M	6	5	2	3	1	3

Рассматривая произвольную страницу текста на русском языке из произведения русского писателя, составить таблицы распределения по частотам и по относительным частотам всех букв русского алфавита.