

Объём наклонной призмы

Сегодня на уроке:

- ✓ **Формула для вычисления объёма наклонной призмы**

Основная формула для
вычисления объёма тел:

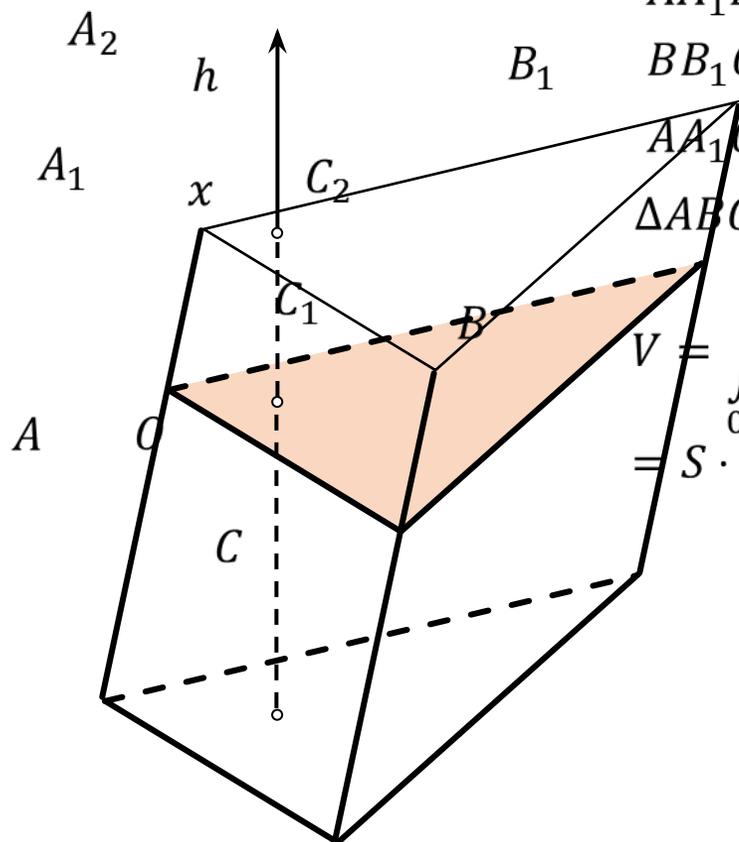
$$V = \int_a^b S(x) dx$$

Объём прямой призмы
равен произведению
площади основания на
высоту.

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h$$

Теорема. Объём наклонной призмы равен произведению площади основания на высоту.

Доказательство:



$$S_{\Delta ABC} = S \qquad V = \int_a^b S(x) dx$$

$$S(x) = S_{\Delta A_1 B_1 C_1}$$

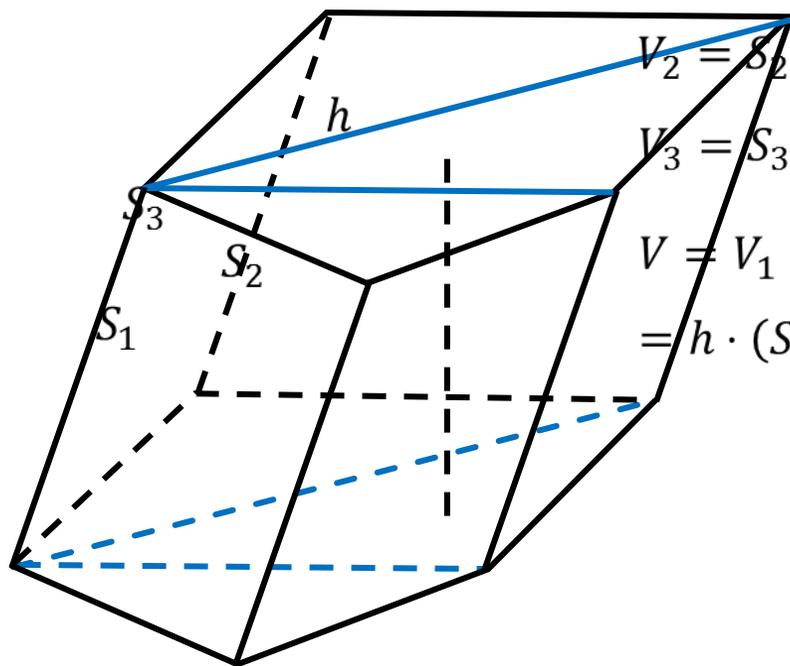
$AA_1 B_1 B$ – параллелограмм $\Rightarrow AB \parallel A_1 B_1$
 $BB_1 C_1 C$ – параллелограмм $\Rightarrow BC \parallel B_1 C_1$
 $AA_1 C_1 C$ – параллелограмм $\Rightarrow AC \parallel A_1 C_1, AC = A_1 C_1$
 $\Delta ABC = \Delta A_1 B_1 C_1 \Rightarrow S_{\Delta ABC} = S_{\Delta A_1 B_1 C_1} \Leftrightarrow S = S(x)$

$$V = \int_0^h S(x) dx = \int_0^h S dx = S \int_0^h dx = S \cdot x \Big|_0^h =$$

$$= S \cdot (h - 0) = S \cdot h$$

Теорема. Объём наклонной призмы равен произведению площади основания на высоту.

Доказательство:



$$h_{\text{призмы}} = h$$

$$S_{\text{осн}} = S$$

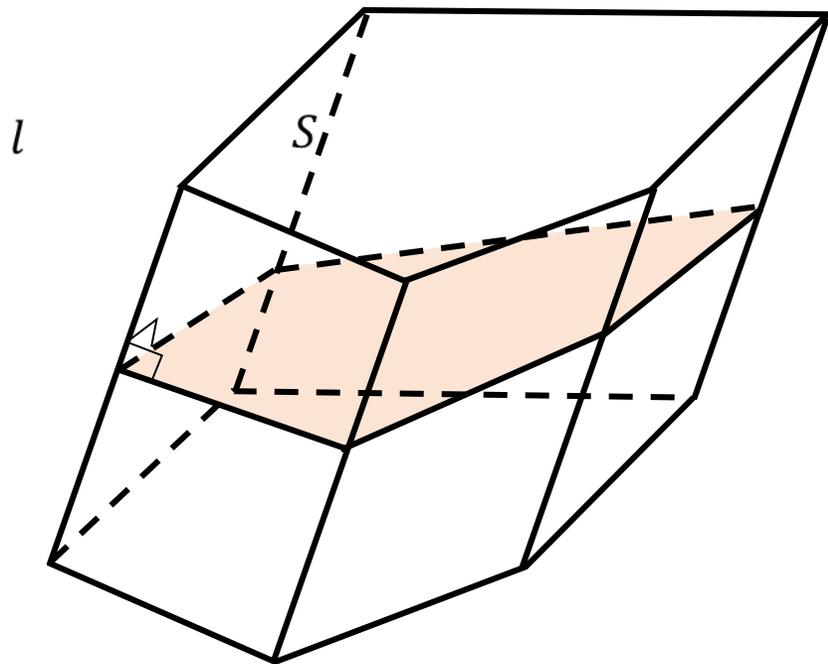
$$V_1 = S_1 \cdot h$$

$$V_2 = S_2 \cdot h$$

$$V_3 = S_3 \cdot h$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = S_1 \cdot h + S_2 \cdot h + S_3 \cdot h = \\ = h \cdot (S_1 + S_2 + S_3) = h \cdot S$$

Объём наклонной призмы равен произведению длины бокового ребра на площадь перпендикулярного ему сечения.



$$V = S_{\text{сеч}} \cdot l$$

Задача. Найти объем наклонной призмы, у которой основанием является треугольник со сторонами 10 см, 10 см, 12 см, а боковое ребро, равное 8 см, составляет с плоскостью основания угол в 60° .

Решение: $(p - b)(p - c)$

$$V = S \cdot h$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$p = \frac{10+10+12}{2} = 16 \text{ (см)}$$

$$S = \sqrt{16(16-10)(16-10)(16-12)} = 48 \text{ (см}^2\text{)}$$

$\triangle AA_1H$ – прямоугольный $\Rightarrow \angle AA_1H = 30^\circ$

$$AH = \frac{AA_1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ (см)}$$

$$A_1H = \sqrt{AA_1^2 - AH^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3} \text{ (см)}$$

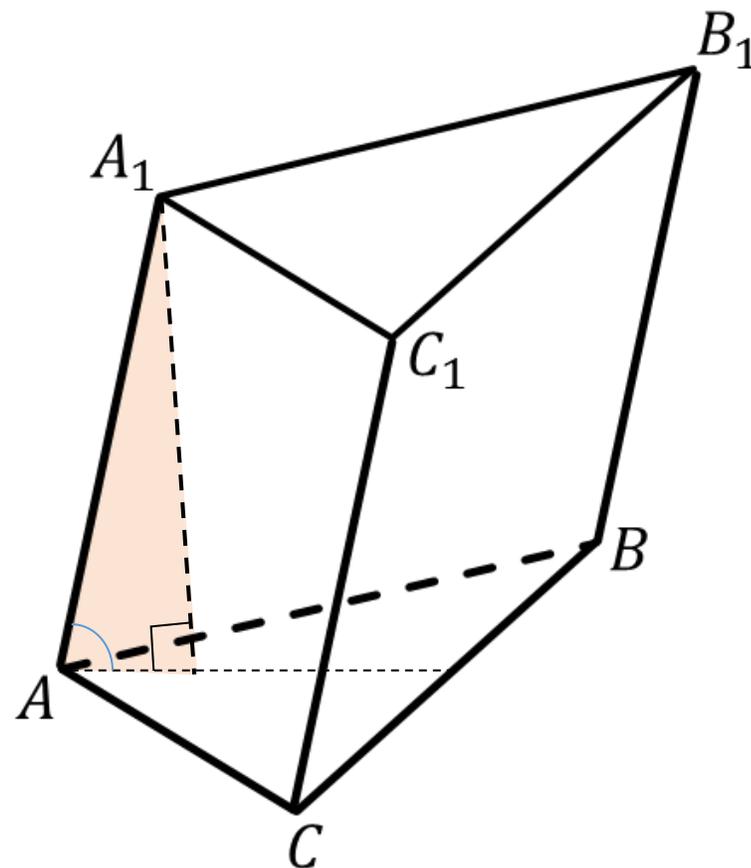
$$V = 48 \cdot 4\sqrt{3} = 192\sqrt{3} \text{ (см}^3\text{)}$$

Ответ: $192\sqrt{3} \text{ см}^3$



8 см
 60°
H
10 см

12 см
10 см



Задача. Найти объём наклонной призмы, основанием которой является параллелограмм $ABCD$. Сторона $AB = 3$ см, сторона $AD = 5$ см, $\angle A = 45^\circ$. Высота призмы равна 8 см.

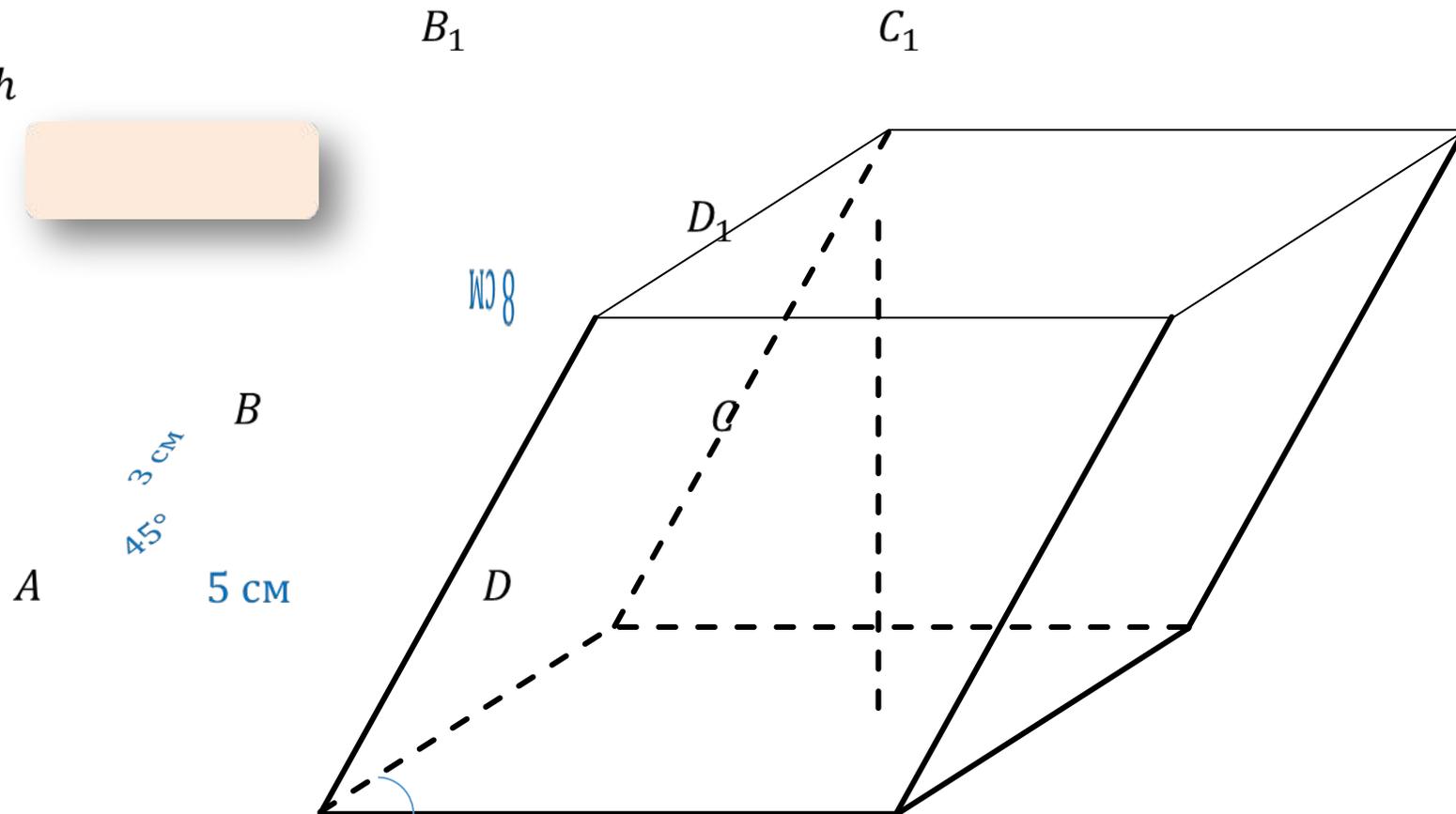
Решение: $S = AB \cdot AD \cdot \sin \angle A$

$$S = 3 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{15\sqrt{2}}{2} \text{ (см}^2\text{)}$$

$$V = \frac{15\sqrt{2}}{2} \cdot 8 = 60\sqrt{2} \text{ (см}^3\text{)}$$

Ответ: $60\sqrt{2}$ см³

$$V = S \cdot h$$



Задача. Найти объем наклонной треугольной призмы, если расстояния между ее боковыми ребрами равны 37 см, 13 см и 30 см, а площадь боковой поверхности равна 480 см^2 .

$$V = S_{\text{сеч}} \cdot l \quad S_{\text{бок}} = P_{\text{сеч}} \cdot l$$

Решение:

$$P_{\text{сеч}} = 37 + 13 + 30 = 80 \text{ (см)}$$

$$l = \frac{S_{\text{бок}}}{P_{\text{сеч}}} = \frac{480}{80} = 6 \text{ (см)}$$

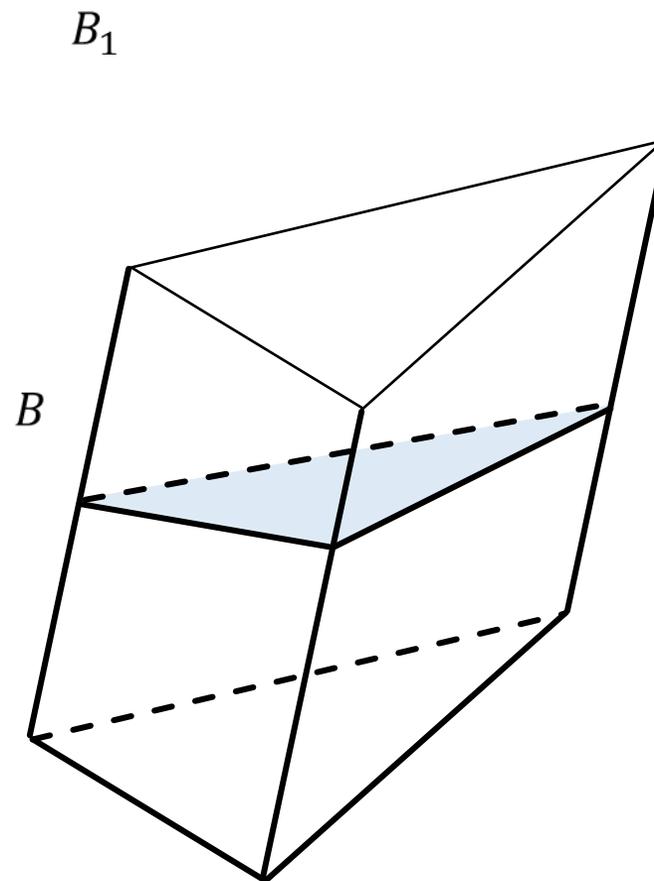
$$S_{\text{сеч}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{P_{\text{сеч}}}{2} = \frac{80}{2} = 40 \text{ (см)}$$

$$S_{\text{сеч}} = \sqrt{40(40-37)(40-13)(40-30)} = 180 \text{ (см}^2\text{)}$$

$$V = 180 \cdot 6 = 1080 \text{ (см}^3\text{)}$$

Ответ: 1080 см^3



Объём наклонной призмы

Задача. Найти объём наклонной призмы, у которой основанием является треугольник со сторонами 10 см, 10 см, 12 см, а боковое ребро, равное 8 см, составляет с плоскостью основания угол в 60° .

Решение:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$V = S \cdot h$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$p = \frac{10+10+12}{2} = 16 \text{ (см)}$$

$$S = \sqrt{16(16-10)(16-10)(16-12)} = 48 \text{ (см}^2\text{)}$$

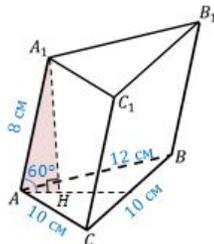
$\triangle AA_1H$ – прямоугольный $\Rightarrow \angle AA_1H = 30^\circ$

$$AH = \frac{AA_1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ (см)}$$

$$A_1H = \sqrt{AA_1^2 - AH^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3} \text{ (см)}$$

$$V = 48 \cdot 4\sqrt{3} = 192\sqrt{3} \text{ (см}^3\text{)}$$

Ответ: $192\sqrt{3} \text{ см}^3$



VIDEOUROKI.NET

Задача. Найти объём наклонной призмы, основанием которой является параллелограмм $ABCD$. Сторона $AB = 3$ см, сторона $AD = 5$ см, $\angle A = 45^\circ$. Высота призмы равна 8 см.

Решение:

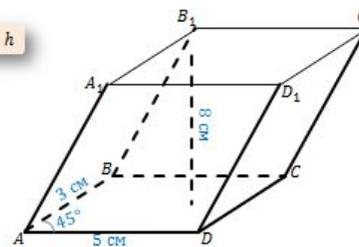
$$S = AB \cdot AD \cdot \sin \angle A$$

$$V = S \cdot h$$

$$S = 3 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{15\sqrt{2}}{2} \text{ (см}^2\text{)}$$

$$V = \frac{15\sqrt{2}}{2} \cdot 8 = 60\sqrt{2} \text{ (см}^3\text{)}$$

Ответ: $60\sqrt{2} \text{ см}^3$



VIDEOUROKI.NET

Задача. Найти объём наклонной треугольной призмы, если расстояния между ее боковыми ребрами равны 37 см, 13 см и 30 см, а площадь боковой поверхности равна 480 см^2 .

Решение:

$$V = S_{\text{сеч}} \cdot l \quad S_{\text{бок}} = P_{\text{сеч}} \cdot l$$

$$P_{\text{сеч}} = 37 + 13 + 30 = 80 \text{ (см)}$$

$$l = \frac{S_{\text{бок}}}{P_{\text{сеч}}} = \frac{480}{80} = 6 \text{ (см)}$$

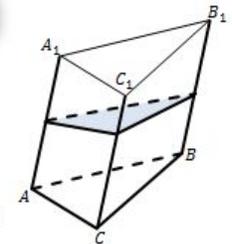
$$S_{\text{сеч}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{P_{\text{сеч}}}{2} = \frac{80}{2} = 40 \text{ (см)}$$

$$S_{\text{сеч}} = \sqrt{40(40-37)(40-13)(40-30)} = 180 \text{ (см}^2\text{)}$$

$$V = 180 \cdot 6 = 1080 \text{ (см}^3\text{)}$$

Ответ: 1080 см^3



VIDEOUROKI.NET