Секрет обучения заключается в уважении к ученику (Ральф Эмерсон).

Линейная алгебра

Лекция 4

Агаев Рафиг Пашаевич

(доктор физико-математических наук)

План лекции 4

Решение системы линейных уравнений.

Метод Гаусса

Система линейных уравнений

- Рассмотрим систему линейных уравнений (СЛУ)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \qquad (1)$$

Возможные варианты:

1) Система не имеет ни одного решения. В этом случае систему называют несовместной. Например,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases}$$

2) Если система обладает решениями, то она называется совместной.

2.1) Совместная система называется определенной, если она обладает единственным решением. Например,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

2.2) Совместная система называется неопределенной, если она имеет бесконечно много решений. Например,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 6. \end{cases}$$

Система линейных уравнений

- Систему (1) запишем в матричной форме

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad (1')$$

где $A = \left[a_{ij}\right]_{s\times n}$ - матрица коэффициентов неизвестных системы (1).

Элементы вектора **b** называют свободными членами (правой частью) системы (1).

Пусть $\tilde{A}$ - расширенная матрица всей системы:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} \cdots & a_{sn} & b_s \end{bmatrix}.$$

Лемма 1. Или rank A= rank $\tilde{A}$, или же 1+rank A= rank $\tilde{A}$.

Доказательство. Напомним, что ранг матрицы – это число линейно независимых столбцов (строк). Если к матрице добавим еще один столбец, то ее ранг или не изменится, или же может увеличится на единицу. Это также следует из ступенчатой формы матрицы $\tilde{A}$, число ненулевых строк которой не меньше числа ненулевых строк ступенчатой формы матрицы A, но не больше на единицу.

Теорема Кронекера-Капелли.

- Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений (1') имеет решение тогда и только тогда, когда rank A= rank $\tilde{A}$.

Доказательство. Пусть (1') имеет решение. Докажем, что rank A= rank $\tilde{A}$. Пусть $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ – решение системы (1). Тогда подставляя это решение в (1) получим

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{bmatrix} k_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{bmatrix} k_2 + \dots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{bmatrix} k_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что вектор **b** является линейной комбинацией векторов

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{bmatrix}.$$

Тогда, если матрица расширена за счет вектора **b,** который является лин. комбинацией ее столбцов, ранг расширенной матрицы равен рангу A.

Теорема Кронекера-Капелли.

А теперь, пусть rank A= rank $\tilde{A}$. Это означает, что добавление вектора к набору вектору из столбцов матрицы A не увеличит число линейно независимых векторов. Тогда векторы из столбцов матрицы A и вектор **b** вместе линейно зависимы и **b** можно выразить через линейно независимые столбцы матрицы A. Тогда существуют такие числа $p_1, p_2, \dots, p_n$, что

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{bmatrix} p_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{bmatrix} p_2 + \dots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{bmatrix} p_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ – решение системы (1).

Теорема доказана.

Как найти решения системы если она совместная?

- Пусть система имеет решение и ранг матрицы A системы (1) равен r: $\operatorname{rank} A = r = \operatorname{rank}\tilde{A}$.

Не уменьшая общности, предположим, что первые r строк матрицы (ну и матрицы $\tilde{A}$) линейно независимы. Тогда следующие s-r строк матрицы можно выразить через первые r строк. Поэтому любое решение первых r уравнений также будет решением всей системы. Остается найти решение первых уравнений системы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases} \qquad (2)$$

Систему (2) запишем в матричной форме

$$A'\mathbf{x} = \mathbf{b}', \qquad (2')$$

где $A' = \left[a_{ij}\right]_{r\times n}$. Если r=n, то матрица A обратимая и

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}')^{-\mathbf{1}}\mathbf{b}'.$$

Метод Гаусса – метод последовательного исключения неизвестных

- Нам придется делать следующие преобразования систем лин. уравн: вычитать из соответствующих частей одного уравнения системы другое уравнение, умноженное на число c. (**это и есть элемент. преобразование 3-го типа. См. презентацию лекции 1**)

Например, из второго уравнения системы (1) вычитаем первое уравнение системы, умноженное на c:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \qquad (4)$$

где $a'_{2j} = a_{2j} - ca_{1j}$, $\quad b'_2 = b_2 - cb_1$.

Лемма 2. Системы уравнений (1) и (4) эквивалентны, т.е. они или обе несовместны, или же совместны и обладают одними и теми же решениями.

Метод Гаусса …

Доказательство леммы 2. Пусть $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ – решение системы (1). Покажем, что $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ также является решением системы (4). Очевидно, что

$$a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1n}k_n = b_1 \qquad (1.1)$$

$$a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2n}k_n = b_2 \qquad (1.2)$$

Из (1.1) и (2.2) следует: если из второго уравнения системы (1) вычитать первое уравнение системы, умноженное на c, то получим второе уравнение системы (4):

$$(a_{21}-ca_{11})k_1 + (a_{22}-c\,a_{12})k_2 + \cdots + (a_{2n}-c\,a_{1n})k_n = b_2 - cb_1.$$

Нет сомнения, что $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ - решение системы (4).

Обратно тоже верно. Поскольку если $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ удовлетворяет системе (4), то $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ также удовлетворить системе (1). Поскольку второе уравнение (1) получено вычитанием из второго уравнения (4) первое уравнение (4), умноженное на число $-c$ (минус c).

Лемма 2 доказана.

Понятно, что если к системе (1) несколько раз применены элементарное преобразование рассмотренного типа, то полученная система останется эквивалентной исходной системе.

Метод Гаусса

- Рассматриваем систему (1).

1) Если $a_{11} \neq 0$, то переставляем строки так, чтобы имело место $a_{11} \neq 0$ для нашей системы. Исключаем неизвестное x_1 из всех уравнений, **кроме первого**. Для этого обе части первого уравнения умножим на a_{21}/a_{11} и вычтем из второго уравнения (это то же самое, что к второму уравнению добавить первое, умноженное на $-a_{21}/a_{11}$). Затем обе части первого уравнения умножим на a_{31}/a_{11} и вычтем из третьего уравнения. Повторяем это действие для всех строк и получаем:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad\qquad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a'_{s2}x_2 + a'_{s3}x_3 + \ldots + a'_{sn}x_n = b'_s. \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Метод Гаусса

- Заметим, что система (5) эквивалентна системе (1).

2. Далее исключаем неизвестное x_2 из всех уравнений, кроме **первого и второго**. Для этого будем преобразовывать систему (5), но первое уравнение (5) мы больше не будем трогать. Если в полученной системе есть уравнение, все коэффициенты которого равно нулю, то мы его выбросим при равенстве нулю правой части. А если есть уравнение с нулевыми коэффициентами, а правя часть не равна нулю, то значит, наша система - не совместная.

Итак, преобразуем систему (5), вычитая из обеих частей третьего и каждого из следующих уравнений обе части второго уравнения, умноженные соответственно на числа

$$\frac{a'_{32}}{a'_{22}}, \frac{a'_{42}}{a'_{22}}, \dots, \frac{a'_{s2}}{a'_{22}}.$$

Таким образом мы приходим к следующей системе, которая эквивалентна системам (1) и (5):

Метод Гаусса

- $$\left.\begin{array}{rrrr} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + & \ldots & + a_{1n}x_n = b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + & \ldots & + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ a''_{33}x_3 + & \ldots & + a''_{3n}x_n = b''_3, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a''_{t3}x_3 + & \ldots & + a''_{tn}x_n = b''_t. \end{array}\right\}$$

Наша система даже после первого пункта – после исключения неизвестного x_1 могла содержать меньше s уравнений.

Вопрос? Когда закончится этот процесс?

Если мы придем к такой системе, одно из уравнений которой имеет отличный от нуля свободный член, а все коэффициенты левой части равны нулю, то исходная наша система не совместна.

В противном случае мы приходим к следующей системе:

Метод Гаусса

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1,k-1}x_{k-1} + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2,k-1}x_{k-1} + a'_{2k}x_k + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^{(k-2)}_{k-1,k-1}x_{k-1} + a^{(k-2)}_{k-1,k}x_k + \ldots + a^{(k-2)}_{k-1,n}x_n &= b^{(k-2)}_{k-1}, \\ a^{(k-1)}_{kk}x_k + \ldots + a^{(k-1)}_{kn}x_n &= b^{(k-1)}_k. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

В системе (6)

$$k \leq s, \quad a_{11} \neq 0, \; a'_{22} \neq 0, \ldots, a^{(k-2)}_{k-1,k-1} \neq 0, \; a^{(k-1)}_{kk} \neq 0,$$

Вид системы (6) называют трапецоидальной, если $k < n$, треугольной, если $k = n$ и имеет вид (7):

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^{(n-1)}_{nn}x_n &= b^{(n-1)}_n. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Итог метода Гаусса

- 1) Если $k=n$, то мы получаем вполне определенное значение для неизвестного x_n. Подставляя его в предпоследнее уравнение, мы найдем однозначно определенное значение для x_{n-1}. И так мы по системе (1) находим однозначное решение и система (1) – определенная и совместная.

2) Если же $k<n$, то выбираем свободные неизвестные $x_{k+1}, \dots, x_n$ и двигаясь снизу вверх находим все неизвестные $x_k, \dots, x_2, x_1$. Поскольку значения для свободных неизвестных можно выбрать бесконечным числом различных способов, наша система будет совместной и неопределенной

Утверждение. Метод Гаусса применим к любой системе линейных уравнений. При этом система будет несовместной, если в процессе преобразований мы получим уравнение, в котором коэффициенты при всех неизвестных равны нулю, а свободный член отличен от нуля. Если же мы такого уравнения не встретим, то система – совместная. Совместная система будет определенной (иметь единственное решение), если она приводится к треугольному виду (7) при $k = n$, и не определенной, если она приводится к трапецоидальному виду (6) при $k < n$.

Пример метода Гаусса

- Пример 1. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 2x_3 = -22 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = -11 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = -20 \end{cases} \to \begin{cases} 5x_1 - x_2 - 2x_3 = -22 \\ \frac{4x_2 - 10x_2}{5} + \frac{8x_3 + 5x_3}{5} = \frac{88 - 55}{5} \\ \frac{3x_2 + 5x_2}{5} + \frac{6x_3 - 20x_3}{5} = \frac{66 - 100}{5} \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 2x_3 = -22 \\ -6x_2 + 13x_3 = 33 \\ 4x_2 - 7x_3 = -17 \end{cases} \to \begin{cases} 5x_1 - x_2 - 2x_3 = -22 \\ -6x_2 + 13x_3 = 33 \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

$$\to x_1 = -3, \; x_2 = 1, \; x_3 = 3.$$

Пример метода Гаусса

- Пример 2. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25. \end{cases}$$

Подвергаем преобразованиям расширенную матрицу этой системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right).$$

Мы приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ -3x_2 - 2x_3 = 11, \\ -8x_3 = 8. \end{cases}$$

Итак, $x_1 = 2, x_2 = -3,\ x_3 = -1.$

Пример метода Гаусса

Пример 3. Решить систему методом Гаусса.

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 &= 3,\\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 &= 1,\\ x_1 \quad\quad - 7x_3 + 2x_4 &= -5,\\ 11x_2 + 20x_3 - 9x_4 &= 2. \end{aligned}\right\}$$

Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & -8 & 1 & 3\\ 3 & 1 & -3 & -5 & 1\\ 1 & 0 & -7 & 2 & -5\\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & -8 & 1 & 3\\ 0 & 16 & 21 & -8 & -8\\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8\\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & -8 & 1 & 3\\ 0 & -89 & 0 & -29 & 160\\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8\\ 0 & -89 & 0 & -29 & 162 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & -8 & 1 & 3\\ 0 & -89 & 0 & -29 & 160\\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Система не имеет решений!

Пример метода Гаусса

- Пример 4. Решить систему методом Гаусса.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 &= 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 &= 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -7 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 7 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -7 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

x_3, x_4, x_5 - **называют свободными неизвестными**

$$x_1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5,$$

$$x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4.$$

Система однородных уравнений

- Определение 1. Система уравнений (1) является однородной, если свободные члены равны нулю. Т.е. система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Определение 1'. Эквивалентное определение. Система называется однородной, если она имеет тривиальное решение $\mathbf{x} = (x_1, \dots x_n) = (0, \dots, 0)$.

Согласно теореме Кронекера-Капелли такая система всегда имеет решение.

Если правая част системы (1) не равна нулю, то ее называют неоднородной.

Слайд 1

- Теорема 2. Система однородных уравнений $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ имеет единственное нулевое решение (0,…,0), если $\text{rank}\, A = n$, и бесконечно много решений, если $\text{rank}\, A < n$.

Пример 5. Экономическая задача. Пусть n агентов обмениваются m товарами. a_{ij}- количество j-го товара, проданного (купленного) i-м агентов. Если a_{ij} – положительное число, то предполагаем, что i-й агент продает товар j. А если a_{ij} – отрицательное число, то предполагаем, что i-й агент покупает j–й товар.

Тогда $(a_{j1}, \dots, a_{jm})$ – вектор «обмена» j-го агента товарами i=1,..,m.

Аналогично, $(a_{ji}, \dots, a_{ji})$ – вектор «обмена» i-го товара агентами i=1,..,n.

Пусть $p_1, \dots, p_m$ - цена одной единицы товара 1,…,m. Если агент продал первых k товаров и купил m-k следующих товаров, тогда выражение определит чистую прибыль агента j:

$$a_{j1}p_1 + \dots + a_{jk}p_k - a_{jk+1}p_k - \dots - a_{jm}p_m.$$

Пример.

- Предположим, что прибыль каждого агента равна нулю:

$$a_{j1}p_1 + \cdots + a_{jk}p_k - a_{jk+1}p_k - \cdots - a_{jm}p_m = 0.$$

Тогда однородная система описывает задачу, где нужно найти цены товаров, для которых прибыли всех агентов были равны нулю.

Пример 6 однородной системы.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 7x_2 + 5x_3 - 11x_4 = 0 \\ 9x_2 + 5x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 7x_2 + 5x_3 - 11x_4 = 0 \\ 2x_2 + 0 - 2x_4 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 7x_2 + 5x_3 - 11x_4 = 0 \\ x_2 = x_4. \end{cases}$$

Положим: $x_4 = c \in \mathbb{R}$, $x_2 = c$, $x_3 = \frac{4}{5}c$, $x_1 = \frac{3}{5}c$.

Литература. Глава 5 в книге “Fuad Aleskerov, Hasan Ersel, Dmitri Piontkovski“ Linear Algebrafor Economists”

Домашнее задание к лекции 4. Задачи взяты из вышеуказанной книги (глава 5). Ответы приведены в конце книги.

Решить следующие системы методом исключения неизвестных Гаусса

1. Find the solution of the following systems of linear equations.

(a)

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$$

2. Find the solution of the following system in terms of λ.

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases}$$

Задачи

1) Решить следующую систему методом Гаусса, 2) вычислить определитель, 3) если определитель не 0, то правилом Крамера и 3) методом обращения матриц.

3.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \end{cases}$$

9. Find a polynomial $f(x) = ax^2 + bx + c$ such that

$$f(1) = -1$$
$$f(-1) = 9$$
$$f(2) = -3.$$

0. Find a polynomial $f(x)$ of degree 3 such that

$$f(-1) = 0$$
$$f(1) = 4$$
$$f(2) = 3$$
$$f(3) = 16$$

Слайд 1

1