TWO DECISION RULES.NEYMANN-PEARSON APPROACH

Постановка задачи

- Выборка наблюдений $x_1, x_2, \dots, x_n \in \chi$ случайной величины X
- Случайная величина X имеет плотность $f(x;\theta)$, где θ- точка из параметрического пространства Ω.
- Есть две гипотезы:

$$H\colon \theta \in \Omega_H,\ \text{К}\colon \theta \in \Omega_K \colon \Omega_H \cup \Omega_K = \Omega; \Omega_H \cap \Omega_K = \emptyset$$

- Необходимо построить правило (тест, процедуру)

$$\delta = \begin{cases} d_H, x \in D_H \\ d_K, x \in D_K \end{cases} D_H \cap D_K = \emptyset; D_H \cup D_K = \chi$$

для тестирования гипотезы Н против альтернативы К по наблюдениям $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, которое обладает какими-то хорошими свойствами.

Ошибки 1 и 2 рода

- Отвержение H, когда она верна – ошибка 1 рода.
- Принятие H, когда она не верна - ошибка 2 рода.

Хорошее правило должно минимизировать обе вероятности ошибок. Невозможно одновременно минимизировать обе вероятности.

Пример

- $H: \theta = \theta_0; K: \theta = \theta_1$. Пусть $\delta(x)$ выбрано, то есть D_H, D_K фиксированы. Тогда вероятность ошибки 1 рода

$$P_H(\delta = d_K) = \int_{D_K} f(x, \theta_0) dx$$

Вероятность ошибки 2 рода

$$P_K(\delta = d_H) = \int_{D_H} f(x, \theta_1) dx$$

Уменьшение $P_H(\delta = d_K)$ может осуществляться уменьшением D_K. Это подразумевает рост D_H. Тогда $P_K(\delta = d_H) = \int_{D_H} f(x, \theta_1) dx$ растет.

Подход Неймана-Пирсона

- Качество любого правила двух решений δ определяется вектором $(P_H(\delta = d_K), P_K(\delta = d_H))$
- Классический подход – подход Неймана-Пирсона.

$$\begin{cases} P_H(\delta = d_K) \le \alpha \\ P_K(\delta = d_H) \to min \end{cases}$$

Обычно $\alpha = 0.1; 0.05; 0.01$.

Такой подход позволяет контролировать вероятность ошибки первого рода и минимизировать вероятность ошибки второго рода.

Простые и сложные гипотезы

- Существует 2 типа гипотез H, K – простые и сложные.

Определение

- *Гипотеза H о распределении случайной величины X называется простой, если распределение X полностью определяется истинностью H. Иначе H называется сложной гипотезой.*

Пример

- Гипотезы $H: \theta = \theta_1, K: \theta = \theta_2$ простые.
- Гипотезы $H: \theta \le \theta_1, K: \theta > \theta_1$ сложные.
- Гипотеза $H: \theta = \theta_1$ простая, гипотеза $K: \theta > \theta_1$ сложная.

Тест или критическая функция

- Правило

$$\delta = \begin{cases} d_H, x \in D_H \\ d_K, x \in D_K \end{cases} D_H \cap D_K = \emptyset; D_H \cup D_K = \chi$$

может быть написано как

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, x \in D_H \\ 1, x \in D_K \end{cases}$$

В таком случае $P_H(\delta = d_K) = E\varphi(X)$.

Функция $\varphi(x)$ называется тестовой или критической функцией.

$$\begin{cases} E_\theta\varphi(X) \le \alpha, \theta \in \Omega_H \\ E_\theta\varphi(X) \to max, \theta \in \Omega_K \end{cases}$$

Функция мощности $\beta(\theta) = E_\theta\varphi(X)$ для $\theta \in \Omega$; $\Omega = \Omega_H$ ...

Подход Неймана-Пирсона. Построение теста. Простые гипотезы

- Фундаментальная лемма Неймана-Пирсона.

В случае тестирования простой гипотезы H: $\theta = \theta_0$ против простой альтернативы K: $\theta = \theta_1$. Функции правдоподобия:

$$p_H(x) = f(x_1, \theta_0) f(x_2, \theta_0) \dots f(x_n, \theta_0)$$
$$p_K(x) = f(x_1, \theta_1) f(x_2, \theta_1) \dots f(x_n, \theta_1)$$

Подход Неймана-Пирсона. Построение теста. Простые гипотезы

- Пусть $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям (1), (2)

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, T(x) = \frac{p_K(x)}{p_H(x)} > c_\alpha \\ 0, T(x) = \frac{p_K(x)}{p_H(x)} < c_\alpha \end{cases} \qquad (1)$$

c_α может быть найдена из $E_\theta \varphi(X) = \alpha$ (2)

Тогда тест $\varphi(x)$ - наиболее мощный тест уровня α.

Наиболее мощный тест, равномерно наиболее мощный тест

Определение

- *Тест δ уровня α для проверки простой гипотезы H против простой альтернативы K называется наиболее мощным тестом, если для любого другого теста δ' уровня α для проверки простой гипотезы H против простой альтернативы K выполняется:*

$$P_K(\delta(x) = d_K) \geq P_K(\delta'(x) = d_K)$$

Наиболее мощный тест, равномерно наиболее мощный тест

- Определение

- *Тест δ уровня α для проверки сложной гипотезы $H\colon \theta \in \Omega_H$ против сложной гипотезы К: $\theta \in \Omega_K$ называется равномерно наиболее мощным тестом если для любого другого теста δ' уровня α для проверки сложной гипотезы H против сложной альтернативы K выполняется:* $P_\theta(\delta(x) = d_K) \geq P_\theta(\delta'(x) = d_K), \forall\theta \in \Omega_K$

Подход Неймана-Пирсона. Построение теста. Простые гипотезы. Пример

- Монета с вероятностью выпадения орла p подбрасывается n раз.

Наблюдения $x_1, x_2, \dots, x_n; x_i \in \{0,1\}$. x_i=1 – орел в наблюдении i.

Гипотеза $H: p = \frac{1}{2}$ против альтернативы К: $p = \frac{2}{3}$

Функции правдоподобия:

$$p_H(x) = (\frac{1}{2})^{\sum_{i=1}^n x_i}(1 - \frac{1}{2})^{n-\sum_{i=1}^n x_i} = (\frac{1}{2})^n$$

$$p_K(x) = (\frac{2}{3})^{\sum_{i=1}^n x_i}(1 - \frac{2}{3})^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$$

Тест

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, \sum_{i=1}^n x_i > c_\alpha \\ 0, \sum_{i=1}^n x_i < c_\alpha \end{cases}$$

Подход Неймана-Пирсона. Построение теста. Простые гипотезы. Пример

-

Порог c_α определяется из $P_H(\sum_{i=1}^n X_i > c_\alpha) = \alpha$. Предполагается, что уравнение имеет решение. Оно может быть получено путем выбора α. При верности H статистика $\sum_{i=1}^n X_i$ имеет биномиальное распределение $b(n, \frac{1}{2})$, тогда порог c_α определяется из уравнения:

$$\sum_{i=c_\alpha+1}^{n} C_n^i \left(\frac{1}{2}\right)^n = \alpha$$

Сложные гипотезы. Монотонное отношение правдоподобия

- $$H:\ \theta\ \le \theta_0\ vs\ K:\ \theta\ > \theta_0$$
  $$H:\ \theta\ \ge \theta_0\ vs\ K:\ \theta < \theta_0$$

Определение

- *Семейство распределений имеет монотонное отношение правдоподобия если для любых* $\theta, \theta' : \theta < \theta'$ *распределения* $p_{\theta'}(x), p_\theta(x)$ *различны и существует функция* $T(x)$ *такая, что отношение* $\frac{p_{\theta'}(x)}{p_\theta(x)}$ *- неубывающая функция* $T(x)$.

$$\frac{p_{\theta'}(x)}{p_\theta(x)} > C \Leftrightarrow T(x) > C_1$$

Подход Неймана-Пирсона. Сложные гипотезы. Монотонное отношение правдоподобия

- Теорема

- *Пусть θ – реальный и пусть случайная величина X имеет функцию плотности $f(x, \theta)$ с монотонным отношением правдоподобия в $T(x)$. Тогда для тестирования $H\colon\ \theta\ \le \theta_0$ против $K\colon\ \theta\ > \theta_0$ существует РНМ тест, определяемый с помощью:*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, T(x) > C \\ 0, T(x) \le C \end{cases}$$

$$E_\theta \varphi(X) = \alpha$$

Подход Неймана-Пирсона. Сложные гипотезы. Монотонное отношение правдоподобия. Пример

- Монета с вероятностью выпадения орла p подбрасывается n раз.

Наблюдения $x_1, x_2, \dots, x_n; x_i \in \{0,1\}$. x_i=1 – орел в наблюдении i.

Гипотеза $H: p \leq \frac{1}{2}$ против альтернативы К: $p > \frac{1}{2}$

Поскольку биномиальное распределение имеет монотонное отношение правдоподобия в $T(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ тогда согласно теореме РНМ тест имеет вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, \sum_{i=1}^{n} x_i > c_\alpha \\ 0, \sum_{i=1}^{n} x_i < c_\alpha \end{cases}$$

Подход Неймана-Пирсона. Сложные гипотезы. Монотонное отношение правдоподобия. Пример

- Порог c_α определяется из $P_H(\sum_{i=1}^{n} X_i > c_\alpha) = \alpha$. Так как по гипотезе H статистика $\sum_{i=1}^{n} X_i$ имеет биномиальное распределение $b(n, \frac{1}{2})$, тогда порог c_α определяется из уравнения:

$$\sum_{i=c_\alpha+1}^{n} C_n^i \, (\frac{1}{2})^n = \alpha$$

Несмещенность, тесты структуры Неймана

- Определение
- Статистическое правило δ называется W-несмещенным, если

$$E_\theta w(\theta, \delta) \le E_\theta w(\theta', \delta) \qquad (3)$$

В среднем несмещенный тест ближе к правильному решению, чем к любому неправильному. Для несмещенного теста $\varphi(x)$ выполняется:

$$\beta_\varphi(\theta) \le \alpha, \theta \in \Omega_H$$

$$\beta_\varphi(\theta) \ge \alpha, \theta \in \Omega_K \qquad (4)$$

Если $\beta_\varphi(\theta)$ непрерывна, то:

$$\beta_\varphi(\theta) = \alpha, \forall\theta \in \omega = [\Omega_H] \cap [\Omega_K] \qquad (5)$$

Несмещенность, тесты структуры Неймана. Теорема

- Пусть X распределена согласно:

$$f(x,\theta) = C(\theta)\exp\left[\sum_{i=1}^{K}\theta_i T_i(x)\right]h(x) \qquad (6)$$

где регионы $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_K)$ и $\mathrm{T} = (T_1, \dots, T_K)$ выпуклы.
Перепишем (6) как

$$f(x,\theta,\vartheta) = C(\theta,\vartheta)\exp\left[\theta U(x) + \sum_{i=1}^{K-1}\vartheta_i T_i(x)\right]h(x), \quad (7)$$

где $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_{K-1}), T = (T_1, \dots, T_K)$

Несмещенность, тесты структуры Неймана. Теорема

- Теорема

- *Для тестирования* $H_1:\ \theta\ \leq \theta_0$ против $K_1:\ \theta\ > \theta_0$ *НРНМ тест имеет вид:*

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1, u > C_0(t) \\ 0, u \leq C_0(t) \end{cases} \quad (8)$$

где константа $C_0(t)$ *определяется из:*

$$E_{\theta_0}(\varphi_1(U,T)|T = t) = \alpha$$

для любых t.

Несмещенность, тесты структуры Неймана. Теорема

- Теорема

- *Для тестирования* $H_2: \theta = \theta_0$ против $K_2: \theta \neq \theta_0$ *НРНМ тест имеет вид:*

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 1, u < C_1(t) \; or \; u > C_2(t) \\ 0, C_1(t) \leq u \leq C_2(t) \end{cases} \quad (9)$$

где константы $C_1(t)$, $C_2(t)$ *определяются из:*

$$E_{\theta_0}(\varphi_2(U,T)|T = t) = \alpha$$

$$E_{\theta_0}(U\varphi_2(U,T)|T = t) = \alpha E_{\theta_0}(U|t) \quad (10)$$

Несмещенность, тесты структуры Неймана. Теорема

- Теорема

- $h_{ij}: \theta_i \leq \theta_j$ против $k_{ij}: \theta_i > \theta_j$ *с параметрами из* (6) *НРНМ тест имеет вид:*

$$\varphi_{ij} = \begin{cases} \partial_{ij}^{-1}, t_i(x) > c_{ij}(t_i(x) + t_j(x), t_k(x)) \\ \partial_{ij}, t_i(x) \leq c_{ij}(t_i(x) + t_j(x), t_k(x)) \end{cases} (11)$$

где константы $c_{ij}(t_i(x) + t_j(x), t_k(x))$ *определяются из:*

$$P_{\theta_i=\theta_j}\left(T_i > c_i \middle| T_i + T_j = t_i(x) + t_j(x), T_k = t_k(x)\right) = \alpha_{ij} (12)$$

Сложные гипотезы. Процедура отношения правдоподобия

- Если отношение монотонного правдоподобия отсутствует - используется процедура отношения правдоподобия.

$$H: \theta \in \Omega_0 \text{ против } K: \theta \in \Omega_1$$

Статистика теста:

$$\lambda(x) = \frac{sup_{\theta \in \Omega_1} p_\theta(x)}{sup_{\theta \in \Omega_0} p_\theta(x)} \text{ или } \lambda(x) = \frac{sup_{\theta \in \Omega_1 \cup \Omega_0} p_\theta(x)}{sup_{\theta \in \Omega_0} p_\theta(x)}$$

Сложные гипотезы. Процедура отношения правдоподобия

- Тест имеет вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, \lambda(x) \leq c \\ 0, \lambda(x) > c \end{cases}$$

Порог c определяет из:

$P_\theta(\lambda(x) \leq c) = \alpha$ для $\theta \in [\Omega_0] \cap [\Omega_1]$ (13)

Предполагается, что существует решение уравнения (13).

Сложные гипотезы. Процедура отношения правдоподобия

- Условие непрерывности $\frac{\partial \int f(x,\theta)dx}{d\theta} = \int \frac{\partial f(x,\theta)dx}{d\theta}$

Теорема

- *Для тестирования гипотезы* $H_0: \theta = \theta_0 (\theta_0 = (\theta_{10}, \dots, \theta_{K0})$

  против $K: \theta \neq \theta_0$ *при* $n \to \infty$ *LR процедура уровня* α *имеет вид:*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, -2ln\lambda(x) \geq c_\alpha \\ 0, -2ln\lambda(x) < c_\alpha \end{cases}$$

где c_α *квантиль уровня 1-*α *распределения* χ^2*с K степенями свободы.*

Сложные гипотезы. Процедура отношения правдоподобия

- Consistency of LR процедуры

Теорема

- Для $\theta \neq \theta_0$ и $n \to \infty$ выполняется:

$$P(-2ln\lambda(x) \geq c_\alpha) \to 1$$

p-значения

- Пусть распределение $\frac{p_K(X)}{p_H(X)}$ при истинности H непрерывно. Тогда MP тест уровня α отвергает гипотезу H, если $\frac{p_K(X)}{p_H(X)} > c_\alpha$, где c_α определяется из:

$$P\left(\frac{p_K(X)}{p_H(X)} > c_\alpha\right) = \alpha$$

Пусть $S_\alpha = \{x : \frac{p_K(X)}{p_H(X)} > c_\alpha\}$- критическая область для теста уровня α. Предположим, что для $\alpha' < \alpha''$ выполняется $S_{\alpha'} \subset S_{\alpha''}$.

p-значения

- Определение
- *Наименьший уровень значимости такой, что гипотеза отклоняется по данным наблюдениям X называется p-значением.*

$$\hat{p} = \hat{p}(X) = \inf\{\alpha : X \in S_\alpha\} \quad (14)$$

$\hat{p}(X)$ дает представление о том, насколько сильно данные противоречат H.

p-значения

- Чтобы быть более точным, если

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, T(x) > c \\ 0, T(x) \leq c \end{cases}$$

тогда $\hat{p}(X) = P_H(T(X) > t)$, где $t = t(x)$ наблюдаемое значение статистики $T(X)$.

В целом, если $\alpha' < \alpha''$ подразумевает $S_{\alpha'} \subset S_{\alpha''}$, тогда тест $\varphi(x)$ может быть записан как:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, \hat{p}(t) > c \\ 0, \hat{p}(t) \leq c \end{cases}$$

Основное свойство p-значений

- Основное свойство p-значений для тест $\varphi(x)$ уровня α с критической областью S_α дается в следующей лемме, которая применяется как к простым, так и к сложным нулевым гипотезам.

Лемма

- *Пусть* X *имеет распределение* $P_\theta, \theta \subset \Omega, H\colon \theta \in \Omega_H$ *и* $\alpha' < \alpha''$ $S_{\alpha'} \subset S_{\alpha''}$
  - *если* $sup_\theta P_\theta(X \in S_\alpha) \leq \alpha, \forall \alpha \in (0,1)$, *тогда* $P_\theta(\hat{p}(t) \leq u) \leq u, \forall u \in [0,1]$
  - *если* $\forall \theta \in \Omega_H \rightarrow P_\theta(X \in S_\alpha) = \alpha$ *для всех* $\alpha \in (0,1)$, *тогда* $P_\theta(\hat{p}(t) \leq u) = u, \forall u \in [0,1]$

Литература

E.L.Lehmann, J.P.Romano Testing Statistical Hypotheses. Third edition, 2005.