

Пределъные теоремы

Теорема Пуассона

Биномиальная случайная величина с параметрами N и p .

Пусть число N неограниченно возрастает, при этом вероятность $p = a / N$, где a – const.

$$P(\xi_B = k) = C_N^k p^k (1 - p)^{N-k} \quad (6.1)$$

Подставим $p = a / N$ в (6.1)

$$\frac{N(N-1)\dots(N-k+1)}{k!} \left(\frac{a}{N}\right)^k \left(1 - \frac{a}{N}\right)^N \left(1 - \frac{a}{N}\right)^{-k}$$

$$\frac{N(N-1)\dots(N-k+1)}{k!} \left(\frac{a}{N}\right)^k \left(1-\frac{a}{N}\right)^N \left(1-\frac{a}{N}\right)^{-k}$$

Вынесем общий множитель, не содержащий N

$$\frac{a^k}{k!} \left[\left(1-\frac{1}{N}\right) \left(1-\frac{2}{N}\right) \dots \left(1-\frac{k-1}{N}\right) \right] \left(1-\frac{a}{N}\right)^N \left(1-\frac{a}{N}\right)^{-k}$$

Предельный переход при $N \rightarrow \infty$

$$P(\xi_B = k) = C_N^k p^k (1-p)^{N-k}$$

$$\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{a^k}{k!} \left(1 - \frac{a}{N}\right)^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

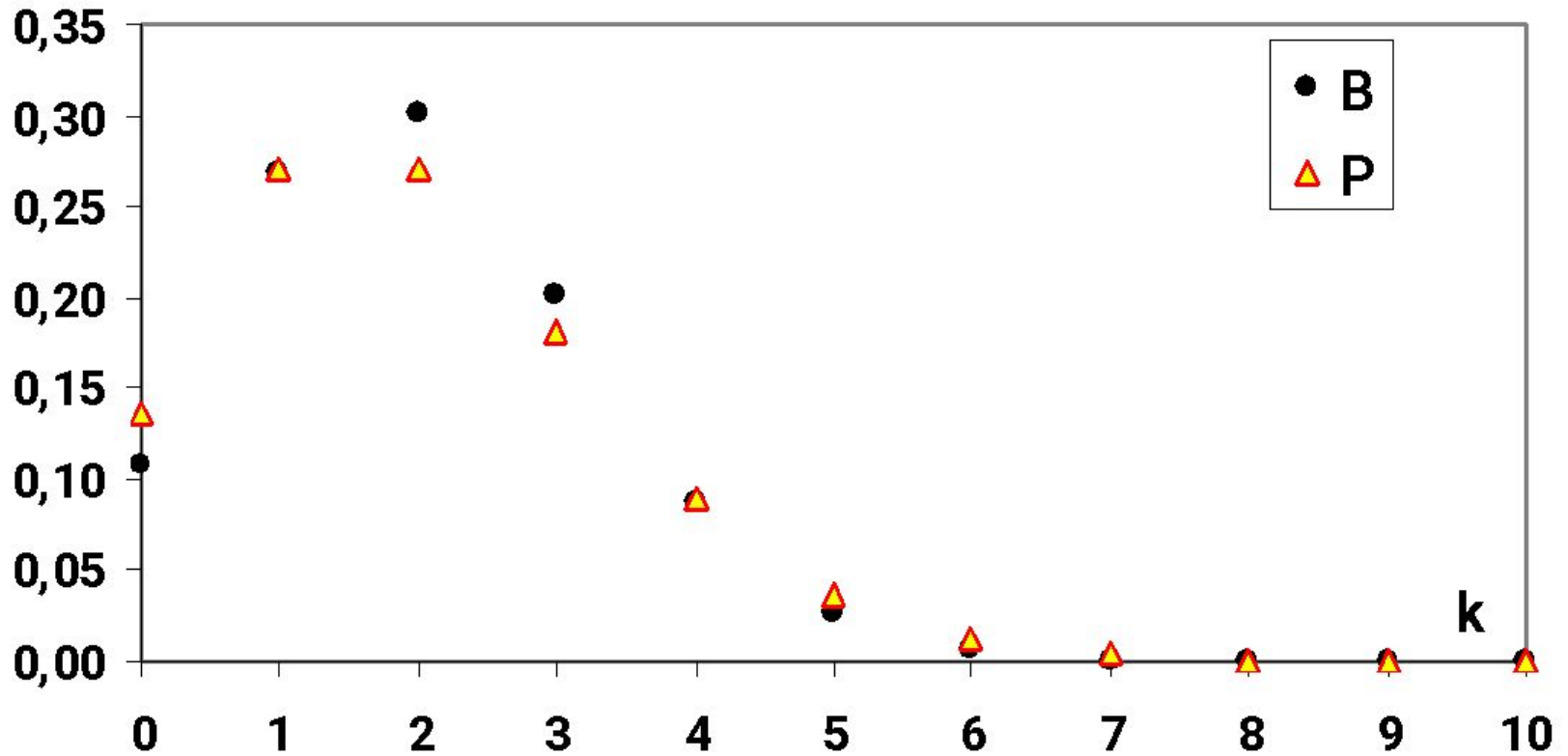
Вывод: при большом значении параметра N и малом значении параметра p распределение Бернулли совпадает с распределением Пуассона

Параметр распределения Пуассона равен произведению параметров распределения Бернулли:

$$a = N p$$

N=10; p=0,2

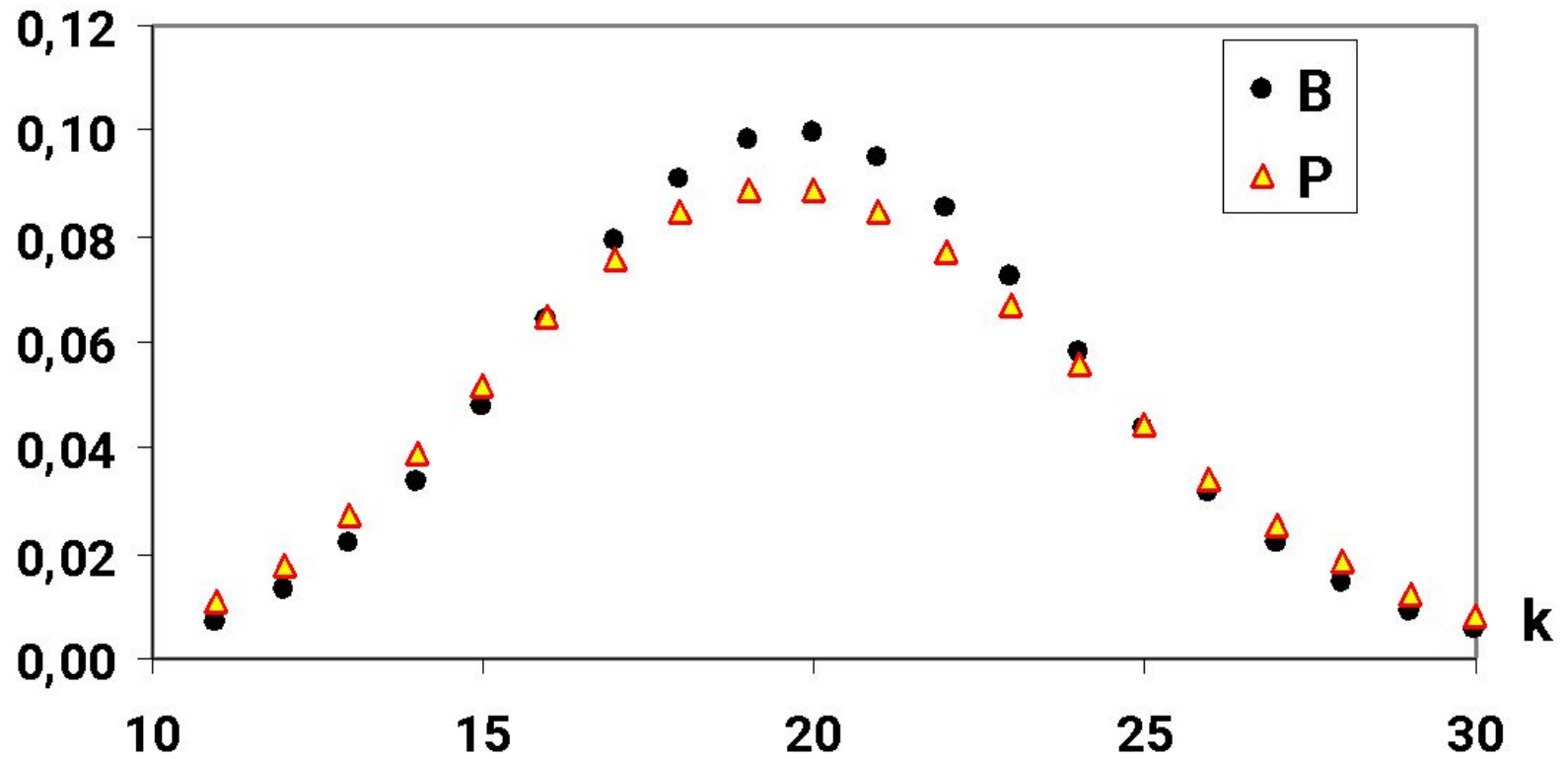
P(k)



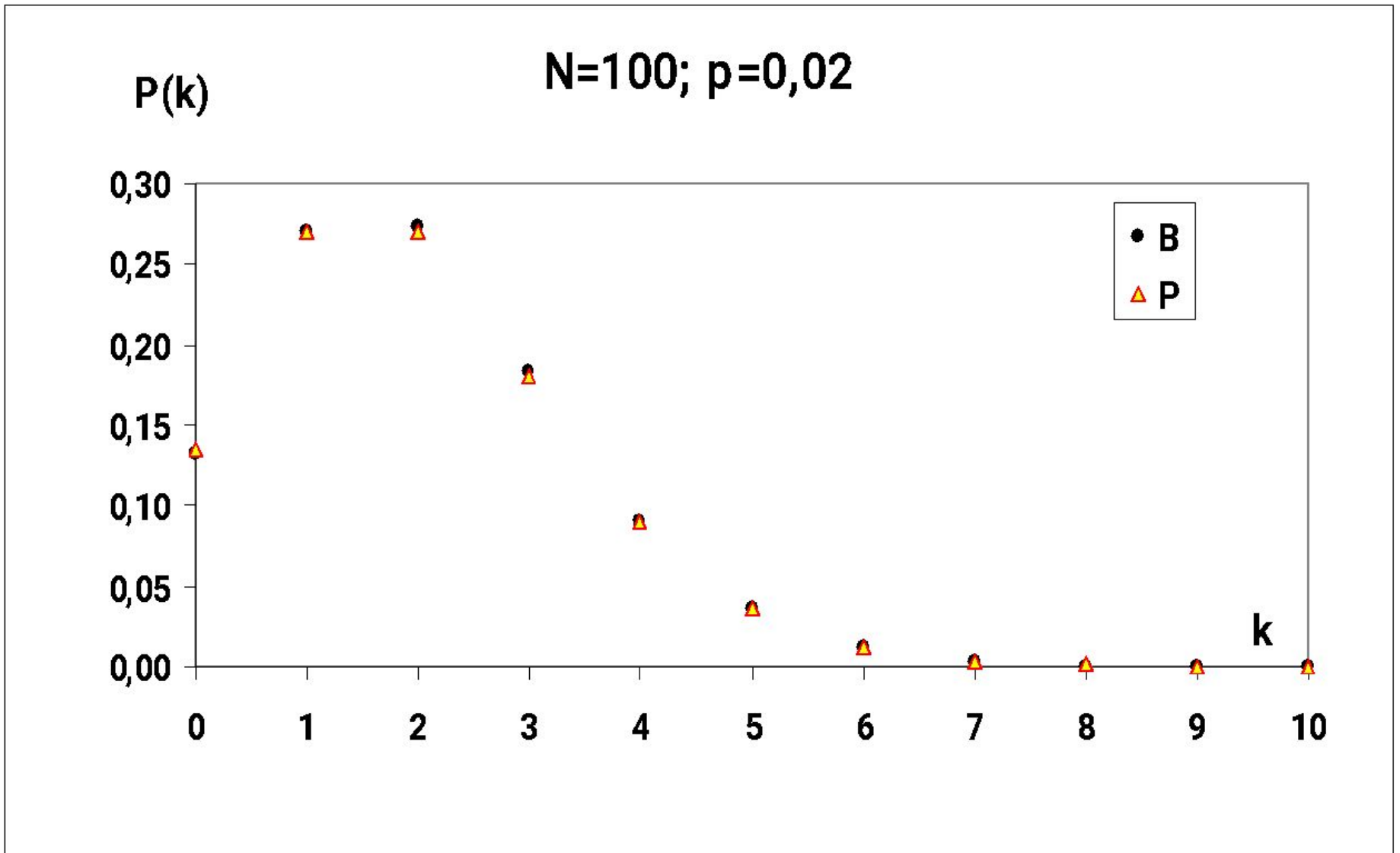
$$a = Np = 2$$

$P(k)$

$N=100; p=0,2$



$$a = Np = 20$$



$$a = Np = 2$$

Хорошее совпадение распределения Бернулли с распределением Пуассона наблюдается при значении параметра $N > 100$, и параметра распределения Пуассона a не сильно отличающегося от единицы.

Теорема Муавра – Лапласа

Биномиальная случайная величина с параметрами N и p .

Вероятность того, что значение этой случайной величины k находится в интервале $[k_1, k_2]$

$$P\{k_1 \leq k \leq k_2\} = \sum_{k=k_1}^{k=k_2} C_N^k p^k (1-p)^{N-k}$$

Рассмотрим предельный переход при $N \rightarrow \infty$

Согласно теореме Муавра – Лапласа,
справедлив следующий предельный переход:

$$P\{k_1 \leq k \leq k_2\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

где: $\mu = Np$, $\sigma^2 = Np(1-p)$

$$x_1 = \frac{k_1 - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}$$

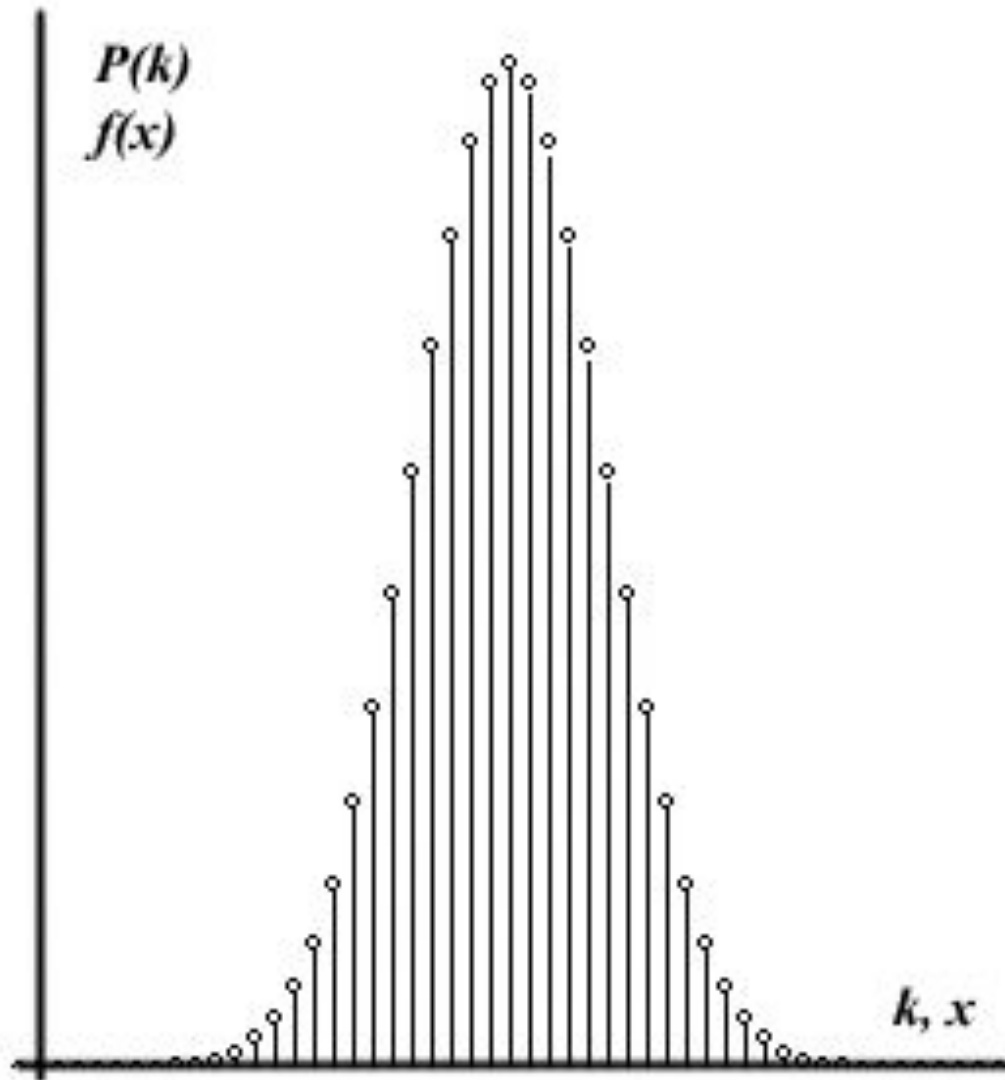
$$x_2 = \frac{k_2 - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}$$

Это означает, что при очень больших значениях параметра N и при большом значении произведения параметров Np распределение Бернулли может заменяться нормальным (гауссовым) распределением.

Сумма вероятностей **биномиальной случайной величины** заменяется интегралом от плотности вероятности **нормальной случайной величины**.

Параметр μ (математическое ожидание) равен произведению Np

Параметр σ^2 (дисперсия) равен $Np(1-p)$



$$N = 100 ; p = 0,4.$$

Вертикальные
черточки –
вероятности для
биномиального
распределения.

Кружки – значения
плотности
нормальной
случайной
величины.

$$\mu = Np = 40; \quad \sigma^2 = Np(1 - p) = 24$$

Как вычислить определенный интеграл в правой части теоремы Муавра-Лапласа?

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

Замена переменной: **$z = (x - \mu) / \sigma$**

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

Функция Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

Интеграл с переменным верхним пределом от **нормированной** функции Гаусса

$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Это плотность гауссовой случайной величины с параметрами **$\mu = 0$** и **$\sigma = 1$**

Свойства функции Лапласа

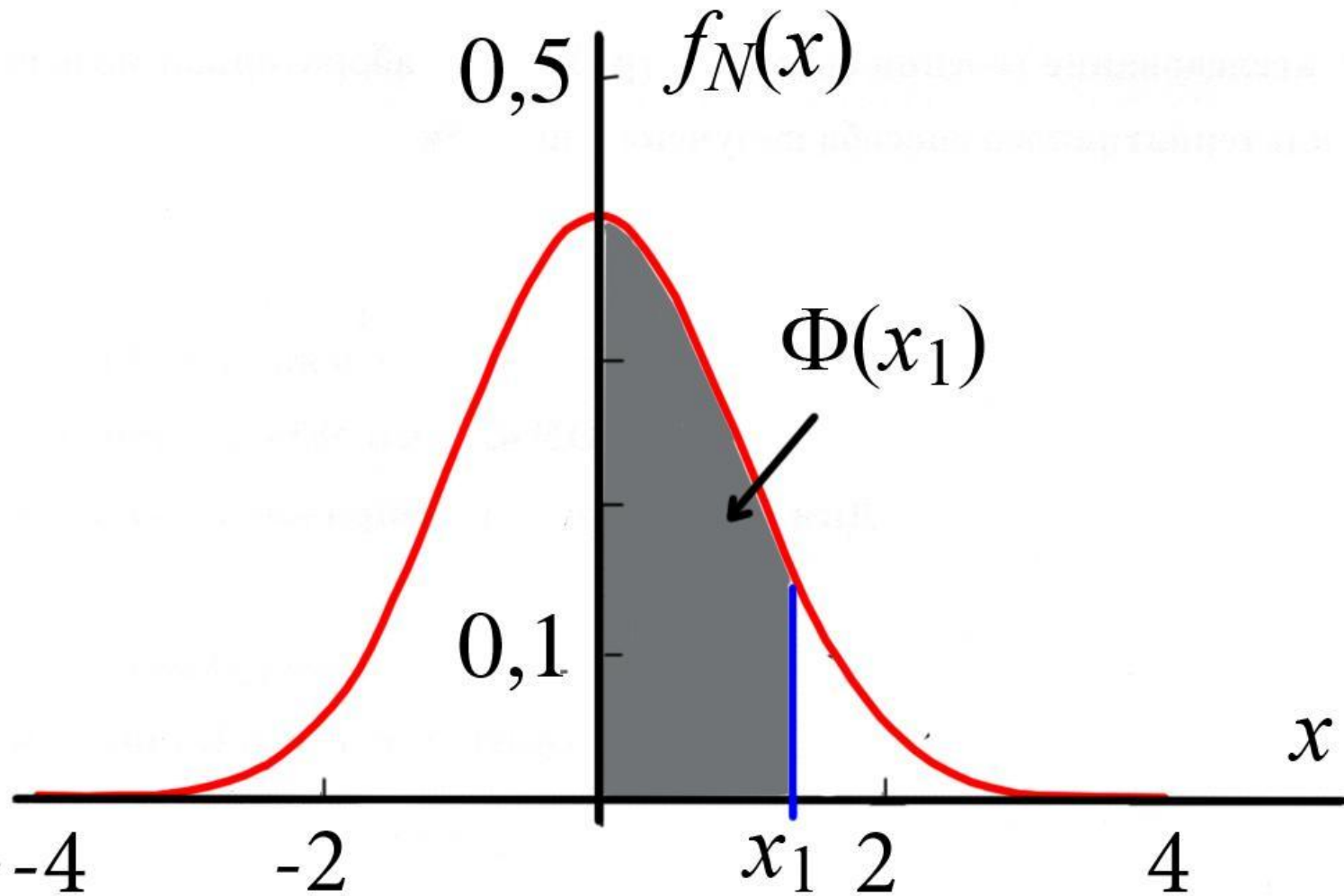
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

1. $\Phi(x=0) = 0$

2. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

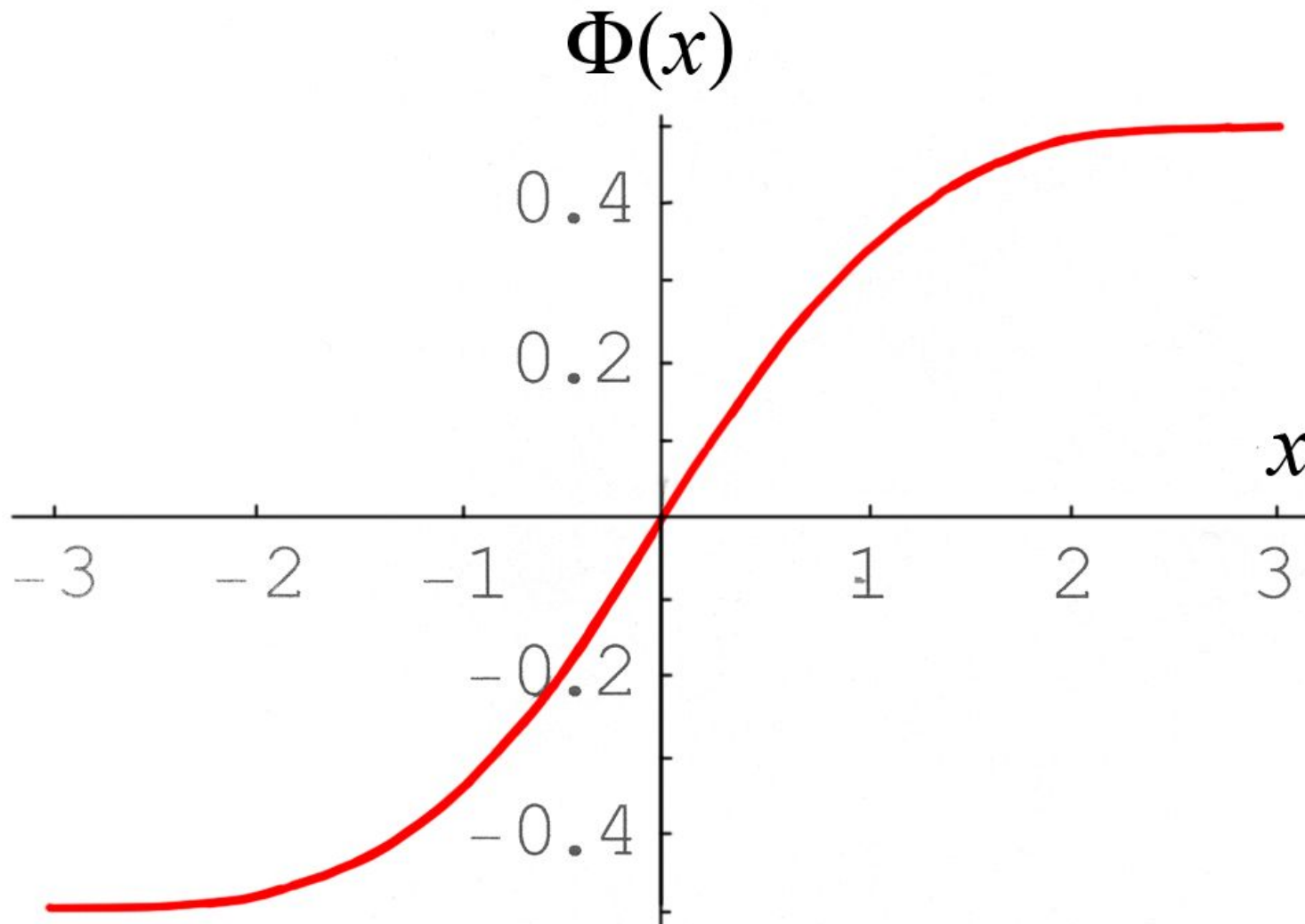
3. Функция Лапласа быстро стремится к 0,5.

$\Phi(x = 3) = 0,49865;$ **$\Phi(x = 5) = 0,499999997.$**



$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

График функции Лапласа



k - значение биномиальной случайной величины с параметрами N и p .

$$P\{k_1 \leq k \leq k_2\} = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

где Φ – функция Лапласа, x_1 и x_2 – её аргументы:

$$x_1 = \frac{k_1 - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \quad x_2 = \frac{k_2 - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}$$

Центральная пределельная теорема

$\xi_i ; (i = 1, \dots, N)$ – случайные величины

$$\zeta_N = \sum_{i=1}^N \xi_i$$

Если $N \rightarrow \infty$, то при **весьма общих условиях** случайная величина ζ_N имеет **нормальное** (гауссово) распределение вероятностей.

Теорема 1

ξ_i ; ($i = 1, \dots, N$) – попарно независимые случайные величины, имеющие одинаковые распределения.

Математические ожидания $M(\xi_i) = a$

Дисперсии $D(\xi_i) = d$

Случайная величина $\sum_{i=1}^N \left[(\xi_i - m) / \sqrt{d} \right]$

при $N \rightarrow \infty$ приобретает нормальное распределение с плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Теорема 2 (теорема Ляпунова)

ξ_i ; ($i = 1, \dots, N$) – независимые случайные величины.

Математические ожидания $M(\xi_i) = a_i$

Дисперсии $D(\xi_i) = b_i^2$

Конечные третьи моменты $M|\xi_i - a_i|^3 = c_i$

Обозначения:

$$A_N = \sum_{i=1}^N a_i$$

$$B_N^2 = \sum_{i=1}^N b_i^2$$

$$C_N^2 = \sum_{i=1}^N c_i^2$$

Если $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{C_N}{B_N} \right) = 0$ то при $N \rightarrow \infty$

$$P \left\{ \left| \frac{\sum_{i=1}^N \xi_i - A_N}{B_N} \right| < x \right\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

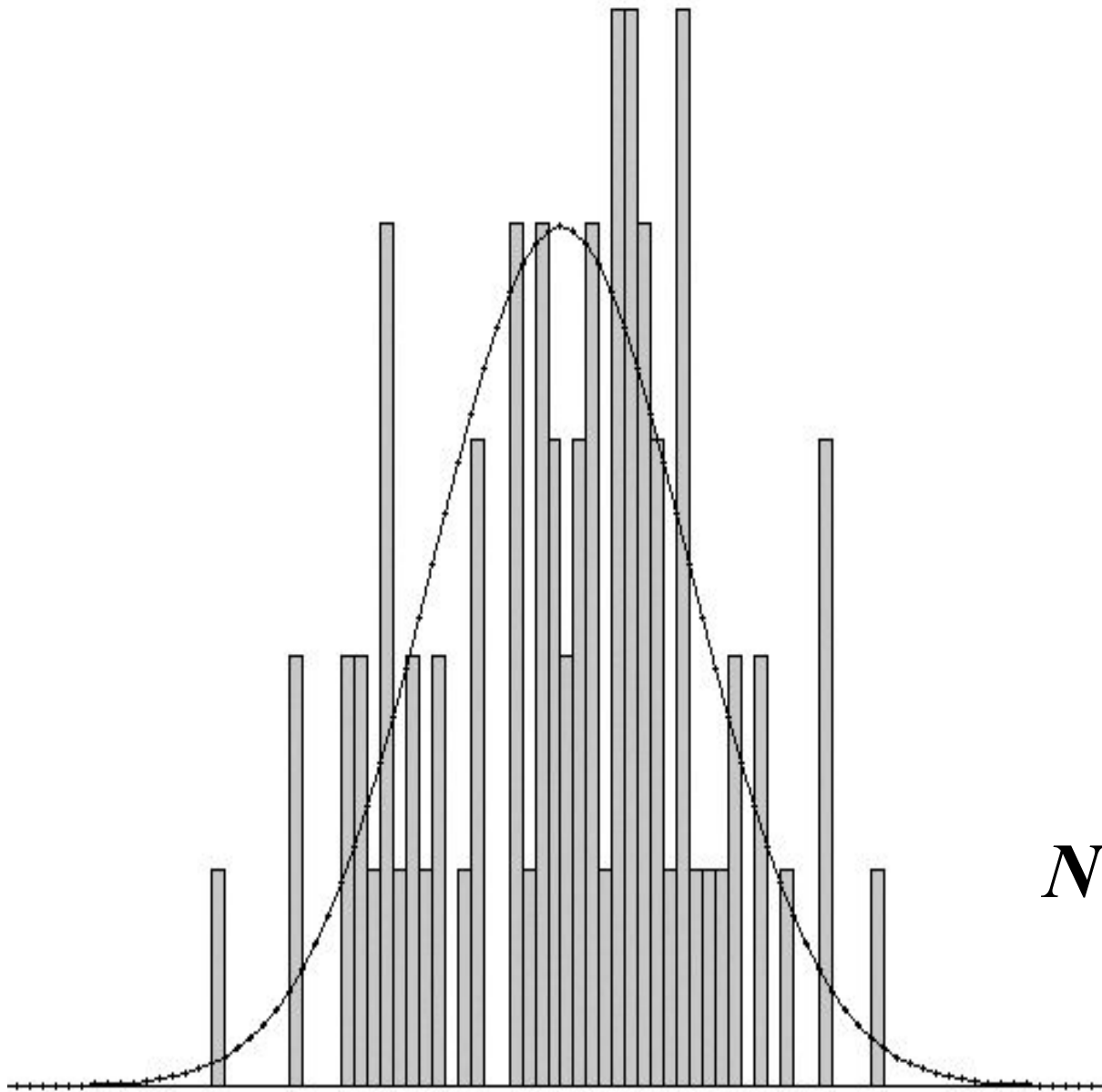
где:

$$A_N = \sum_{i=1}^N a_i \quad B_N^2 = \sum_{i=1}^N b_i^2 \quad C_N^2 = \sum_{i=1}^N c_i^2$$

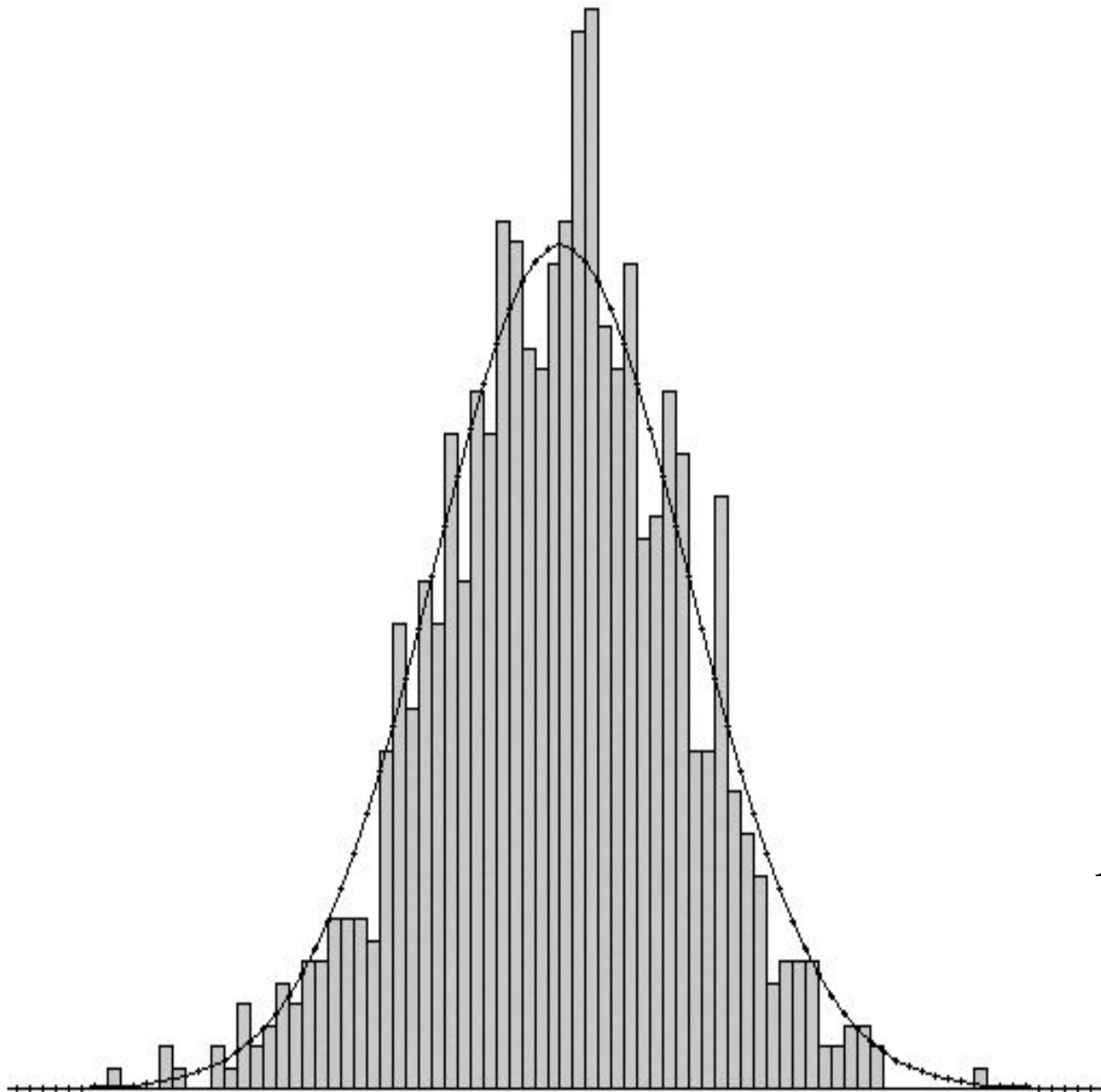
Нормированная сумма **любых независимых** случайных величин при $N \rightarrow \infty$ имеет **нормальное** распределение.

На следующих слайдах показаны графики распределений нормированных сумма равномерно распределенных непрерывных случайных величин при различном количестве слагаемых N .

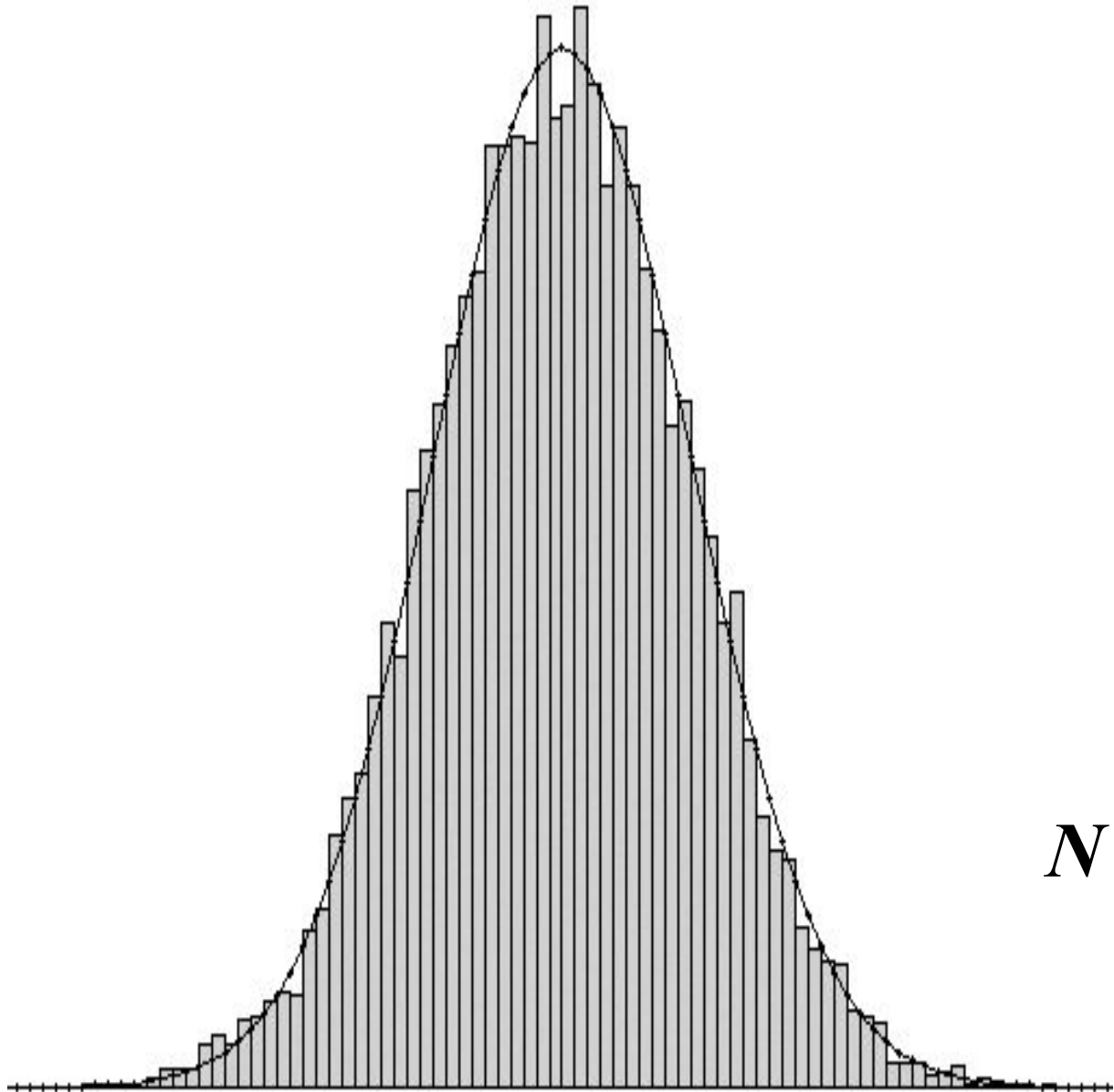
Видно, что с ростом N распределение приближается к **нормальному распределению**.



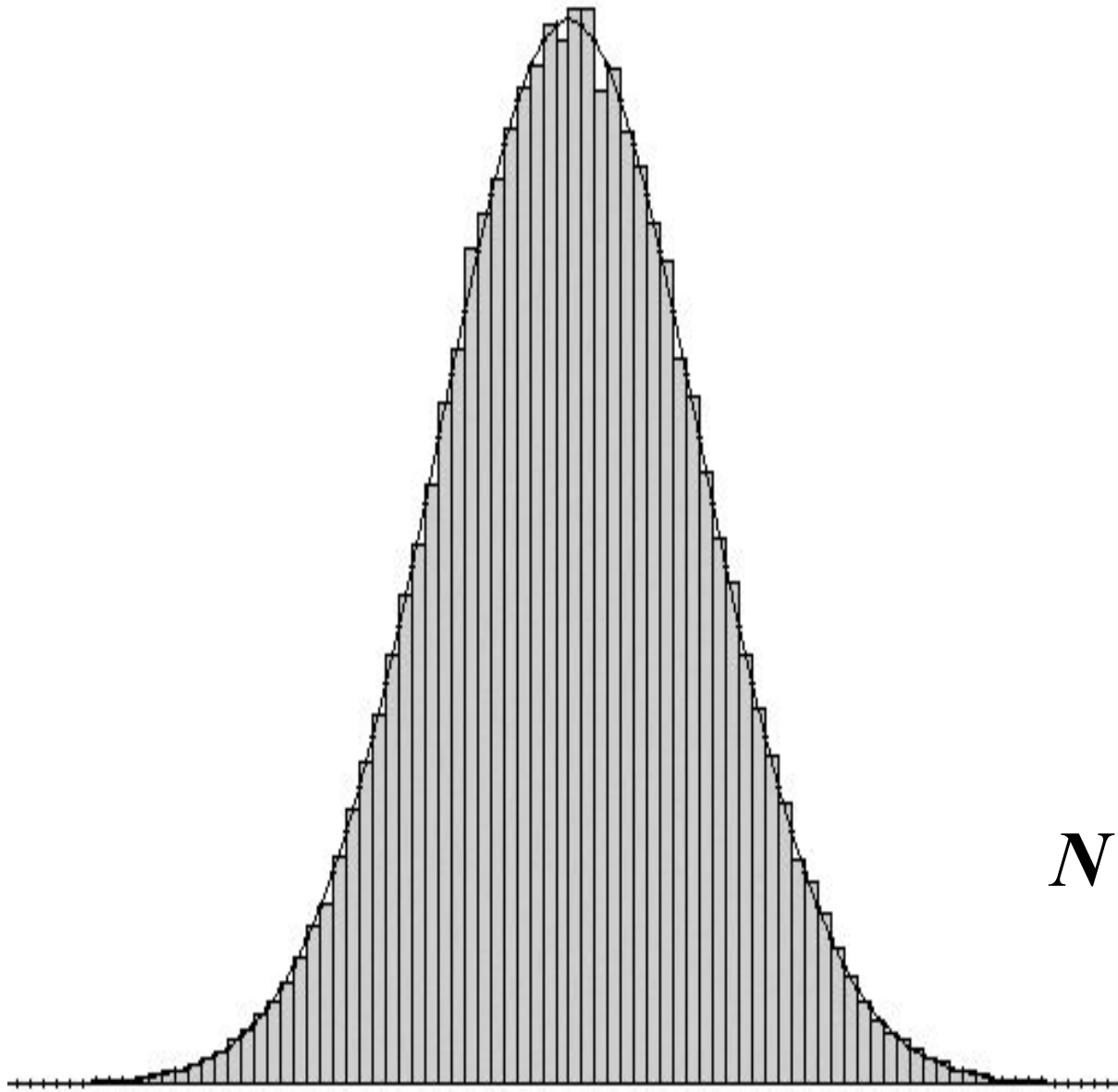
$N = 100$



$N = 1000$



$N = 10000$



$N = 100000$