Предельные теоремы

Теорема Пуассона

Биномиальная случайная величина с параметрами $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{p}$.

Пусть число N неограниченно возрастает, при этом вероятность $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} / \boldsymbol{N}$, где $\boldsymbol{a}$ – const.

$$P(\xi_B = k) = C_N^k p^k (1 - p)^{N-k} \qquad (6.1)$$

Подставим $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} / \boldsymbol{N}$ в (6.1)

$$\frac{N(N-1)\ldots(N-k+1)}{k!}\left(\frac{a}{N}\right)^k \left(1 - \frac{a}{N}\right)^N \left(1 - \frac{a}{N}\right)^{-k}$$

$$\frac{N(N-1)...(N-k+1)}{k!}\left(\frac{a}{N}\right)^k\left(1-\frac{a}{N}\right)^N\left(1-\frac{a}{N}\right)^{-k}$$

Вынесем общий множитель, не содержащий $\boldsymbol{N}$

$$\frac{a^k}{k!}\left[\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)...\left(1-\frac{k-1}{N}\right)\right]\left(1-\frac{a}{N}\right)^N\left(1-\frac{a}{N}\right)^{-k}$$

Предельный переход при $\boldsymbol{N} \to \infty$

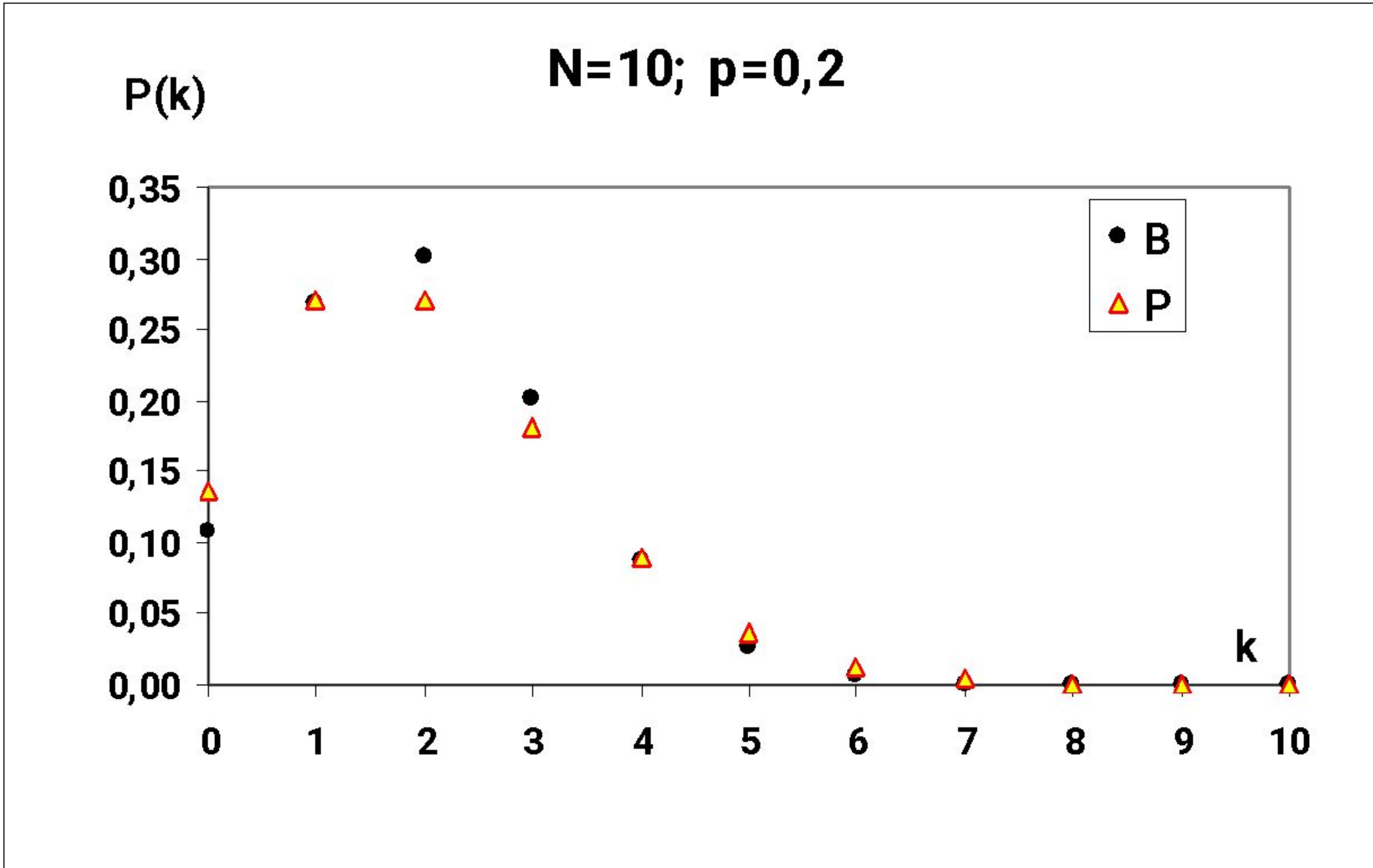
$$P(\xi_B = k) = C_N^k p^k \left(1 - p\right)^{N-k}$$

$$\xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{a^k}{k!}\left(1 - \frac{a}{N}\right)^N \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{a^k}{k!}e^{-a}$$

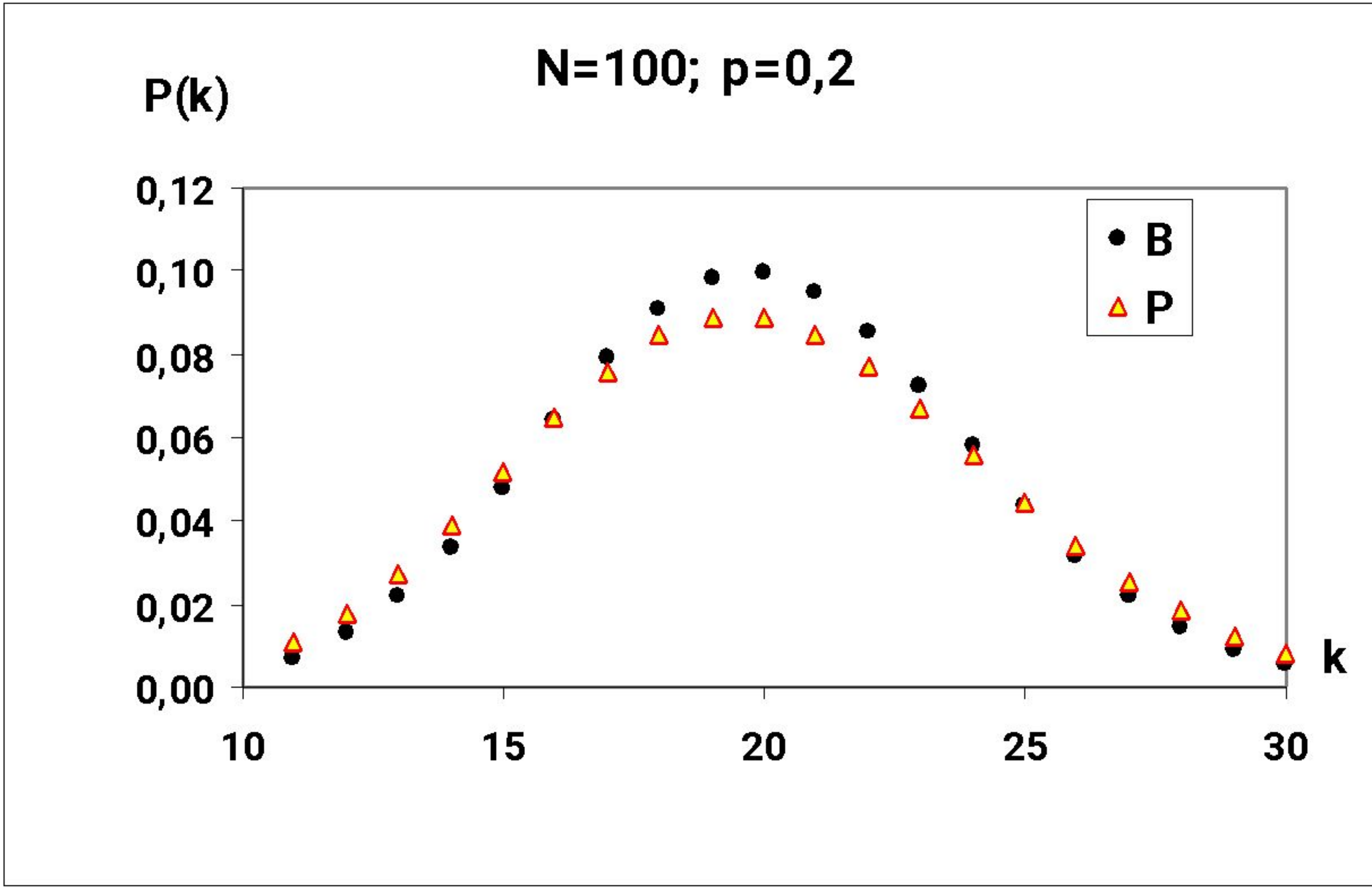
Вывод: при большом значении параметра $\boldsymbol{N}$ и малом значении параметра $\boldsymbol{p}$ распределение Бернулли совпадает с распределением Пуассона

Параметр распределения Пуассона равен произведению параметров распределения Бернулли:

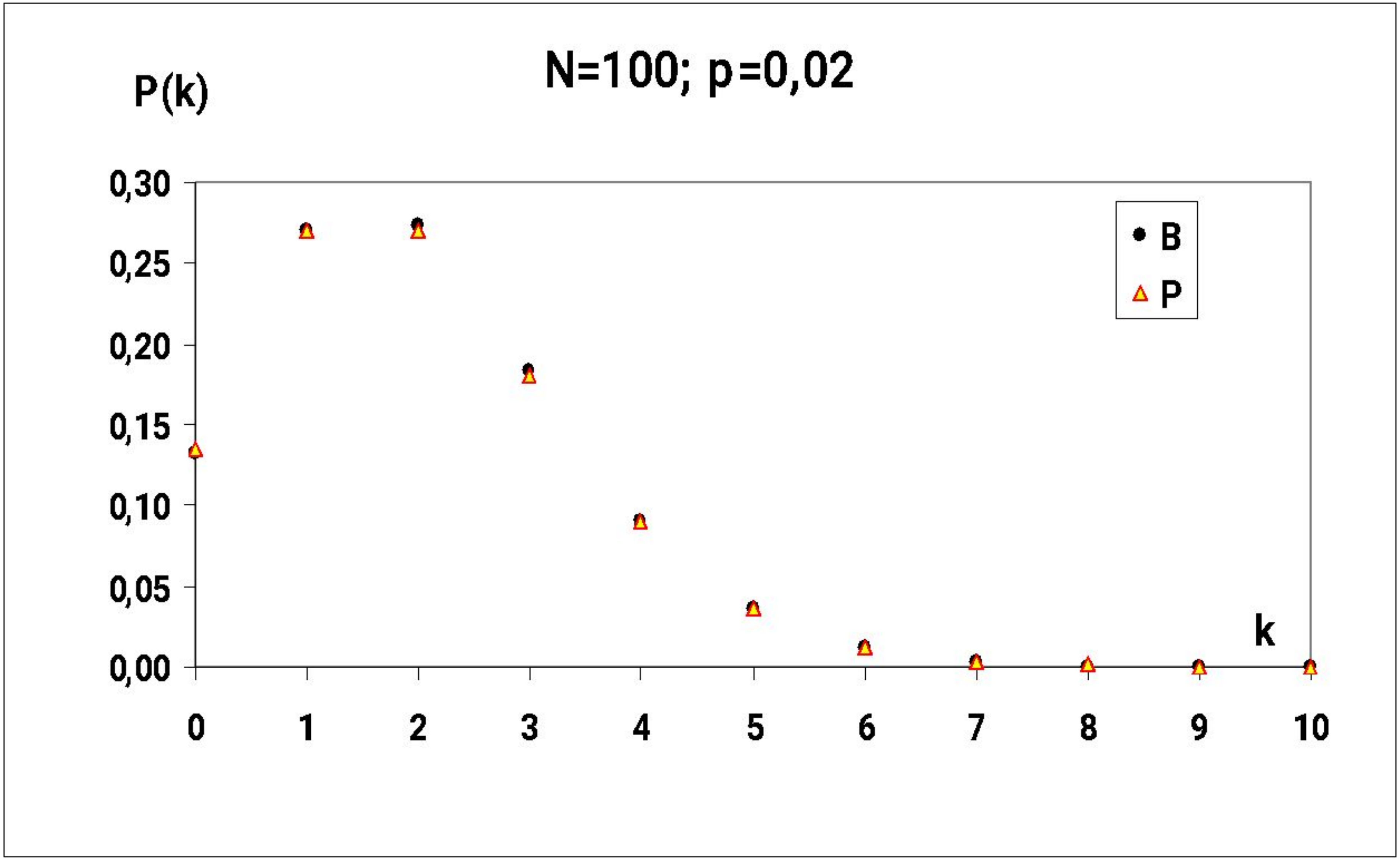
$$\boldsymbol{a = N\,p}$$



$$a = Np = 2$$



$$a = Np = 20$$



$$a = Np = 2$$

Хорошее совпадение распределения Бернулли с распределением Пуассона наблюдается при значении параметра $N > 100$, и параметра распределения Пуассона a не сильно отличающегося от единицы.

Теорема Муавра – Лапласа

Биномиальная случайная величина с параметрами $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{p}$.

Вероятность того, что значение этой случайной величины k находится в интервале $[k_1, k_2]$

$$P\{k_1 \le k \le k_2\} = \sum_{k=k_1}^{k=k_2} C_N^k p^k (1-p)^{N-k}$$

Рассмотрим предельный переход при $\boldsymbol{N} \to \infty$

Согласно **теореме Муавра – Лапласа,** справедлив следующий предельный переход:

$$P\left\{k_1 \le k \le k_2\right\} \xrightarrow[N \to \infty]{} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

где: $\boldsymbol{\mu = Np,\ \sigma^2 = Np(1-p)}$

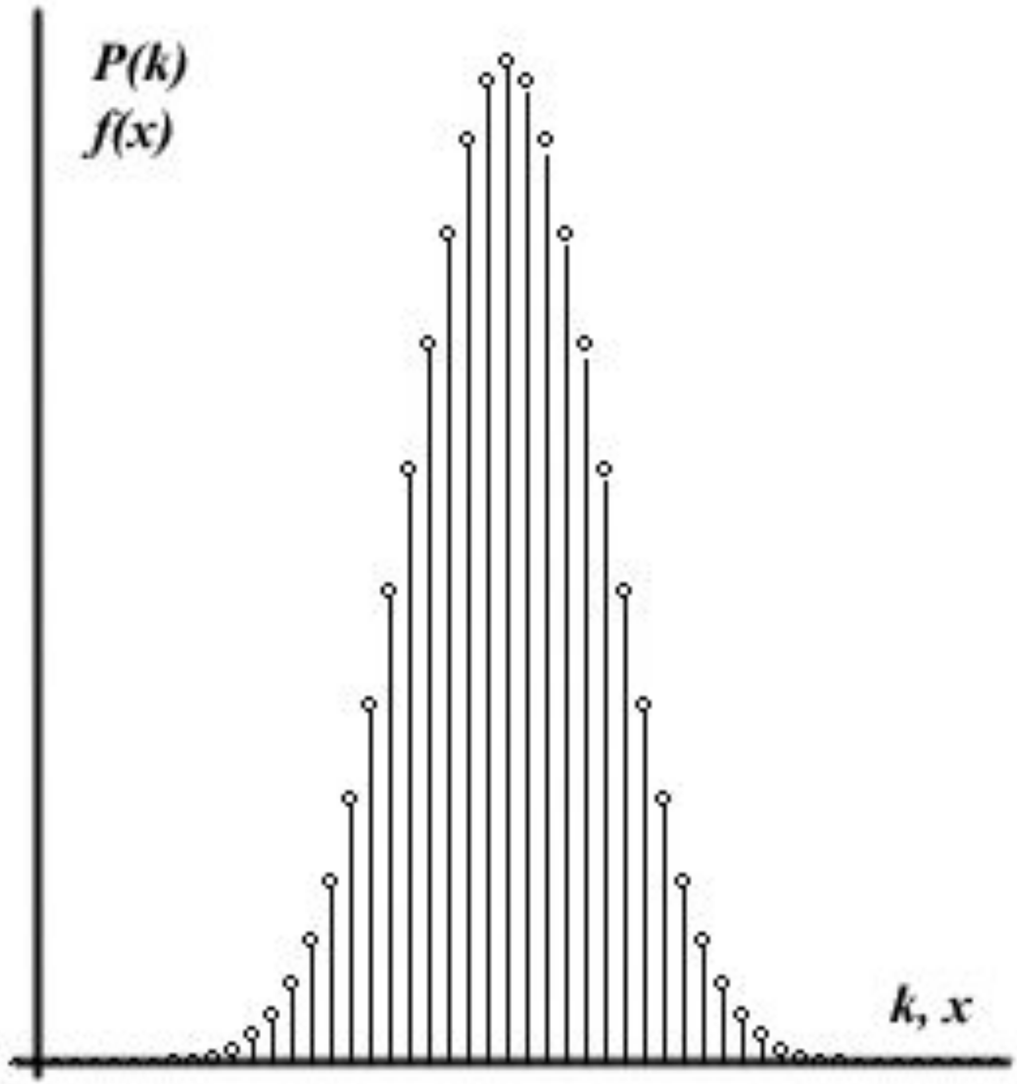
$$x_1 = \frac{k_1 - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \qquad x_2 = \frac{k_2 - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}$$

Это означает, что при очень больших значениях параметра N и при большом значении произведения параметров Np распределение Бернулли может заменятся нормальным (гауссовым) распределением.

Сумма вероятностей **биномиальной случайной величины** заменяется интегралом от плотности вероятности **нормальной случайной величины**.

Параметр $\boldsymbol{\mu}$ (математическое ожидание) равен произведению Np

Параметр $\boldsymbol{\sigma}^2$ (дисперсия) равен $Np(1-p)$



N = 100 ; p = 0,4.

Вертикальные черточки – вероятности для биномиального распределения.

Кружки – значения плотности нормальной случайной величины.

$$\mu = Np = 40; \quad \sigma^2 = Np(1 - p) = 24$$

Как вычислить определенный интеграл в правой части теоремы Муавра-Лапласа?

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]dx$$

Замена переменной: $\mathbf{z = (x - \mu) / \sigma}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_1}^{z_2}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz$$

Функция Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

Интеграл с переменным верхним пределом от **нормированной** функции Гаусса

$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Это плотность гауссовой случайной величины с параметрами **μ = 0** и **σ = 1**

Свойства функции Лапласа

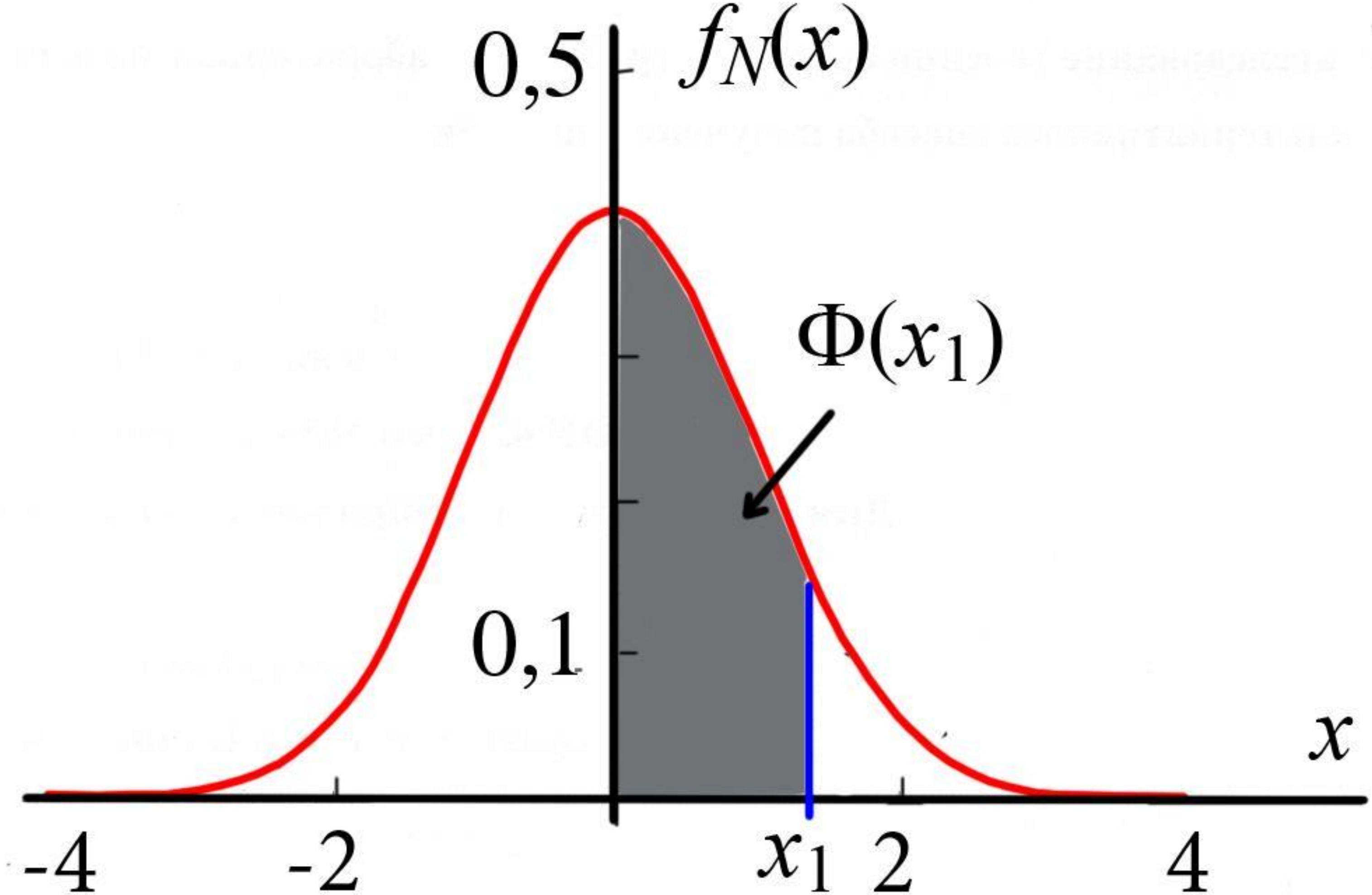
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

1. $\mathbf{\Phi(x=0) = 0}$

2. $\mathbf{\Phi(-x) = -\Phi(x)}$.

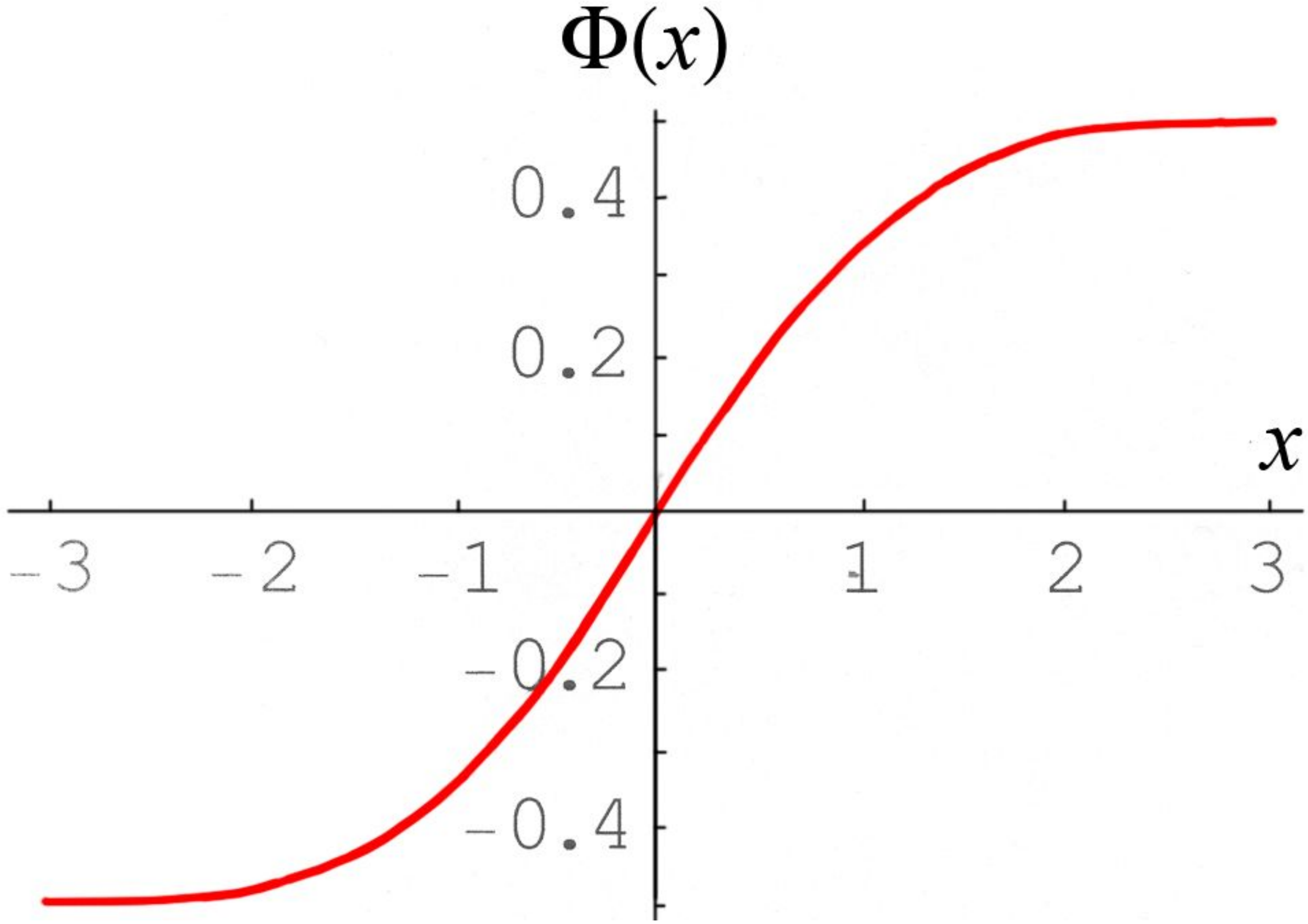
3. Функция Лапласа быстро стремится к **0,5**.

$\mathbf{\Phi(x = 3) = 0{,}49865}$; $\mathbf{\Phi(x = 5) = 0{,}49999997}$.



$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2} \right)$$

График функции Лапласа



$\boldsymbol{k}$ - значение биномиальной случайной величины с параметрами $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{p}$.

$$P\left\{k_1 \leq k \leq k_2\right\} = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

где Ф – функция Лапласа, x_1 и x_2 – её аргументы:

$$x_1 = \frac{k_1 - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \qquad x_2 = \frac{k_2 - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}$$

Центральная предельная теорема

ξ_i ; $(i = 1, \ldots, N)$ – случайные величины

$$\zeta_N = \sum_{i=1}^{N} \xi_i$$

Если $N \to \infty$, то при ***весьма общих условиях*** случайная величина ζ_N имеет **нормальное** (гауссово) распределение вероятностей.

Теорема 1

ξ_i ; $(i = 1, \ldots, N)$ – **попарно независимые** случайные величины, имеющие **одинаковые распределения**.

Математические ожидания $M(\xi_i) = a$

Дисперсии $D(\xi_i) = d$

Случайная величина $$\sum_{i=1}^{N} \left[\left(\xi_i - m \right) / \sqrt{d} \, \right]$$

при $\boldsymbol{N} \to \infty$ приобретает нормальное распределение с плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2} \right)$$

Теорема 2 (теорема Ляпунова)

ξ_i ; $(i = 1, \ldots, N)$ – **независимые** случайные величины.

Математические ожидания $M(\xi_i) = a_i$

Дисперсии $D(\xi_i) = b_i^2$

Конечные третьи моменты $M|\xi_i - a_i|^3 = c_i$

Обозначения:

$$A_N = \sum_{i=1}^{N} a_i \qquad B_N^2 = \sum_{i=1}^{N} b_i^2 \qquad C_N^2 = \sum_{i=1}^{N} c_i^2$$

Если $\lim_{N\to\infty}\left(\frac{C_N}{B_N}\right)=0$ то при $N\to\infty$

$$P\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{N}\xi_i - A_N}{B_N}\right| < x\right\} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$$

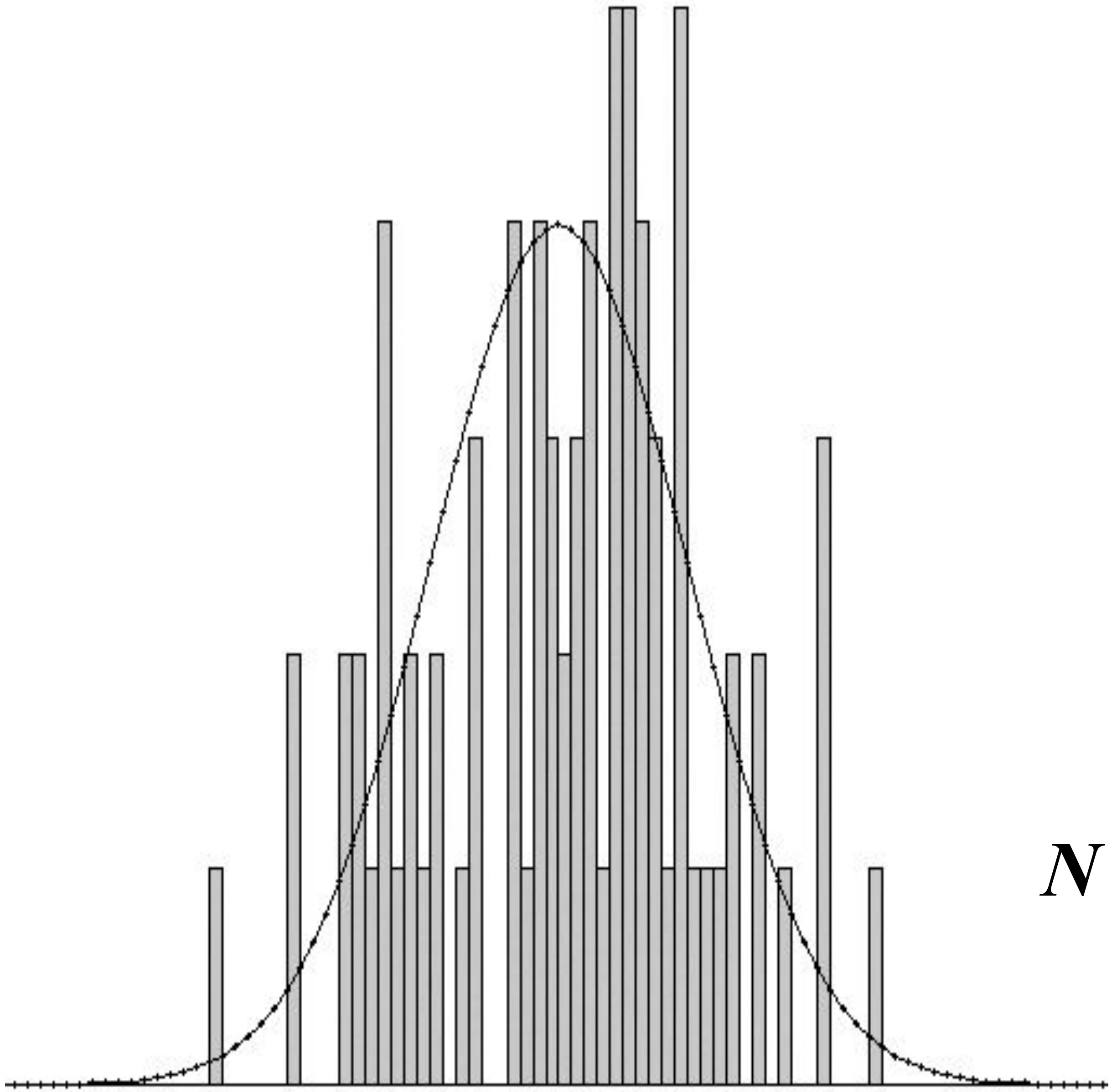
где:

$$A_N = \sum_{i=1}^{N} a_i \qquad B_N^2 = \sum_{i=1}^{N} b_i^2 \qquad C_N^2 = \sum_{i=1}^{N} c_i^2$$

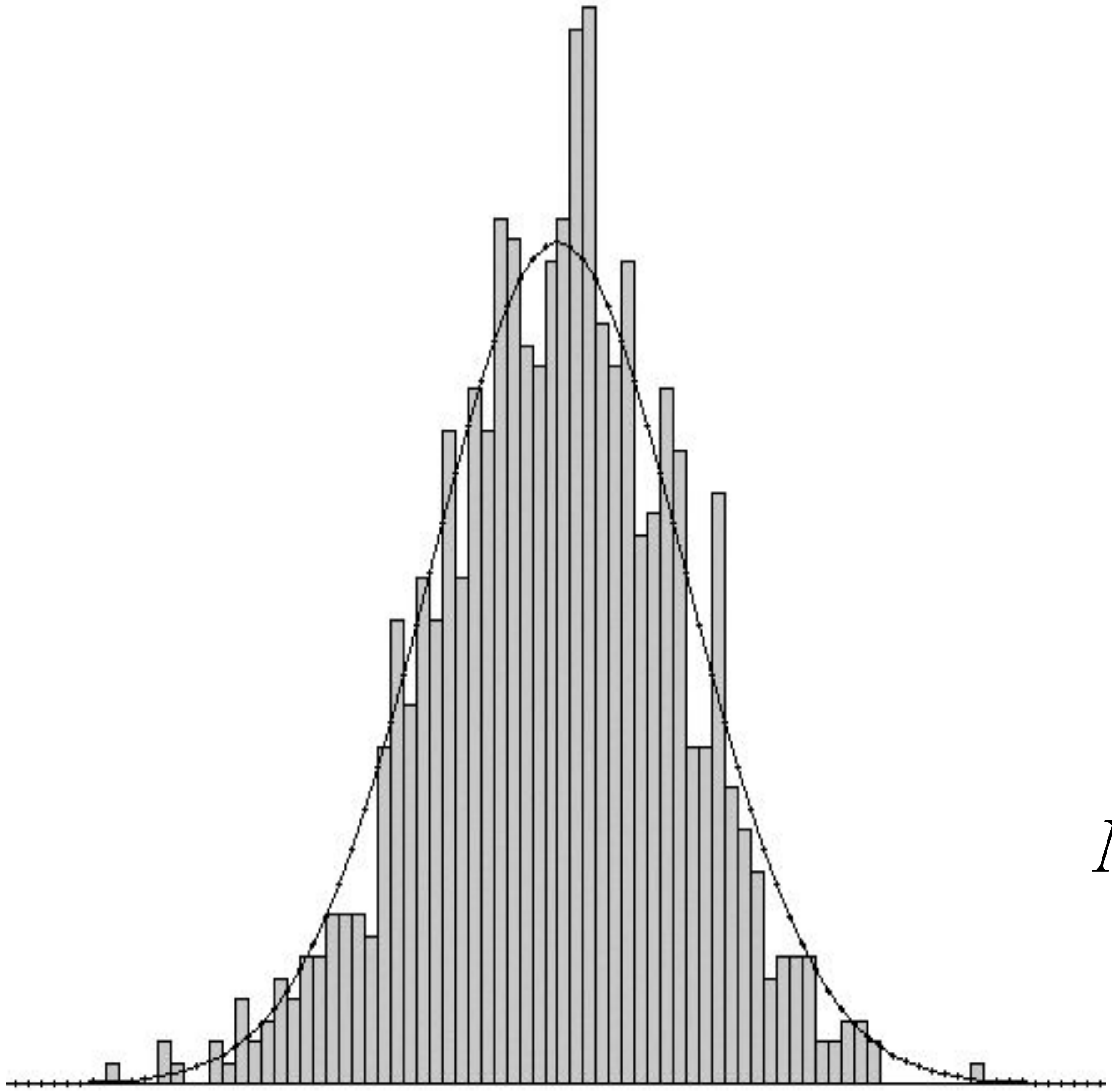
Нормированная сумма **любых независимых** случайных величин при $N \rightarrow \infty$ имеет **нормальное** распределение.

На следующих слайдах показаны графики распределений нормированных сумма равномерно распределенных непрерывных случайных величин при различном количестве слагаемых $\boldsymbol{N}$**.**

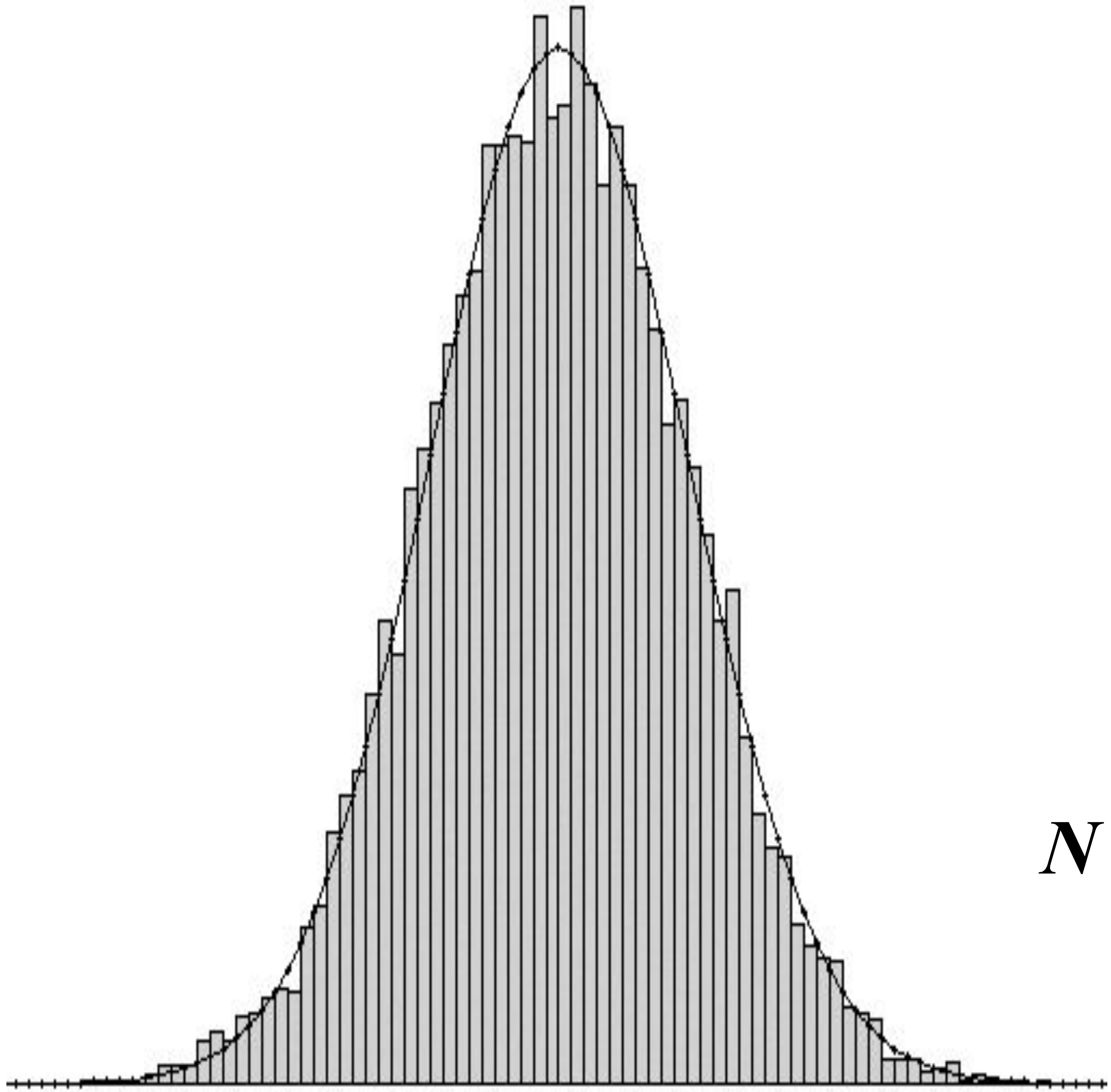
Видно, что с ростом N распределение приближается к **нормальному распределению**.



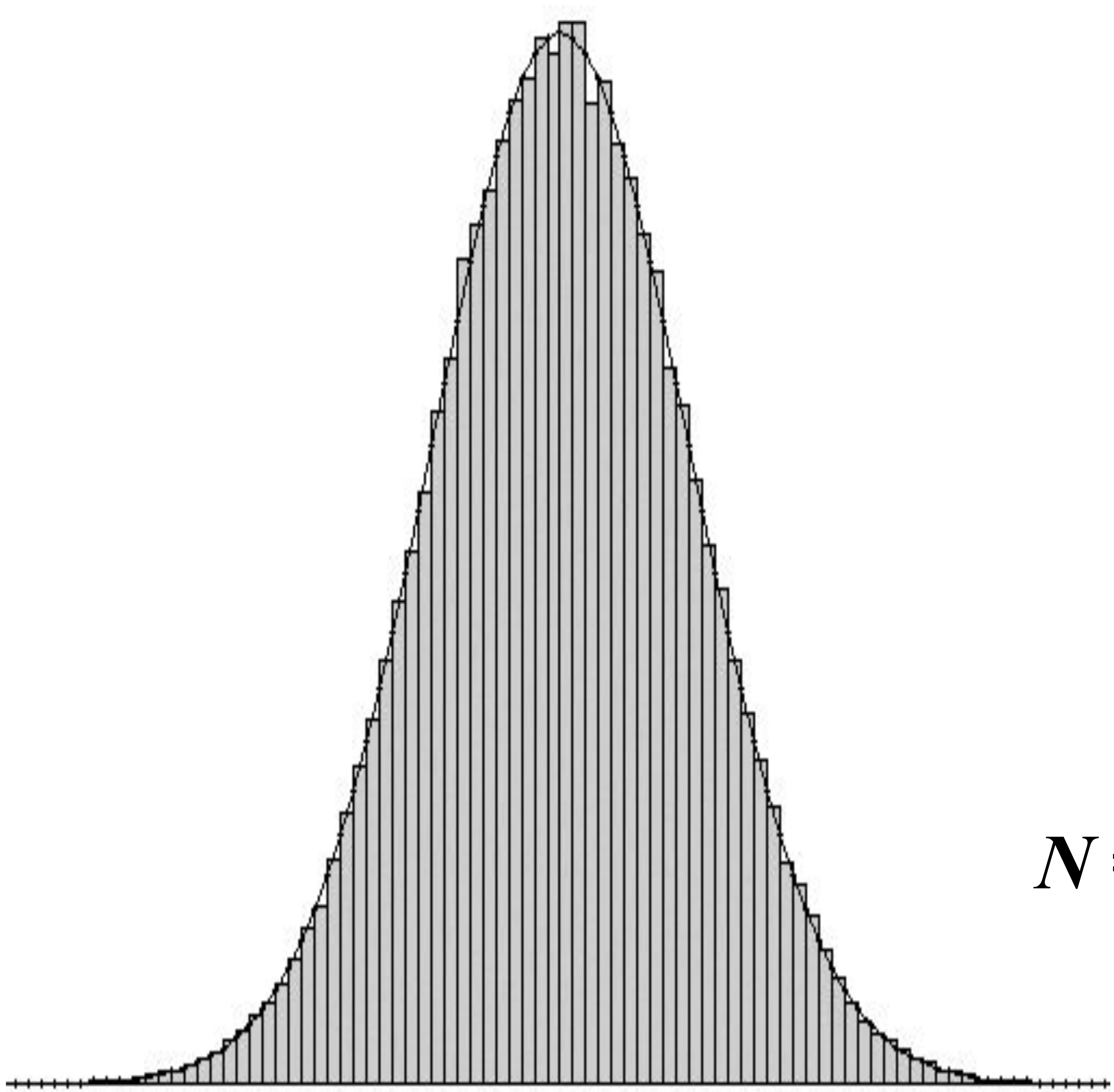
$N = 100$



$N = 1000$



$N = 10000$



$N = 100000$