Простейшие тригонометрические уравнения

При $0 < a < 1$ удобно пользоваться формулами

$\sin x = -a \Rightarrow x = (-1)^{n+1} \arcsin a + \pi n, n \in Z$ и

$\cos x = -a \Rightarrow x = \pm(\pi - \arccos a) + 2\pi k, k \in Z.$

Пример 1. Решим уравнение $2\sin x = \sqrt{3}$.

▲ Разделив обе части данного уравнения на 2, получим уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Решение этого уравнения находится по формуле (1):

$x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k,\ k \in Z$. Так как $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, то это решение записывается в виде $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$. ■

Пример 2. Решим уравнение $\sqrt{2}\cos x = 1$.

▲ Умножим данное уравнение на число $\frac{\sqrt{2}}{2}$: $\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. По формуле (3) $x = \pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k,\ k \in z$ или $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in z$. ■

Пример 3. Решим уравнение $3\,\mathrm{ctg}\,x = \sqrt{3}$.

▲ Данное уравнение запишем так: $\mathrm{ctg}\,x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, т.к. $\mathrm{arcctg}\,\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$, то по формуле (6) $x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in z$. ■

Пример 4. Решим уравнение $2\,\mathrm{tg}\,x = 1$.

▲ Данное уравнение запишем так: $\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{2}$. Отсюда по формуле (5) $x = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} + \pi k,\ k \in z$. Не каждый угол можно выразить через π. Поэтому во многих случаях ответы записываются в указанном виде. ■

Упражнения

А

В упражнениях **3.1–3.6, 3.8–3.11** решите уравнения.

3.1. 1) $\cos 2x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin\frac{x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg} 3x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3.2. 1) $\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$;

3) $\operatorname{tg} 2x = -1$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = -\sqrt{3}$.

3.3. 1) $2\sin x - 1 = 0$; 2) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$;

3) $3\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$; 4) $\sqrt{3}\operatorname{ctg} x + 1 = 0$.

3.4. 1) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0,5$; 2) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$; 4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{3}$.

3.5. 1) $4\sin x + 3 = 0$; 2) $7\cos x - 2 = 0$;

3) $\operatorname{tg} 3x + 10 = 0$; 4) $12\operatorname{ctg} 2x = 5$.

3.6. 1) $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$; 2) $2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$;

3) $\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1$; 4) $\operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

Б

Выполните №№3.1-3.6 (2,4)