Логарифм числа и его свойства.

Определение. ***Логарифмом положительного числа b по положительному и отличному от 1 основанию a*** *называется показатель степени x, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b.*

Запись $\log_a b = x$ читается так: “Логарифм числа b по основанию a равен x”.

$$\boxed{\begin{array}{l} \log_a b = c \\ a>0, \neq 1 \end{array}} \quad <=> \quad \boxed{\begin{array}{l} a^c = b \\ b > 0 \end{array}}$$

Итак, из определения логарифма числа следует, что

$$\boxed{\begin{array}{c} a^{\log_a b} = b \\ a>0,\ a\neq 1,\ b > 0 \end{array}} \qquad (2)$$

Равенство (2) принято называть *основным логарифмическим тождеством.*

ПРИМЕР

1. Найдем логарифмы чисел 25, 625 и $\frac{1}{125}$ по основанию 5.

Решение. Логарифм числа 25 по основанию 5 есть 2, так как $5^2 = 25$ или $\log_5 25 = 2$.

Логарифм числа 625 по основанию 5 есть 4, так как $5^4 = 625$ или $\log_5 625 = 4$.

Логарифм числа $\frac{1}{125}$ по основанию 5 есть −3, так как $5^{-3} = \frac{1}{125}$ или $\log_5 \frac{1}{125} = -3$.

Ответ: 2; 4; −3.

ПРИМЕР

2. 1) $3^{\log_3 27} = 27$; 2) $5^{\log_5 125} = 125$; 3) $10^{\log_{10} \frac{1}{100}} = \frac{1}{100}$.

Теперь рассмотрим решение примеров вида: 1) $a^x = b$; 2) $x^a = b$; 3) $a^c = x$, где по двум данным числам требуется найти третье число.

ПРИМЕР

3. Найдем логарифм числа 27 по основанию 9.

Решение. Пусть $\log_9 27 = x$, тогда $9^x = 27$ или $(3^2)^x = 3^3$, откуда $2x = 3$, $x = \frac{3}{2}$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

ПРИМЕР

4. Найдем, при каком основании логарифм числа 16 равен 4.

Решение. Поскольку основание логарифма неизвестно, то можно написать: $\log_x 16 = 4$. По определению логарифма имеем: $16 = x^4$ или $2^4 = x^4$, откуда $x = 2$.

Ответ: 2.

ПРИМЕР

5. Найдем число, логарифм которого при основании 81 равен $-\frac{3}{4}$.

Решение. Обозначим искомое число через x, тогда $\log_{81} x = -\frac{3}{4}$. По определению логарифма числа можно записать: $x = 81^{-\frac{3}{4}}$ или $x = \frac{1}{\sqrt[4]{81^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3^{12}}} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$, т. е. $x = \frac{1}{27}$.

Ответ: $\frac{1}{27}$.

ПРИМЕР

6. Найдем логарифмы следующих чисел:

1) 0,125 по основанию 2; 2) $\sqrt{2}$ по основанию $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ по основанию 3.

Решение. 1) $\log_2 0{,}125 = -3$, так как $0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8} = 2^{-3}$;

2) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} = -\frac{1}{2}$, так как $\sqrt{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 3) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$, так как $\frac{1}{\sqrt{3}} = 3^{-\frac{1}{2}}$.

Ответ: 1) -3; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{2}$.

Свойства логарифма:

1) *Логарифм числа а по основанию а (а — любое положительное число) равен единице:*

$$\log_a a = 1.$$

2) *Логарифм числа 1 по основанию а равен нулю:*

$$\log_a 1 = 0.$$

3) *Логарифм произведения двух или нескольких положительных чисел равен сумме логарифмов сомножителей:*

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c.$$

4) *Логарифм частного или дроби равен разности логарифмов числителя и знаменателя:*

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c,$$ где b и c — положительные числа.

5) *Логарифм степени равен показателю степени, умноженному на логарифм основания степени:*

$$\log_a b^n = n \log_a b.$$

6) *Формула перехода к новому основанию:*

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

ПРИМЕР

7. Найдем: 1) $\log_3(243 \cdot 729)$; 2) $\log_5 \dfrac{0{,}008}{125}$; 3) $\log_3 \log_4 \sqrt[9]{4}$.

Решение. 1) $\log_3(243 \cdot 729) = \log_3 243 + \log_3 729 = 5 + 6 = 11$;

2) $\log_5 \dfrac{0{,}008}{125} = \log_5 0{,}008 - \log_5 125 = -3 - 3 = -6$; 3) $\log_3 \log_4 4^{\frac{1}{9}} =$

$= \log_3\left(\dfrac{1}{9}\log_4 4\right) = \log_3\left(\dfrac{1}{9} \cdot 1\right) = \log_3 3^{-2} = -2.$

Ответ: 1) 11; 2) −6; 3) −2.

ПРИМЕР

8. Дан логарифм числа N по основанию a^k. Нужно найти логарифм этого же числа по другому основанию a.

Решение. По формуле перехода к новому основанию имеем:

$$\log_{a^k} N = \frac{\log_a N}{\log_a a^k} = \frac{\log_a N}{k} = \frac{1}{k} \cdot \log_a N.$$

Следовательно, можем записать равенство $\log_{a^k} N = \dfrac{1}{k}\log_a N$.

Все вышеперечисленные свойства позволяют осуществить действие “нахождение логарифма” — логарифмирование любого алгебраического выражения.

Умение логарифмировать выражения позволяет по данному результату логарифмирования обратно найти то выражение, от которого получился этот результат.

Например, если $\log_a x = \log_a b + 3\log_a c - 4\log_a d$, то нетрудно сообразить, что $x = \frac{bc^3}{d^4}$.

Эту операцию называют *потенцированием*.

Одна из особенностей логарифма заключается в том, что если a и b — положительные числа, причем $a \neq 1$, то для любого числа $k \neq 0$ имеет место равенство: $\log_a b = \log_{a^k} b^k$.

Например, $\log_3 4 = \log_{3^2} 4^2 = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{4}$ и т. д.

Определение. *Логарифм числа по основанию* 10 *называется **десятичным логарифмом.*** $\lg x = \log_{10} x$

Для обозначения десятичных логарифмов используется знак $\lg$, при этом число 10, указывающее основание, не пишется.

Например, вместо $\log_{10}217$ пишется $\lg 217$; вместо $\log_{10}9$ пишется $\lg 9$ и т. д.

Десятичные логарифмы обладают тремя специфическими свойствами:

1) десятичный логарифм целого положительного числа, изображенного единицей с последующими нулями, есть целое положительное число, равное количеству нулей в записи данного числа, т. е. если $a = 10^n$, то $\lg a = \lg 10^n = n$;

2) десятичный логарифм положительной десятичной дроби, изображенной единицей с предшествующими нулями, равен n, где n — число нулей в записи этого числа, считая и нуль целых, т. е. при $a = 10^{-n}$, то $\lg a = \lg 10^{-n} = -n$;

3) десятичный логарифм рационального числа, не равного целой или нулевой степени числа 10, есть число иррациональное.

Например, $\lg 3$, $\lg 7$, $\lg 0{,}34$, $\lg 15$ — числа иррациональные.

Десятичные логарифмы являются очень удобными для упрощения вычислений. Однако при изучении высшей математики более удобными оказываются логарифмы по основанию $e = 2{,}7182818289...$.

...

Определение. *Логарифм по основанию числа e называется* ***натуральным логарифмом.***

Для обозначения натурального логарифма используется знак ln.

Например, вместо $\log_e 13$ пишется ln13.

$\ln x = \log_e x$ - так как основание натурального логарифма равно числу e.

Домашнее задание:
Выписать определение логарифма
Составить таблицу свойств логарифма.
Записать определения десятичного и натурального логарифмов
Решить №20.3, №20.4

20.1. Найдите логарифмы чисел 1; 9; 81; 243; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{27}$ по основанию 3.

Вычислите (20.2—20.3):

20.2. 1) $\log_2 16$; 2) $\log_{0,2} 0,04$; 3) $\log_3 \frac{1}{81}$;

4) $\log_{\frac{1}{3}} 9$; 5) $\log_{23} 1$; 6) $\log_5 \frac{1}{125}$.

20.3. 1) $\log_5 22 - \log_5 11 - \log_5 10$;

2) $\log_2 7 - \log_2 63 + \log_2 36$;

3) $\log_3 8 - \log_3 4 + \log_3 \frac{9}{2}$;

4) $\log_7 64 - \log_7 256 + \log_7 28$.

20.4. Напишите следующие показательные равенства в виде логарифмических:

1) $3^6 = 729$; 2) $4^5 = 1024$; 3) $10^4 = 10\,000$;

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$; 5) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$; 6) $10^{-3} = 0,001$.