Логика высказываний

Алгебра высказываний

1. Отношение равносильности формул
2. Истинностные функции
3. СНФ истинностных функций
4. Полные системы истинностных функций
5. Виды формул алгебры высказываний и их классификация

1. Изучить литературу.
2. Прослушать лекцию.
3. Разработать конспект.

Если дана некоторая формула F и каждой ее пропозициональной переменной приписано значение "и" или "л", то говорят что дана интерпретация формулы F.

Все множество формул логики высказываний можно разбить на три класса: тождественно истинные, тождественно ложные и теоремы. В каждом классе может быть перечислимое и счетное множество формул.

Поиск алгоритма, определяющего к какому классу принадлежит та или иная формула, формирует проблему разрешимости исчисления высказываний.

Отношение равносильности формул

Определение. Две формулы F1 и F2 называют равносильными (F1 ≡ F2), если они имеют одинаковое значение «истина» или «ложь» при одинаковых наборах пропозициональных переменных. Если две формулы равносильны F1 ≡ F2, то они эквивалентны между собой, т.е. (F1↔F2). И наоборот, если формулы эквивалентны (F1↔F2), то они равносильны (F1 ≡ F2).

Истинностные функции

Совершенные нормальные формы истинностных функций функций

Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы формулы **(ДНФ и КНФ).**

Формулы, построенные особым образом из высказывательных переменных с помощью только операций дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, называют ДИЗЪЮНКТИВНЫМИ и КОНЪЮНКТИВНЫМИ НОРМАЛЬНЫМИ ФОРМАМИ (ДНФ и КНФ).

Пусть задана система высказывательных переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Элементарной дизъюнкцией высказывательных переменных из системы называется дизъюнкция некоторых высказывательных переменных этой системы или их отрицаний.

Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы формулы (ДНФ и КНФ).

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ КОНЪЮНКЦИЕЙ называется конъюнкция некоторых высказывательных переменных этой системы или их отрицаний. Если в элементарную дизъюнкцию (конъюнкцию) входит каждое высказывательное переменное из системы (с отрицанием или без него) и притом только один раз, то она называется ПОЛНОЙ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ДИЗЪЮНКЦИЕЙ (КОНЪЮНКЦИЕЙ).

Формула F называется КОНЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ (КНФ) от высказывательных переменных системы, если она является конъюнкцией элементарных дизъюнкций, образованных из высказывательных переменных этой системы.

Формула F называется ДИЗЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ (ДНФ) от высказывательных переменных системы, если она является дизъюнкцией элементарных конъюнкций, образованных из этих переменных.

Совершенные нормальные формы удобно записывать, используя таблицы истинности, по значениям пропозициональных переменных и значению описываемой формулы.

Элементарные коньюнкции СДНФ формируются для значений формулы “И”. Число элементарных коньюнкций равно числу истинных значений формулы.

Пропозициональные переменные, входящие в элементарную коньюнкцию, записываются без изменений, если их значение равно “И” и с логической связкой “⌉”, если их значение равно “Л”.

Совершенные нормальные формы удобно записывать, используя таблицы истинности, по значениям пропозициональных переменных и значению описываемой формулы.

Элементарные дизьюнкции СКНФ формируются для значений формулы “Л”. Число элементарных дизьюнкций равно числу ложных значений формулы. Пропозициональные переменные, входящие в элементарную дизьюнкцию, записываются без изменений, если их значение равно “Л” и с логической связкой “]”, если их значение равно “И”.

Пример. Записать СДНФ и СКНФ для функции, заданной таблицей истинности.

A	B	C	F(A,B,C)
Л	Л	Л	И
Л	Л	И	Л
Л	И	Л	Л
Л	И	И	И
И	Л	Л	И
И	Л	И	Л
И	И	Л	Л
И	И	И	И

Пример. Записать СДНФ и СКНФ для функции, заданной таблицей истинности.

a) Формула СДНФ:

$F(A,B,C) =$

$=(\rceil A \wedge \rceil B \wedge \rceil C) \vee (\rceil A \wedge B \wedge \rceil C) \vee (A \wedge \rceil B \wedge \rceil C) \vee (A \wedge B \wedge C);$

b) Формула СКНФ:

$F(A,B,C) =$

$=(A \vee B \vee \rceil C) \wedge (A \vee \rceil B \vee C) \wedge (\rceil A \vee B \vee \rceil C) \wedge (\rceil A \vee \rceil B \vee C).$

Полные системы истинностных функций

Система истинностных функций называется полной, если с помощью функций этой системы можно выразить любую истинностную функцию.

$\{\rceil, \wedge, \vee\}$

$\{\rceil, \wedge\}$

$\{\rceil, \vee\}$

$\{\rceil, \rightarrow\}$

$\{|\}$

$\{\downarrow\}$

Формулы

Общезначимая (тавтология, тождественно истинная $\models$)

Невыполнимая (противоречие, тождественно невыполнимая)

Нейтральная

Выполнимая

Необщезначимая

Важнейшие общезначимые формулы.

.

Формула, построенная на пропозициональных букв A_1, A_2, …, A_n и их отрицаний $\neg A_1$, $\neg A_2$, …, $\neg A_n$ с помощью только символов логических операций $\wedge$ и $\vee$.

A^+ - формула, полученная заменой $\wedge$ на $\vee$, $\vee$ на $\wedge$ каждой пропозициональной буквы A_i на $\neg A_i$ и наоборот.

Тогда $\neg A \equiv A^+$.

Предложение 1.

Формула $\models E$, построенная на атомах $P_1, P_2, \ldots, P_n$,

тогда формула $\models E^*$, полученная из E одновременной подстановкой формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$ вместо $P_1, P_2, \ldots, P_n$ соответственно.

(Подстановка вместо атомов.)

Предложение 1

Пусть E - формула, в которую входят только атомы $P_1, \ldots, P_n$ а E* - формула, полученная из E одновременной подстановкой формул $A_1, \ldots, A_n$ вместо $P_1, \ldots, P_n$ соответственно.

Если $\models E$, то $\models E^*$.

Предложение 2.

Если $\models A$ и $\models A \to B$,

то $\models B$.

Предложение 3.

$\models A \leftrightarrow B$ тогда и только тогда,

когда $A \equiv B$.

Предложение 4.

$\models$Е тогда и только тогда,
когда ¬Е –
противоречие.

(Подстановка вместо атомов.)

Предложение 2

Если $\models A$ и $\models A \rightarrow B$, то $\models B$.

Предложение 3

$\models A \leftrightarrow B$ тогда и только тогда, когда $A \equiv B$.

Предложение 4.

$\models E$ и тогда и только тогда, когда

$\neg E$ – противоречие.

Пример. Пусть **A** есть $\neg A \wedge (\neg B \vee C)$, тогда $\neg\mathbf{A} \equiv A \vee (B \wedge \neg C)$.

Упражнение. Постройте формулы отрицания :

(1) $(A \vee \neg B) \wedge A \wedge (\neg C \vee A) \wedge C$;

(2) $\neg A \wedge (B \vee \neg C) \vee A \wedge \neg B$;

(3) $B \vee C \vee \neg A \vee (A \vee \neg C)$.

Предложение. (принцип двойственности).

Пусть **A** и **B** – формулы такого же вида, что и в предложении 3. **A*** и **B*** – формулы, построенные на **A** и **B** заменой $\wedge$ на $\vee$, $\vee$ на $\wedge$. Тогда:

(a) Если $\models \neg \mathbf{A}$, то $\models \mathbf{A}^*$;

(b) Если $\models \mathbf{A}$, то $\models \neg \mathbf{A}^*$;

(c) Если $\models \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$, то $\models \mathbf{A}^* \leftrightarrow \mathbf{B}^*$;

(d) Если $\models \mathbf{A} \longmapsto \mathbf{B}$, то $\models \mathbf{B}^* \longmapsto \mathbf{A}^*$.

Доказательство.

Пример.

$\mathbf{A} = (A \wedge \neg A)$

$\models \neg \mathbf{A} \qquad \models \neg (A \wedge \neg A)$;

$\models \mathbf{A}^{+} \qquad \models \neg A \vee A;$

$\models \mathbf{A}^{*} \qquad \models \neg\neg A \vee \neg A;$

$\models A \vee \neg A$.

Правила замены и подстановки расширяют возможности эквивалентных преобразований формул сложных высказываний.

Важнейшие общезначимые формулы

Теорема. Следующие формулы алгебры высказываний являются тавтологиями:

Закон исключенного третьего

Закон отрицания противоречия

Закон двойного отрицание

Закон тождества

Закон контрапозиции

Закон силлогизма (правило цепного заключения)

Закон противоположности

Правило добавления антецедента («истина из чего угодно»)

Правило «из ложного – что угодно»

Правило модус поненс (m. p.)

Правило модус толленс (m.t.)

Правило перестановки посылок

Правило объединения (и разъединения) посылок

Правило разбора случаев

Правило привидения к абсурду ;

Пример

Показать , что посылки «Сегодня пасмурно и холоднее, чем вчера», «Если мы пойдем в поход, то погода будет солнечной», «Если мы не пойдем в поход, то пойдем на байдарках по реке», «Если мы пойдем на байдарках по реке, то вернемся домой поздно вечером» приведут к заключению «Мы вернемся домой поздно вечером».

Пусть «Сегодня солнечно» – p,

«Сегодня холоднее, чем вчера» – q,

«Мы пойдем в поход» – r,

«Мы пойдем на байдарках по реке» – s,

«Мы вернемся домой поздно вечером» – t.

Лекция 4

1. Исчисление высказываний.
2. Понятие булевой функции.
3. Элементарные функции. ДНФ и КНФ.
4. Контактные схемы.

Умозаключение - это мысль, в ходе которой из одного или нескольких суждений выводится новое суждение.

При этом исходные суждения называются ПОСЫЛКАМИ, а полученное суждение - ЗАКЛЮЧЕНИЕМ или СЛЕДСТВИЕМ. Аристотель приводил такой пример умозаключения: "Все люди смертны" и "Сократ - человек" - посылки. "Сократ смертен" - заключение. Переход от посылок к заключению происходит по ПРАВИЛАМ ВЫВОДА и законам логики.

ПРАВИЛО 1: Если посылки умозаключения истинны, то истинно и заключение.

ПРАВИЛО 2: Если умозаключение справедливо во всех случаях, то оно справедливо и в каждом частном случае. (Это правило ДЕДУКЦИИ - переход от общего к частному.)

ПРАВИЛО 3: Если умозаключение справедливо в некоторых частных случаях, то оно справедливо во всех случаях. (Это правило ИНДУКЦИИ - переход от частного к общего).

Важнейшие правила следования.

1. Если Г, А $\models$В, то Г $\models$ А$\to$В.

(Введение импликации ВИ).

2. Если Г, А $\models$С и Г, В $\models$ С, то Г , А$\vee$В $\models$ С
(Удаление дизъюнкции УД).

3. Если Г, А $\models$В, то Г, А $\models$ $\neg$В, то Г $\models$$\neg$А.

(Введение отрицания ВО).

.

Важнейшие правила следования.

4. Если $\Gamma \models A$, то $\Gamma \models A \to B$, то $\Gamma \models B$.

(Удаление импликации МР).

5. Если $\Gamma \models A$ и $\Gamma \models B$, то $\Gamma \models A \wedge B$.
(Введение конъюнкции ВК).

6. Если $\Gamma \models A \wedge B$, то $\Gamma \models A$.

(Первое удаление конъюнкции УК1).

7. Если $\Gamma \models A \wedge B$, то $\Gamma \models B$.

(Второе удаление конъюнкции УК2).

.

Важнейшие правила следования.

8. Если $\Gamma \models A$, то $\Gamma \models A \vee B$.

(Первое введение дизъюнкции ВД1).

9. Если $\Gamma \models B$, то $\Gamma \models A \vee B$.

(Второе введение дизъюнкции ВД2).

10. Если $\Gamma \models \neg\neg A$, то $\Gamma \models A$.

(Удаление двойного отрицания УДО).

11. Если $\Gamma \models A$ и $\Gamma \models \neg A$, то $\Gamma \models B$.

(Слабое удаление отрицания СУО).

.

Важнейшие правила следования.

12. Если Г $\models A \to B$ и Г $\models B \to A$, то Г $\models A \leftrightarrow B$.

(Введение эквиваленции ВЭ).

13. Если Г $\models A \leftrightarrow B$, то Г $\models A \to B$.

(Первое удаление эквиваленции УЭ1).

14. Если Г $\models A \leftrightarrow B$, то Г $\models B \to A$.

(Второе удаление эквиваленции УЭ2).

15. Если Г $\models \neg(A \wedge B)$, то Г $\models \neg A \vee \neg B$.

(Удаление отрицании конъюнкции УОК).

.

Важнейшие правила следования.

16. Если Г $\models \neg(A \vee B)$, то Г $\models \neg A \wedge \neg B$.

(Удаление отрицания дизъюнкции УОД).

17. Если Г $\models \neg(A \rightarrow B)$, то Г $\models A \wedge \neg B$.

(Удаление отрицания импликации УОИ).

18. Если Г $\models \neg(A \leftrightarrow B)$, то Г $\models (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$.

(Удаление отрицания эквиваленции УОЭ).

19. Если Г $\models A \rightarrow B$ и Г $\models B \rightarrow C$, то Г $\models A \rightarrow C$.

(Силлогизм С).

.

Важнейшие правила следования.

20. Если Г $\models A \to B$, то Г $\models \neg B \to \neg A$. (Контрапозиция К).

21. Если Г $\models \neg B$ и Г $\models A \to B$, то Г $\models \neg A$. (Modus tollens MT).

22. Если Г $\models (A \vee B)$ и Г $\models \neg A$, то Г$\models B$. (Дизъюнктивный силлогизм ДС).

23. Если Г $\models A \to (B \to C)$, то Г $\models A \wedge B \to C$. (Соединение посылок СП).

.

Важнейшие правила следования.

24. Если $Г \models A \wedge B \to C$, то $Г \models A \to (B \to C)$. (Разъединение посылок РП).

25. Если $Г \models A \to (B \to C)$, то $Г \models B \to (A \to C)$. (Перемена посылок ПП).

26. Если $Г \models A \to B$, $Г \models C \to D$, $Г \models A \vee C$, то $Г \models B \vee D$. (Конструктивная дилемма КД).

27. Если $Г \models A \to B$, $Г \models C \to D$, $Г \models \neg B \vee \neg D$, то $Г \models \neg A \vee \neg C$. (Деструктивная дилемма ДД).

.

1. Дано $F=(F_1 \to F_2) \to ((F_2 \to F_3) \to (F_1 \vee F_2 \to F_3)$.

Выполнить преобразования для упрощения алгебраического выражения.

Удалить всюду логическую связку “→”:

$F= \rceil(\rceil F_1 \vee F_2) \vee (\rceil(\rceil F_2 \vee F3) \vee (\rceil(F_1 \vee F_2) \vee F_3)$;

Опустить отрицание на элементарные формулы по закону де Моргана:

$F=F_1 \wedge \rceil F_2 \vee F_2 \wedge \rceil F_3 \vee \rceil F_1 \wedge \rceil F_2 \vee F_3$;

Выполнить преобразование по закону дистрибутивности:

$F=(F_1 \vee \rceil F_1) \wedge \rceil F_2 \vee F_2 \wedge \rceil F_3 \vee F_3$;

Удалить член ($F_1 \vee \rceil F_1$), так как ($F_1 \vee \rceil F_1$)=и:

$F=\rceil F_2 \vee F_2 \wedge \rceil F_3 \vee F_3$;

Выполнить преобразование по закону дистрибутивности:

$F=\rceil F_2 \vee (F_2 \vee F3) \wedge (\rceil F_3 \vee F_3)$;

Удалить член ($F_3 \vee \rceil F_3$)=и:

$F=\rceil F_2 \vee (F_2 \vee F3)$; *Применить закон ассоциативности:*

$F=(\rceil F_2 \vee F_2) \vee F_3$; *Приравнять “истине” значение формулы F, т.к.* *$\rceil F_2 \vee F_2$)=и:* $F=и \vee F_3=и$.

2. Дано $F=\neg(F_1 \rightarrow F_2) \wedge (\neg F_3 \vee \neg F_4) \vee \neg(F_1 \vee F_2) \wedge \neg(F_3 \wedge F_4)$.

Выполнить эквивалентные преобразования для упрощения алгебраического выражения.

Удалить логическую связку "→":

$F=\neg(\neg F_1 \vee F_2) \wedge (\neg F_3 \vee \neg F_4) \vee \neg(F_1 \vee F_2) \wedge \neg(F_3 \wedge F_4)$;

Опустить отрицание на элементарные формулы по закону де Моргана:

$F=F_1 \wedge \neg F_2 \wedge (\neg F_3 \vee \neg F_4) \vee \neg F_1 \wedge \neg F_2 \wedge (\neg F_3 \vee \neg F_4)$;

Выполнить преобразование по закону дистрибутивности:

$F=(F_1 \vee \neg F_1) \wedge \neg F_2 \wedge (\neg F_3 \vee \neg F_4)$;

Удалить член ($F_1 \vee \neg F_1$)=и:

$F=\neg F_2 \wedge (\neg F_3 \vee \neg F_4)$.

Дальнейшее упрощение формулы F невозможно.

Алгоритм приведения к нормальной форме

Шаг 1. Устранить логические связки "$\leftrightarrow$" и "$\rightarrow$" всюду по правилам:

$F_1 \leftrightarrow F_2 = (F_1 \rightarrow F_2) \wedge (F_2 \rightarrow F_1) = (\rceil F_1 \vee F_2) \wedge (\rceil F_2 \vee F_1) = (\rceil F_1 \wedge \rceil F_2) \vee (F_1 \wedge F_2)$;

$F_1 \rightarrow F_2 = \rceil F_1 \vee F_2 = \rceil (F_1 \wedge (\rceil F_2))$.

Алгоритм приведения к нормальной форме

Шаг 2

Продвинуть отрицание до элементарной формулы (пропозициональной переменной) по правилам:

$\rceil(\rceil F) = F$;

$\rceil(F1 \vee F2) = (\rceil F1) \wedge (\rceil F2)$;

$\rceil(F1 \wedge F2) = (\rceil F1) \vee (\rceil F2)$.

.

Алгоритм приведения к нормальной форме

Шаг 3

Применить закон дистрибутивности:

a) для КНФ:

$F1 \vee (F2 \wedge F3) = (F1 \vee F2) \wedge (F1 \vee F3)$;

b) для ДНФ:

$F1 \wedge (F2 \vee F3) = (F1 \wedge F2) \vee (F1 \wedge F3)$.

Пример: Дана формула $F=((F1\rightarrow(F2\vee\rceil F3))\rightarrow F4)$.

Привести формулу к виду КНФ:

1) $F=(\rceil F1\vee(F2\vee\rceil F3))\rightarrow F4$;

2) $F=\rceil(\rceil F1\vee(F2\vee\rceil F3))\vee F4$;

3) $F=(F1\wedge(\rceil F2)\wedge F3)\vee F4$;

4) $F=(F4\vee F1)\wedge(F4\vee(\rceil F2)\wedge F3)$;

5) $F=(F4\vee F1)\wedge(F4\vee\rceil F2)\wedge(F4\vee F3)$.

Пример:

Дана формула $F=(\rceil(F1\wedge F2)(F1\vee F2))$.

Привести формулу к виду ДНФ:

$F=(\rceil F1\vee\rceil F2)\wedge(F1\vee F2)$;

$F=((\rceil F1\vee\rceil F2)\wedge F1)\vee((\rceil F1\vee\rceil F2)\wedge F2)$;

$F=(\rceil F1\wedge F1)\vee(\rceil F2\wedge F1)\vee(\rceil F1\wedge F2)\vee(\rceil F2\wedge F2)$;

$F=(\rceil F2\wedge F1)\vee(\rceil F1\wedge F2)$.

Если каждая элементарная конъюнкция (или элементарная дизъюнкция) формулы содержат символы всех пропозициональных переменных, то такая формула называется совершенной.

Есть совершенные дизъюнктивные нормальные формы формулы (СДНФ) и совершенные конъюнктивные нормальные формы формулы (СКНФ).

Алгоритм преобразования ДНФ к виду СДНФ.

Шаг 1:

если в элементарную конъюнкцию F не входит подформула Fi или]Fi, то дополнить элементарную конъюнкцию высказыванием (Fi$\vee$]Fi) и выполнить преобразование формулы по закону дистрибутивности:

$$F\wedge(Fi\vee]Fi)= F\wedge Fi\vee F\wedge]Fi;$$

Шаг 2:

если в элементарную конъюнкцию F не входит подформула Fj или]Fj, то повторить шаг 1, иначе – конец.

Преобразовать формулу к виду СДНФ:

$F=F1\wedge \rceil F2\wedge(F3\vee \rceil F3) \vee F1\wedge \rceil F3\wedge F4\wedge(F2\vee \rceil F2) \vee F1\wedge F2\wedge F3\wedge \rceil F4;$

1) $F=F1\wedge \rceil F2\wedge F3\vee F1\wedge \rceil F2\wedge \rceil F3\vee F1\wedge F2\wedge \rceil F3\wedge F4\vee F1\wedge \rceil F2\wedge \rceil F3\wedge F4\vee F1\wedge F2\wedge F3\wedge \rceil F4;$

2) $F=F1\wedge \rceil F2\wedge F3\wedge(F4\vee \rceil F4)\vee F1\wedge \rceil F2\wedge \rceil F3\wedge(F4\vee \rceil F4)\vee F1\wedge F2\wedge \rceil F3\wedge F4\vee F1\wedge \rceil F2\wedge \rceil F3\wedge F4\vee F1\wedge F2\wedge F3\wedge \rceil F4;$

3) $F=(F1\wedge \rceil F2\wedge F3\wedge F4)\vee(F1\wedge \rceil F2\wedge F3\wedge \rceil F4)\vee(F1\wedge \rceil F2\wedge \rceil F3\wedge F4);$

4) $(F1\wedge \rceil F2\wedge \rceil F3\wedge \rceil F4)\vee (F1\wedge F2\wedge \rceil F3\wedge F4)\vee (F1\wedge \rceil F2\wedge \rceil F3\wedge F4)\vee (F1\wedge F2\wedge F3\wedge \rceil F4).$

Пример. Дано $F=(F1\vee F2)\wedge(\rceil F1\vee \rceil F2\vee F3\vee F4)$.

Преобразовать формулу к виду СКНФ.

1) $F=(F1\vee F2\vee F3\wedge \rceil F3)\wedge(\rceil F1\vee \rceil F2\vee F3\vee F4)$;

2) $F=(F1\vee F2\vee F3)\wedge(F1\vee F2\vee \rceil F3)\wedge$
$(\rceil F1\vee \rceil F2\vee F3\vee F4)$;

3) $F=(F1\vee F2\vee F3\vee F4\wedge \rceil F4)\wedge$
$(F1\vee F2\vee \rceil F3\vee F4\wedge \rceil F4)\wedge\ \wedge(\rceil F1\vee \rceil F2\vee F3\vee F4)$;

4) $F=(F1\vee F2\vee F3\vee F4)\wedge(F1\vee F2\vee F3\vee \rceil F4)\wedge$
$(F1\vee F2\vee \rceil F3\vee F4)\wedge(F1\vee F2\vee \rceil F3\vee \rceil F4)\wedge$
$(\rceil F1\vee \rceil F2\vee F3\vee F4)$.

Примеры. Определить, к какому классу относятся формулы:

а) $F = ((A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to (B \wedge C))$

A	B	C	$A \to B$	$A \to C$	$B \wedge C$	$(A \to B) \wedge (A \to C)$	$A \to (B \wedge C)$	F
Л	Л	Л	И	И	Л	И	И	И
Л	Л	И	И	И	Л	И	И	И
Л	И	Л	И	И	Л	И	И	И
Л	И	И	И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	И
И	Л	И	Л	И	Л	Л	Л	И
И	И	Л	И	Л	Л	Л	Л	И
И	И	И	И	И	И	И	И	И

б) $F = A \wedge (\rceil B \vee \rceil C) \wedge (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$

A	B	C	$\rceil 2 \vee \rceil 3$	$1 \wedge 4$	$1 \rightarrow 2$	$1 \rightarrow 3$	$5 \wedge 6$	$8 \wedge 7$
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
Л	Л	Л	И	Л	И	И	Л	Л
Л	Л	И	И	Л	И	И	Л	Л
Л	И	Л	И	Л	И	И	Л	Л
Л	И	И	Л	Л	И	И	Л	Л
И	Л	Л	И	И	Л	Л	Л	Л
И	Л	И	И	И	Л	Л	Л	Л
И	И	Л	И	И	И	Л	И	Л
И	И	И	Л	Л	И	И	Л	Л

Любая формула исчисления высказываний может рассматриваться как формула алгебры высказываний и, следовательно, можно рассматривать ее логические значения на различных наборах значений входящих в нее пропозициональных переменных по таблицам истинности.

Недостаток использования таблиц истинности состоит в том, что при большом числе пропозициональных переменных сама процедура построения этих таблиц становится громоздкой, так как число строк этой таблицы равно 2^n , где n - число пропозициональных переменных формулы, а число столбцов не меньше (n+m), где m – число логических связок в формуле.

Пример: В семье есть договоренность относительно пользования телевизором на субботние вечера: а) если не смотрит отец($\rceil A$), то смотрит дочь (C) и не смотрит мать ($\rceil B$), т.е. $F1=(\rceil A \rightarrow C \wedge \rceil B)$;б) если не смотрит дочь ($\rceil C$), то смотрит мать (B) и не смотрит отец ($\rceil A$), т.е. $F2=(\rceil C \rightarrow B \wedge \rceil A)$; в) если смотрит отец (A), то не смотрит дочь ($\rceil C$), т.е. $F3=(A \rightarrow \rceil C)$.

В каком случае совместимы эти условия?

Формальная запись этого суждения имеет вид:

$$F=F1 \wedge F2 \wedge F3=(\rceil A \rightarrow C \wedge \rceil B) \wedge (\rceil C \rightarrow B \wedge \rceil A) \wedge (A \rightarrow \rceil C).$$

Анализ таблицы показывает, что эти условия совместимы, когда A=«Л», B=«Л» и C=«И».

Логическое следствие

Теорема . (признак логического следствия). Формула H будет логическим следствием формулы F тогда и только тогда, когда формула $F \rightarrow H$ является тавтологией

Логическое следствие

Определение. Формула B называется ***логическим следствием*** формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$ если для всех наборов значений букв которые входят в $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и B, значение есть И каждый раз, когда значение каждой формулы A_i на этом наборе есть И. Обозначается $A_1, A_2, .., A_n \longmapsto B$.

Аксиомы исчисления высказываний

Для полного набора логических связок: импликация, отрицание, конъюнкция и дизъюнкция система содержит десять аксиом. В силу полноты систем, использующих логические связки а) импликации и отрицания, б) импликации и дизъюнкции, в) импликации, отрицания, конъюнкции и дизъюнкции можно использовать в процессе дедуктивного вывода любую из указанных систем.

Определение исчисления высказываний, как и любой формальной системы, следует начинать с задания множества аксиом и правил вывода, обеспечивающих последовательное их использование при доказательстве истинности заключения.

Доказательством называют конечную последовательность высказываний, каждое из которых является либо аксиомой, либо выводится из одного или более предыдущих высказываний этой последовательности по правилам вывода.

Определение минимально возможного множества аксиом определяет семантическую полноту исчисления, а определение правил, обеспечивающих последовательное использование аксиом и промежуточных высказываний в процессе формирования заключения – метод дедуктивного вывода.

Аксиомы исчисления высказываний

Множество формул, удовлетворяющих условиям тождественной истинности, бесконечно. Однако в качестве аксиом всегда выбирают только такие, которые при истинности посылок обеспечивают дедуктивный вывод истинности заключения. При этом стремятся создать такую систему аксиом, которая содержала бы минимальное число формул для заданного набора логических связок. Так известна система, которая для логических связок импликации и отрицания содержит только три аксиомы, полная система аксиом, опирающаяся на две логические связки «¬» и «→», которая содержит три аксиомы:

- $(F1 \to (F2 \to F1))$,
- $(F1 \to (F2 \to F3)) \to ((F1 \to F2) \to (F1 \to F3))$,
- $(\neg F1 \to \neg F2) \to ((\neg F1 \to F2) \to F1)$.

Аксиомы исчисления высказываний:

A1. $F1 \to (F2 \to F1)$;

A2. $(F1 \to F2) \to ((F2 \to F3)) \to (F1 \to F3))$;

A3. $(F1 \wedge F2) \to F1$;

A4. $(F1 \wedge F2) \to F2$; A5. $F_1 \to (F_2 \to (F_1 \wedge F_2))$;

A6. $F_1 \to (F_1 \vee F_2)$;

A7. $F_2 \to (F_1 \vee F_2)$;

A8. $(F_1 \to F_3) \to ((F_2 \to F_3) \to ((F_1 \vee F_2) \to F_3))$;

A9. $(F_1 \to F_2) \to ((F_1 \to \rceil F_2) \to \rceil F_1)$;

A10. $(F_1 \to F_2) \to ((F_1 \wedge F_3) \to (F_2 \wedge F_3))$;

A11. $(F_1 \to F_2) \to ((F_1 \vee F_3) \to (F_2 \vee F_3))$;

A12. $\rceil\rceil F_1 \to F_1$.

Связь между алгеброй высказываний и исчислением высказываний.

Формулы исчисления высказываний можно интерпретировать как формулы алгебры высказываний. Для этого будем трактовать переменные исчисления высказываний как переменные алгебры высказываний, т. е. переменные в содержательном смысле, принимающие два значения: истина и ложь (1 и 0).

Операции определим так же, как в алгебре высказываний.

При этом всякая формула исчисления высказываний при любых входящих в нее переменных будет принимать одно из значений 1 или 0, вычисляемое по правилам алгебры высказываний. Введем понятие значения формулы исчисления высказываний. Пусть A- формула исчисления высказываний, $x_1,x_2,\ldots,x_n$- попарно различные переменные, среди которых находятся все переменные, входящие в формулу A. Обозначим через $a_1, a_2,\ldots,a_n$ набор значений этих переменных, состоящих из 1 и 0, длины n. Очевидно, что вектор $(a_1, a_2,\ldots,a_n)$ имеет 2^n значений.

Имеют место три теоремы, которые устанавливают связь между основными фактами алгебры высказываний и исчисления высказываний.

Теорема 1.

Каждая формула, доказуемая в исчислении высказываний, является тождественно истинной в алгебре высказываний.

Формулировка этой теоремы содержит в себе три положения:

1)Каждая аксиома исчисления высказываний – тождественно истинная формула в алгебре высказываний.

2)Правило подстановки, примененное к тождественно истинным формулам, приводит к тождественно истинным формулам.

3)Правило заключения, примененное к тождественно истинным формулам, приводит к тождественно истинным формулам.

Теорема 2.(о выводимости).

Пусть A –некоторая формула исчисления высказываний; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – набор переменных, содержащих все переменные, входящие в формулу A; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – произвольный фиксированный набор значений этих переменных. Обозначим через H конечную совокупность формул

$$H = \left\{x_1^{a1}, x_2^{a2}, \ldots, x_n^{an}\right\}, \text{где } x_i^{ai} = \begin{cases} x_i, если\_a_i = 1, \\ \overline{x_i}, если\_a_i = 0. \end{cases}$$

Тогда:

1) Если $R_{a1,a2,\ldots,an}(A)=1$, то $H \vdash A$.
2) Если $R_{a1,a2,\ldots,an}(A)=0$, то $H \vdash \overline{A}$, где $R_{a1,a2,\ldots,an}(A)$–значение формулы A на наборе a_1, $a_2, \ldots, a_n$.

Теорема 3.

Каждая тождественно истинная формула алгебры высказываний доказуема в исчислении высказываний.