- 1.Первообразная функции.
- 2.Неопределенный интеграл и его свойства.

ПЕРВООБРАЗНАЯ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА..

Эпиграф

Смысл там, где змеи интеграла.
Меж цифр и букв, меж d и f !

В.Брюсов

Дифференцирование – это технология, тогда как интегрирование всегда было искусством.

Ничья цитата

1. Первообразная

Определение

Теорема о первообразных

Первообразная (antiderivative)

Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ в некотором промежутке X, если ее производная равна $f(x)$:

$$F'(x) = f(x)$$

Пример. Поскольку

$$\left(x^3\right)' = 3x^2$$

тогда x^3 есть первообразная для функции $3x^2$

Теорема о первообразных

Если функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются первообразными для функции $f(x)$ в некотором промежутке X, то найдется такое число C, что справедливо равенство:

$$F_2(x) = F_1(x) + C$$

(две первообразные одной функции отличаются на постоянную).

Доказательство

Поскольку

$$(F_2(x) - F_1(x))' = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Тогда по следствию из теоремы Лагранжа найдется такое число *C*, что

$$F_2(x) - F_1(x) = C$$

или

$$F_2(x) = F_1(x) + C \qquad \square$$

2. Неопределенный интеграл

Понятие неопределенного интеграла

Свойства

Неопределенный интеграл (indefinite integral)

Множество всех первообразных для данной функции $f(x)$ на промежутке X называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$F'(x) = f(x)$$

Слово «неопределенный» подчеркивает, что в общее выражение входит слагаемое, которое можно выбрать произвольным.

Пояснение обозначений

$$\int \underbrace{f(x)dx}_{\text{Подынтегральное выражение}} = \underbrace{F(x)+C}_{\text{Множество первообразных}}$$

Знак интеграла

Произносится **Интеграл эф от икс дэ икс**.

Знак интеграла есть вытянутый символ S от латинского **Summa**. Введен Лейбницем. Термин «**интеграл**» введен Якобом Бернулли от латинского слова **integralis** (целостный) или, по другому предположению, от **integro** (восстанавливать).

Бернулли Якоб

Бернулли (Bernoulli) Якоб (1654-1705) самый знаменитый из трех выдающихся поколений математиков Бернулли, применившими и развившими дифференциальное и интегральное исчисление Лейбница.

Автор первого трактата по математической теории вероятностей.

Примеры

1. $$\int 2xdx = x^2 + C$$

2. $$\int \cos xdx = \sin x + C$$

3. $$\int e^x dx = e^x + C$$

Пять свойств неопределенного интеграла

Свойство 1.

Производная от неопределенного интеграла

Свойство 2.

Дифференциал неопределенного интеграла

Свойство 3.

Неопределенный интеграл от дифференциала

Свойство 4.

Вынесение постоянного множителя за знак интеграла

Свойство 5.

Интеграл от алгебраической суммы двух функций

Свойство 1.

Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Доказательство.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x)+C' = f(x)$$

$\square$

Свойство 2.

Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

Доказательство.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d\left(F(x)+C\right) = (F(x)+C)'dx =$$

$$= F'(x)dx = f(x)dx \qquad \square$$

Свойство 3.

Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого *C*:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

Доказательство.

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$$

□

Свойство 4.

Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

Доказательство.

$$\left(k\int f(x)dx\right)' = k\left(\int f(x)dx\right)' = kf(x)$$

$\square$

Свойство 5.

Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Доказательство. Аналогично свойству 4.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ:

конспект
Шыныбеков А.Н. 11кл
стр. 8-12 № 47,46

е) $\int \frac{\ldots}{x^2+4}$.

46. а) $\int 7\sqrt[4]{x^3}\,dx$;

б) $\int \left(\frac{x^2}{2}+x+4\right)dx$;

в) $\int \left(1+\frac{1}{5t}+\frac{3}{2t^2}\right)dt$;

г) $\int x\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)dx$;

д) $\int \frac{y^6+8y^4+1}{y}\,dy$;

е) $\int \frac{z^3-8}{2-z}\,dz$;

ж) $\int \left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)dx$;

з) $\int (u+1)^2(3u-4)\,du$;

и) $\int \frac{x^3+2x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\,dx$.

47. а) $\int (\sin x+3\cos x)\,dx$;

б) $\int \left(\frac{\cos x}{2}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$;

в) $\int \frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sqrt{t}}\,dt$;

г) $\int \frac{\cos 2y}{\sin^2 y\cdot\cos^2 y}\,dy$.

48. а) $\int \frac{24^x-8^x}{\ldots}\,dx$;

б) $\int \frac{3e^{2x}-e^x\sin x}{e^x}\,dx$;

REDMI NOTE 8
AI QUAD CAMERA