

- ▶ 1. Первообразная функции.
- ▶ 2. Неопределенный интеграл и его свойства.

ПЕРВООБРАЗНАЯ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ  
ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА..



# Эпиграф

---

Смысл там, где змеи интеграла.  
Меж цифр и букв, меж  $d$  и  $f$ !

В.Брюсов

Дифференцирование – это  
технология, тогда как  
интегрирование всегда было  
искусством.

Ничья цитата

---



# 1. Первообразная

---

Определение

Теорема о первообразных



## Первообразная (antiderivative)

---

Функция  $F(x)$  называется **первообразной** для функции  $f(x)$  в некотором промежутке  $X$ , если ее производная равна  $f(x)$ :

$$F'(x) = f(x)$$

**Пример.** Поскольку

$$(x^3)' = 3x^2$$

тогда  $x^3$  есть первообразная для функции  $3x^2$

---

## Теорема о первообразных

---

Если функции  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  являются первообразными для функции  $f(x)$  в некотором промежутке  $X$ , то найдется такое число  $C$ , что справедливо равенство:

$$F_2(x) = F_1(x) + C$$

(две первообразные одной функции отличаются на постоянную).

---

## Доказательство

---

Поскольку

$$(F_2(x) - F_1(x))' = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Тогда по следствию из теоремы Лагранжа найдется такое число  $C$ , что

$$F_2(x) - F_1(x) = C$$

или

$$F_2(x) = F_1(x) + C \quad \square$$

---

2.

## Неопределенный интеграл

---

Понятие неопределенного интеграла

Свойства



## Неопределенный интеграл (indefinite integral)

---

Множество всех первообразных для данной функции  $f(x)$  на промежутке  $X$  называется **неопределенным интегралом** от функции  $f(x)$ :

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$F'(x) = f(x)$$

Слово «неопределенный» подчеркивает, что в общем выражении входит слагаемое, которое можно выбрать произвольным.

---



## Пояснение обозначений

---

$$\int \underbrace{f(x)dx}_{\text{Подынтегральное выражение}} = \underbrace{F(x) + C}_{\text{Множество первообразных}}$$

Знак интеграла

Произносится **Интеграл эф от икс дэ икс**.

Знак интеграла есть вытянутый символ S от латинского **Summa**. Введен Лейбницем. Термин «**интеграл**» введен Якобом Бернулли от латинского слова **integralis** (целостный) или, по другому предположению, от **integro** (восстанавливать).

---

## Бернулли Якоб

---

Бернулли (Bernoulli) Якоб (1654-1705) самый знаменитый из трех выдающихся поколений математиков Бернулли, применившими и развившими дифференциальное и интегральное исчисление Лейбница.

Автор первого трактата по математической теории вероятностей.



## Примеры

---

1.  $\int 2x dx = x^2 + C$

2.  $\int \cos x dx = \sin x + C$

3.  $\int e^x dx = e^x + C$

---

# Пять свойств неопределенного интеграла

---

## **Свойство 1.**

Производная от неопределенного интеграла

## **Свойство 2.**

Дифференциал неопределенного интеграла

## **Свойство 3.**

Неопределенный интеграл от дифференциала

## **Свойство 4.**

Вынесение постоянного множителя за знак интеграла

## **Свойство 5.**

Интеграл от алгебраической суммы двух функций

---

## Свойство 1.

---

Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

**Доказательство.**

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$$

□

---

## Свойство 2.

---

Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned}d\left(\int f(x)dx\right) &= d(F(x) + C) = (F(x) + C)' dx = \\ &= F'(x)dx = f(x)dx\end{aligned}$$

□

---

### Свойство 3.

---

Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого  $C$ :

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

**Доказательство.**

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$$



## Свойство 4.

---

Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

Доказательство.

$$\left(k \int f(x)dx\right)' = k \left(\int f(x)dx\right)' = kf(x)$$





## Свойство 5.

---

Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

**Доказательство.** Аналогично свойству 4.

---

# ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ:

КОНСПЕКТ

Шыныбеков А.Н. 11кл

стр. 8-12 № 47,46

46. а)  $\int 7\sqrt[4]{x^3} dx;$

в)  $\int \left(1 + \frac{1}{5t} + \frac{3}{2t^2}\right) dt;$

д)  $\int \frac{y^6 + 8y^4 + 1}{y} dy;$

ж)  $\int (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) dx;$

и)  $\int \frac{x^3 + 2x + \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx.$

47. а)  $\int (\sin x + 3 \cos x) dx;$

в)  $\int \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sqrt{t}} dt;$

48. а)  $\int \frac{24^x - 8^x}{e^x} dx;$

е)  $\int \frac{1}{x^2 + 4} dx.$

б)  $\int \left(\frac{x^2}{2} + x + 4\right) dx;$

г)  $\int x \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{2}\right) dx;$

е)  $\int \frac{z^3 - 8}{2 - z} dz;$

з)  $\int (u + 1)^2 (3u - 4) du;$

б)  $\int \left(\frac{\cos x}{2} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx;$

г)  $\int \frac{\cos 2y}{\sin^2 y \cdot \cos^2 y} dy.$

б)  $\int \frac{3e^{2x} - e^x \sin x}{e^x} dx;$