Волгоградский государственный университет

Общая теория статистики

Богачкова Людмила Юрьевна, профессор,
доктор экономич.наук, канд. физ.-мат. наук.

Лекция 2.

Статистические показатели. Степенные средние.

1. Понятие статистического показателя и его атрибуты. Абсолютные и относительные показатели.
2. Классификация относительных показателей.
3. Средние величины (степенные средние).
4. Виды средних величин.
5. Свойства средних величин.
6. Примеры и задачи.

1. Понятие статистического показателя и его атрибуты. Абсолютные и относительные показатели.

Статистический показатель - это обобщающая *качественно-количественная* характеристика какого-либо свойства статистической совокупности в условиях конкретного *места* и *времени*.

Пример.

Валовый региональный продукт (ВРП) –

- характеризует уровень экономического развития (качество) региона (конкретная территория);
- численно выражается в денежных единицах (количество);
- исчисляется за определенный год (привязка ко времен).

Атрибуты статистического показателя -

это его свойства:

- единицы измерения (например для валового продукта - млн. руб. в год);
- территориальные границы (валовый продукт региона, страны, муниципалитета и т.п.);
- и другие границы.

Абсолютные показатели - характеризуют суммарный объем признака для всех единиц совокупности.

Например: ВРП макрорегиона (МР) или федерального округа (ФО) как сумма ВРП входящих в него регионов.

Относительные показатели - это либо

а) отношение различных признаков одного объекта (ВРП на душу населения; плотность населения) либо

б) отношение одного и того же признака, но для разных объектов (доля ВРП региона в суммарном ВРП ФО или МР).

2. Классификация относительных показателей по их назначению

1) **Характеризующие *структуру* объекта:** доля, или удельный вес части к целому (например: вклад региона в ВРП ЮФО, в %).

2) **Характеризующие *динамику* процесса** (например, *ТР* - темп роста ВРП :

$$TP_{i,i-1} = \frac{ВРП_i}{ВРП_{i-1}}, \text{ где } i - \text{номер года.}$$

3) **Характеризующие *соотношение разных признаков одного объекта*** (например, ПН – плотность населения в регионе:

$$ПН = \frac{\text{численность населения региона } (чел)}{\text{площадь территории региона } (км^2)}$$

2. Классификация относительных показателей по их назначению

4) Характеризующие *отношение фактически наблюдаемых и плановых* значений показателей

Например:

медицински обоснованная норма потребления мяса на 1 мужчину– 80 кг в год;

фактическое потребление – 70 кг в год.

Тогда объем потребления и полноценность питания можно охарактеризовать относительным показателем x:

$$x = \frac{70\ кг\, в\, год}{80\ кг\, в\, год} = 0,88 = 88\%.$$

Принципы использования статистических показателей

1) Сравнение различных объектов только по *сопоставимым* показателям

Например:

ВВП постсоветских стран сравнивать нельзя (н-р, России и Армении несопоставимы);

ВВП на душу населения – можно.

2) ***Качественный экономический анализ должен основываться не на отдельных показателях, а на системе показателей, как абсолютных, так и относительных.***

3. Средние величины. Степенные средние.

Средняя величина – это статистический показатель, характеризующий наиболее типичный уровень признака для рассматриваемой статистической совокупности.

Скепсис:

- средняя температура по больнице;
- поговорка о средней от М.М.Загорулько.

Действительно ли эти примеры дискредитируют статистику? Что в них не так?

- характеристика не больницы, а человеческого тела;
- недостаточная численность элементов совокупности.

Контр-пример:

Средняя температура воздуха в сентябре по многолетним наблюдениям в Антарктиде, Африке и Волгоградской обл. Если все корректно, то показатель весьма информативный.

4. Виды средних величин

1. **Средняя арифметическая величина, или простая средняя:**

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (1)$$

Здесь x_i – значение признака у i-го элемента совокупности; n – количество элементов совокупности.

Простая средняя (арифметическая средняя)– это значение признака x в расчете на единицу совокупности при *равномерном распределении суммарного объема признака по всем единицам совокупности.*

При вычислении и использовании простой средней общий объем признака в совокупности не изменяется.

Виды средних величин

2. Взвешенная, или групповая средняя :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \qquad (2)$$

Здесь x_i – значение признака у i-го элемента совокупности; f_i – вес x_i, или частота повторения значения x_i в совокупности.

Покажем, что (2) – это другая форма простой арифметической средней (1). Проиллюстрируем это на примере.

Пример. Рассмотрим число мячей, забитых в среднем за 1 игру на футбольном первенстве.

Пусть x_i – число мячей, забитых за одну игру (обеими командами); f_i – количество игр, в которых было забито x_i мячей.

Распределение матчей по числу забитых мячей

x_i – число голов за игру	0	1	2	3	4	5	6	7
f_i – вес x_i, кол-во игр	2	12	15	14	12	10	-	1

Общее кол-во игр (матчей):

$$F = \sum_i f_i = 2+12+15+14+12+10+1$$

Общее кол-во забитых мячей:

$$X = \sum_i f_i x_i = 0\cdot 2 + 1\cdot 12 + 2\cdot 15 + 3\cdot 14 + 4\cdot 12 + 5\cdot 10 + 7\cdot 1$$

Тогда среднее кол-во голов в одной игре: $\bar{x} = \dfrac{X}{F} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$.

Свойства простой арифметической средней

1) Сумма отклонений индивидуальных значений признака от его среднего значения равна нулю.

2) Если каждое индивидуальное значение признака умножить или разделить на какое-либо число, то и среднее значение признака умножится /разделится на это число.

3) Если к каждому индивидуальному значению признака прибавить некоторое число (или отнять его от каждого индивидуального значения), то и средняя арифметическая увеличится или уменьшится на это же число.

4) Если веса средней взвешенной умножить или разделить на какое-то число, то взвешенная средняя не изменится.

5) Сумма квадратов отклонений индивидуальных значений от среднего арифметического меньше, чем сумма квадратов отклонений от любого другого числа.

Виды средних величин

3. Средняя квадратическая :

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} \qquad (3)$$

Пример.

Имеются 3 квадратных участка со сторонами

x_1 =100 м; x_2 =200 м; x_3 =300 м.

Найти длину стороны участка со средней площадью.

Решение.

Площади участков:

S_1 =10000 м²; S_2 =40000 м²; S_3 =90000 м².

Средняя площадь участка:

$$\bar{S} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{3} \qquad (1)$$

Виды средних величин

Длина стороны участка со средней площадью:

$$\bar{x} = \sqrt{\bar{S}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}.$$

4. Средняя геометрическая:

$$\bar{x} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \qquad (4)$$

Используется при определении средних темпов роста.

Пример.

Год	2016	2017	2018	2019
ВРП	ВРП$_{2016}$	ВРП$_{2017}$	ВРП$_{2018}$	ВРП$_{2019}$
Темп t	----	$t_{2017/2016} = \frac{ВРП_{2017}}{ВРП_{2016}}$	$t_{2018/2017} = \frac{ВРП_{2018}}{ВРП_{2017}}$	$t_{2019/2018} = \frac{ВРП_{2019}}{ВРП_{2018}}$

$$\bar{t} = \sqrt[3]{t_{2017/2016} \cdot t_{2018/2017} \cdot t_{2019/2018}}$$

Задача 1

Пусть за первый год цена товара выросла в 2 раза, за второй год – в 3 раза, за третий год – в 1,5 раз. Определите темп роста цены в среднем за каждый год в течение 3-х лет.

4. Средняя гармоническая:

$$\bar{x} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \qquad (4)$$

Пример. Автомобиль с грузом от Предприятия до склада ехал со скоростью $x_1 = 40$ км/ч, а обратно порожняком со скоростью $x_2 = 60$ км/ч. Какова средняя скорость автомобиля за обе поездки?

При замене индивидуальных значений скорости на среднюю величину По смыслу необходимо, чтобы время, затраченное на поездку в оба конца, было тем же самым.

Пусть расстояние от предприятия до склада равно S.

Приравняем время, затраченное на поездку туда и обратно при езде с реальной скоростью и при езде со средней скоростью:

$$\frac{S}{\bar{x}} + \frac{S}{\bar{x}} = \frac{S}{60} + \frac{S}{40}; \Rightarrow \bar{x} = \frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{40}} = \frac{2 \cdot 120}{5} = 48 км/ч$$

А чему равна средняя арифметическая скорость? Почему она не подходит?

Все рассмотренные средние величины относятся к классу *степенных средних*

$$\bar{x} = \sqrt[k]{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^k f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}},$$

$\bar{x}$ - средняя;

x_i - величина, для которой исчисляется средняя;

f_i - частота повторения индивидуальных значений признака;

k - степень средней;

n - число единиц в совокупности.

Существуют две основные формулы расчета степенных средних величин любого вида:

1) *простая* используется, если представленная совокупность данных не сгруппирована;

2) *взвешенная* применяется при сгруппированных данных (такие формулы отличаются наличием f_i).

$$\bar{X}_{гарм.} < \bar{X}_{геом} < \bar{X}_{арифм} < \bar{X}_{квадрат}$$

$$\bar{x} = \sqrt[k]{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^k f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}},$$

Формулы расчета степенных средних величин

Значение k	Наименование средней	Формула средней	
		простая	взвешенная
-1	Гармоническая	$\bar{x} = \frac{n}{\sum \frac{1}{x}}$	$\bar{x} = \frac{\sum f}{\sum \frac{1}{x} f}$; $\bar{x} = \frac{\sum w}{\sum \frac{1}{x} w}$
0	Геометрическая	$\bar{x} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_n}$	$\bar{x} = \sqrt[\sum f]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdot x_n^{f_n}}$
1	Арифметическая	$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$	$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f}$; $\bar{x} = \frac{\sum xw}{\sum w}$.
2	Квадратическая	$\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n}}$	$\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum x^2 \cdot f}{\sum f}}$

Задача 2

Имеются данные о численности семьи работников организации (*чел.*): 2; 6; 3; 5; 6; 3; 3; 5; 4; 4; 2; 2; 4; 3; 5; 4; 3; 3; 3.

Определите среднее число человек в семье с помощью формулы средней арифметической простой и средней арифметической взвешенной.

Решение

Так как исходные данные не сгруппированы, применяем среднюю арифметическую простую:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{2+6+3+5+6+3+3+5+4+4+2+2+4+3+5+4+3+3+3}{19} = \frac{70}{19} = 3.7\,(\textit{чел.}).$$

Сгруппируем данные для вычисления взвешенной средней

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}.$$

Распределение работников по числу человек в семье

Число человек в семье, *чел.* (x)	2	3	4	5	6	Итого
Число работников, *чел.* (f)	3	7	4	3	2	19

$$\bar{x} = \frac{2\cdot 3+3\cdot 7+4\cdot 4+5\cdot 3+6\cdot 2}{3+7+4+3+2} = \frac{70}{19} = 3.7\,(\textit{чел.}).$$

Задача 3

Используя данные таблицы, определите среднюю успеваемость студентов факультета.

Данные по успеваемости студентов факультета

Успеваемость, % (x)	60-70	70-80	80-90	90-100
Число студентов, *чел.* . (f)	10	18	52	20

Так как факторный признак представлен интервалами значений, то в числителе формулы вместо x применим x' - середину соответствующего интервала, которую можно определить как среднее арифметическое между нижней и верхней границами интервала:

$$x_1' = \frac{60+70}{2} = 65; \; x_2' = \frac{70+80}{2} = 75; \; x_3' = \frac{80+90}{2} = 85; \; x_4' = \frac{90+100}{2} = 95.$$

Решение

$$\bar{x} = \frac{\sum x'f}{\sum f} = \frac{65 \cdot 10 + 75 \cdot 18 + 85 \cdot 52 + 95 \cdot 20}{10 + 18 + 52 + 20} = \frac{8320}{100} = 83.2\ (\%)$$

Таким образом, средняя успеваемость студентов факультета составляет 83,2%.

Задача 4

Определите средний темп роста, используя данные таблицы

Данные о продаже телевизоров за три года

Объем продажи телевизоров, *тыс. ед.*	18,4	19,0	24,3

Для определения темпа роста от года к году используем относительную величину динамики (цепной способ):

$$T_p = \frac{y_1}{y_0} = \frac{19.0}{18.4} = 1.033; \; T_p = \frac{y_2}{y_1} = \frac{24.3}{19.0} = 1.279.$$

Средний темп роста рассчитывается по формуле средней геометрической, где степень корня определяется числом перемножаемых под корнем значений:

$$\bar{x} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_n}\,; \quad \bar{x} = \sqrt[2]{1.033 \cdot 1.279} = 1.149 \; (1.149 \cdot 100 = 114.9\%).$$

Вывод: темп роста объемов продажи телевизоров за три года в среднем составляет 114,9%.

Контрольные вопросы

1) Что такое атрибуты статистического показателя?
2) Какие показатели называются абсолютными, а какие – относительными?
3) Перечислите 4 типа относительных показателей.
4) Какие принципы использования статистических показателей Вы знаете?
5) Выпишите формулы для простой и взвешенной арифметической средней. Различаются ли результаты расчетов по этим формулам?
6) Перечислите 5 свойств арифметической средней.
7) Выпишите формулу простой квадратической средней.
8) Выпишите формулу простой геометрической средней. В каких случаях она используется чаще всего?
9) Выпишите формулу простой гармонической средней. Приведите пример ее использования.

Рекомендуемая литература к Лекции 2:

1) Елисеева И.И., Юзбашев М.М. Общая теория статистики: Учебник / Под ред. И.И. Елисеевой. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Финансы и статистика. С. 120-140.
2) Ершова Т.Б. Общая теория статистики: учебное пособие: в 2 частях - Ч.1. Описательная статистика– Комсомольск-на-Амуре: Изд-во АмГПГУ, 2012.–С. 58-64 с.