

I Математична логіка

Ця лекція про:

Введення в математичну логіку (продовження)

I.4 Рівність висловлювань

I.5 Тавтологія, протиріччя, здійсненне висловлювання

I.6 Логічний наслідок



I.4 Рівність висловлювань

Імплікація є найпотрібніша й найцікавіша операція пропозиційної логіки. Імплікація лежить в основі умовних пропозицій (умовних висловлювань).

Умовні висловлювання (імплікація, подвійна умова).

1. Імплікація

Висловлювання виду “ $A \rightarrow B$ ” читаємо таким чином: “якщо, A то B ”, або “ A імплікує B ”, або “ B наслідкує A ”. Такі висловлювання називаються умовними.

Наприклад: “Якщо Василь мешкає в Куп’янську, тоді Василь мешкає в Харківській області”. Висловлювання A називається гіпотезою або припущенням (посилкою), а висловлювання B називається наслідком або висновком.

Пам’ятаємо, що $A \rightarrow B$ є брехня тоді і тільки тоді, коли A — істина, а B — брехня.

Таким чином, дані висловлювання є істинними:

- “Якщо $2 < 4$, тоді Париж є столиця Франції” ($\text{true} \rightarrow \text{true} = \text{істина}$),
- “Якщо Лондон є столиця Данії, тоді $2 < 4$ ” ($\text{false} \rightarrow \text{true} = \text{істина}$),
- “Якщо $4 = 7$, тоді Лондон розташовано у Данії” ($\text{false} \rightarrow \text{false} = \text{істина}$).

Однак, наступне висловлювання є брехнею:

“Якщо $2 < 4$, тоді Лондон є столицею Данії” ($\text{true} \rightarrow \text{false} = \text{брехня}$)



I.4 Рівність висловлювань (продовження)

2. Подвійна умова (еквівалентність)

Висловлювання виду “ $A \sim B$ ” читаємо таким чином “ A тоді і тільки тоді, коли B ”. Таке висловлювання називається подвійною умовою, або еквівалентністю. Воно є істина тоді, коли A і B мають однакові значення, A і B мають бути обидва істинними або обидва — брехнею.

$$A \sim B = (A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)$$

AB	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)$	$A \sim B$
00	1	1	1	1
01	1	0	0	0
10	0	1	0	0
11	1	1	1	1



I.4.1 Узагальнення рівносильності

Два складні висловлювання $F(A_1, A_2, \dots, A_n)$ і $G(A_1, A_2, \dots, A_n)$, називають еквівалентними (ідентичними, рівносильними), якщо при будь-яких значеннях простих висловлювань A_1, A_2, \dots, A_n відповідні висловлювання F і G є однакові.

Приклад. Маємо складне висловлювання $F = \neg A \vee B$ і складне висловлювання $G = A \rightarrow B$.

Побудуємо таблицю істинності для цих складних висловлювань.

AB	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \rightarrow B$	$F \sim G$
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
10	0	0	0	1
11	0	1	1	1

Значення F і G збігаються, отже F еквівалентно G .



I.4.2 Закон контрапозиції

Нехай ми маємо висловлювання $A \rightarrow B$, (“Якщо Василь мешкає в Куп’янську (A), тоді Василь мешкає в Харківській області (B)”). Введемо два поняття для імплікації: **зворотнє** висловлювання (конверсія) і **протилежне** висловлювання:

1. **Зворотнє** висловлювання або **конверсія** вихідного є $B \rightarrow A$ (“Якщо Василь мешкає в Харківській області (B), тоді Василь мешкає у Куп’янську (A)”). Це може бути брехнею.

2. **Протилежне** висловлювання вихідного є $\neg A \rightarrow \neg B$ (“Якщо Василь не мешкає в Куп’янську ($\neg A$), тоді Василь не мешкає в Харківській області ($\neg B$)”). Це може бути брехнею.

3. **Контрапозицією умовного висловлювання $F=A \rightarrow B$ є висловлювання $G=\neg B \rightarrow \neg A$** (протилежне його зворотньому).

4. **Закон контрапозиції.** Висловлювання $F=A \rightarrow B$ і $G=\neg B \rightarrow \neg A$ еквівалентні з точки зору логіки.

Приклад:

“Якщо Василь мешкає в Куп’янську, тоді Василь мешкає в Харківській області ” теж саме, що “якщо Василь не мешкає в Харківській області, тоді Василь не мешкає в Куп’янську ”.



Побудуємо таблицю істинності для складних висловлювань $G = \neg B \rightarrow A$ і $F = A \rightarrow B$.

Таблиця істинності для закону контрапозиції

A B	$\neg B$	$\neg A$	$G = \neg B \rightarrow \neg A$	$F = A \rightarrow B$
0 0	1	1	1	1
0 1	0	1	1	1
1 0	1	0	0	0
1 1	0	0	1	1

Значення F і G збігаються при всіх значеннях A і B.
Таким чином доведено **закон контрапозиції**.
Таблиця істинності — це один із методів доведення.



- Ми можемо довести еквівалентність двох висловлювань $F(A, B)$ і $G(A, B)$ іншим шляхом (методом міркувань):

Для цього необхідно показати, що кожного разу, коли $F=1$ (істина), G також є істиною; і навпаки, кожного разу, коли $G=1$ (істина), F також є істиною (іншими словами: якщо F , то G , а якщо G , то F).

Або показати, що кожного разу, коли $F=0$ (брехня), G також є брехнею; і навпаки, кожного разу коли $G=0$ (брехня), F також є брехнею (іншими словами: якщо F , то G , а якщо G , то F).

Теорема (закон контрапозиції). Висловлювання $G = \neg B \rightarrow \neg A$ і $F = A \rightarrow B$ є еквівалентними.

Доведення

Покажемо, що кожного разу, коли $F=0$ (брехня), G також є брехнею, і навпаки, кожного разу, коли $G=0$ (брехня), F також є брехнею.

1. Нехай $F = A \rightarrow B = 0$, тоді, згідно з властивостями імплікації, маємо $A=1$, $B=0$, звідси $\neg B=1$, $\neg A=0$, таким чином $G = \neg B \rightarrow \neg A = 0$ (згідно з визначенням імплікації).
2. Нехай $G = \neg B \rightarrow \neg A = 0$, тоді, згідно з властивостями імплікації, маємо $\neg B=1$ і $\neg A=0$, отже $B=0$, $A=1$, таким чином $F = A \rightarrow B = 0$ (згідно з визначенням імплікації). •



Приклади еквівалентностей, які часто використовуються:

- $A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B)$ закон Де Моргана для диз'юнкції;
- $A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B)$ закон Де Моргана для кон'юнкції;
- $\neg\neg A = A$ закон подвійного заперечення;
- $A \rightarrow B = \neg A \vee B$ перетворення імплікації на диз'юнкцію;
- $A \sim B = \neg(A \oplus B) = (A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A) = (\neg A \vee B) \& (A \vee \neg B)$;
- $A \oplus B = \neg(A \sim B) = (\neg A \& B) \vee (A \& \neg B)$.



I.5 Тавтологія, протиріччя, висловлювання, що виконується, (здійсненне висловлювання)

1. Складне висловлювання називається **тавтологією**, якщо його значення завжди є істиною (1), незважаючи на істиннісні значення простих висловлювань, із яких воно складається.
Приклад: висловлювання $(p \vee \neg p)$ є тавтологією.
2. Складне висловлювання називається **протиріччям** якщо його значення завжди є брехнею (0), незважаючи на істиннісні значення простих висловлювань, із яких воно складається.
Приклад: висловлювання $p \wedge \neg p$ є протиріччям.
3. Складне висловлювання, яке не є ні тавтологією, ні протиріччям називається **висловлюванням, що виконується, або здійсненим висловлюванням**

A ₁	A ₂	...	A _n	F
0	0	...	0	1
0	0	...	1	1
	
1	1	...	0	1
1	1	...	1	1

Щоб зрозуміти, чи є складне висловлювання тавтологією, достатньо побудувати для нього ТІ.

Скільки рядків буде в такої ТІ, якщо знаємо, зі скількох простих висловлювань воно побудоване?



Можливо також довести методом міркувань, що висловлювання є тавтологією (або протиріччям).

Для цього застосовують метод “від супротивного”. Тобто припускаємо, що дане висловлювання не тавтологія, і намагаємося знайти комбінації значень простих висловлювань, при яких складне висловлювання буде мати значення 0, тобто “брехня”. Якщо знайдемо, F не є тавтологією, якщо їх немає, то F є тавтологією.

Доведемо, що $F = ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ є тавтологія.

1. Нехай $F=0$, тоді, згідно з властивостями імплікації, $A=0$, а $(A \rightarrow B) \rightarrow A=1$ (тільки в цьому випадку F може дорівнювати 0).
2. Підставимо значення A в першу частину висловлювання F . $(0 \rightarrow B) \rightarrow 0$. Згідно з властивостями імплікації $(0 \rightarrow B) \rightarrow 0=0$, що конфліктує з нашим припущенням ($0 \neq 1$).
3. Таким чином, $F = ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ є тавтологія, тобто $F \equiv 1$.

Оскільки протиріччя є запереченням тавтології, для доведення протиріччя можна застосовувати ті ж методи, що й для доведення тавтології.



I.6 Логічний наслідок

Складне висловлювання $G(A_1, A_2, \dots, A_n)$ називається **логічним наслідком** складного висловлювання $F(A_1, A_2, \dots, A_n)$, якщо кожного разу, коли F є істина, G також є істина. Інакше кажучи, F успадковує істину G .

Щоб визначити, чи є G логічним наслідком F , потрібно побудувати таблицю істинності висловлювань і порівняти відповідні рядки ($F \neq G$).

A B	A~B	B→A
0 0	1	1
0 1	0	0
1 0	0	1
1 1	1	1

Наприклад:

Нехай $F = A \sim B$ і $G = B \rightarrow A$.

У цьому випадку, коли $F =$ “істина”, $G =$ “істина” також.

Таким чином, G є логічним наслідком F .



Можливо також довести методом міркувань, що одне складне висловлювання є логічним наслідком іншого:

Якщо G є логічним наслідком F , то висловлювання $H = F \rightarrow G$ має бути тавтологією за визначенням логічного наслідку.

Приклад.

Маємо висловлювання $G = A \vee (\neg B)$, яке є логічним наслідком висловлювання $F = A \vee \neg A \wedge \neg B$. Покажемо, що висловлювання $H = F \rightarrow G$ є тавтологією. Інакше кажучи $(A \vee \neg A \wedge \neg B) \rightarrow (A \vee \neg B) \equiv 1$.

Доведення. Нехай висловлювання $H = (A \vee \neg A \wedge \neg B) \rightarrow (A \vee \neg B)$, не є тавтологією, тоді мають бути такі комбінації значень A і B , при яких $H = 0$.

Тоді, за визначенням імплікації, $(A \vee \neg A \wedge \neg B) = 1$, а $(A \vee \neg B) = 0$.

З останнього висловлювання маємо: $A = 1$ і $B = 0$ (за визначенням диз'юнкції).

Якщо підставити знайдені значення A і B до висловлювання F , отримаємо конфлікт із вихідним припущенням $((1 \& 0) \vee (0 \& 1)) = 1$, що протирічить властивостям кон'юнкції та диз'юнкції), таким чином, вихідна гіпотеза не може бути істиною, **отже $H \equiv 1$, а G є логічним наслідком F .**



Найживаніші тавтології

1. **$A \rightarrow A$** Закон визначення. Кожне висловлювання є логічним наслідком самого себе (якщо щось існує, то воно існує).
2. **$\neg (A \& \neg A)$** Закон протиріччя. A і $\neg A$ не можуть бути істинними одночасно.
3. **$A \vee \neg A$** Закон виключення третього. Або A є істина, або $\neg A$ є істина.
4. **$\neg \neg A \sim A$** Закон подвійного заперечення. Подвійне заперечення висловлювання є тесаме висловлювання.
5. **$A \rightarrow (B \rightarrow A)$** Істина з чого завгодно. Якщо $A=1$, тоді $B \rightarrow A=1$, незважаючи на значення B . $B \rightarrow A$ логічний наслідок A .
6. **$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$** Що завгодно з брехні. Якщо $A=0$, тоді $A \rightarrow B = 1$, незважаючи на значення B . $A \rightarrow B$ логічний наслідок $\neg A$.



Найживаніші тавтології (продовження)

7. **$A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$ Modus ponens.** Правило розподілу. Якщо A є істина, а B є логічним наслідком A , тоді B є також істиною.
Приклад. $A =$ “Іде сніг”. $A \rightarrow B =$ “Якщо зараз іде сніг, тоді зараз хмарно”. $A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B =$ “зараз хмарно”.
8. **$(A \rightarrow B) \wedge (\neg B) \rightarrow \neg A$ Modus tollens.** Правило доказу від супротивного.
Приклад. $A \rightarrow B =$ “Якщо зараз іде сніг, тоді зараз хмарно”, $\neg B =$ “Зараз не хмарно”, тоді “Зараз не іде сніг”.
9. **$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$ Закон силогізму.**

Приклад

Не знайшлося цвяха — підкова відпала,	$(A_1 \rightarrow A_2)$
Не стало підкови — кобила закульгала,	$(A_2 \rightarrow A_3)$
Кобила закульгала — командира вбито, —	$(A_3 \rightarrow A_4)$
Кіннота тікає, — армія розбита,	$(A_4 \rightarrow A_5)(A_5 \rightarrow A_6)$
Всіх вбиває ворог на своєму шляху,	$(A_6 \rightarrow A_7)$
Все тому, що вчасно не знайшлося цвяха!	$(A_1 \rightarrow A_7)$



Підсумок

Отже ви вивчили:

1. Рівність висловлювань;
2. Тавтологію, протиріччя, здійсненне висловлювання;
3. Логічний наслідок;
4. Базові логічні закони.



Домашнє завдання

1. Перевірте логічні закони за допомогою:

- 1) таблиць істинності;
- 2) міркувань.

2. Які з наведених висловлювань є логічним наслідком яких:

- 1) $A \rightarrow B$ 2) $A \vee B$ 3) $A \& B$ 4) $\neg(B \& A)$

