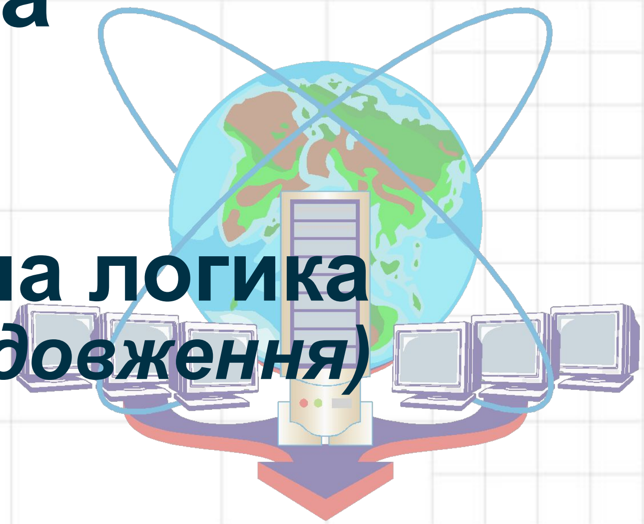
Дискретна математика



Лекція №2. Пропозиційна логика *(продовження)*

Холодна Зоя Борисівна

Ауд. №123, 134, за розкладом

E-mail: zE-mail: z.E-mail: z.holodnaya@E-mail: z.holodnaya@cE-mail: z.holodnaya@csnE-mail: z.holodnaya@csn.E-mail: z.holodnaya@csn.khai.edu

I Математична логіка

Ця лекція про:

Введення в математичну логіку (продовження)

I.4 Рівність висловлювань

I.5 Тавтологія, протиріччя, здійсненне висловлювання

I.6 Логічний наслідок

І.4 Рівність висловлювань

Імплікація є найпотрібніша й найцікавіша операція пропозіційної логіки. Імплікація лежить в основі умовних пропозицій (умовних висловлювань).

Умовні висловлювання (імплікація, подвійна умова).

1. **Імплікація**

Висловлювання виду “A —> B“ читаємо таким чином: “якщо, A то B“, або “A імплікує B“, або “B наслідує A”. Такі висловлювання називаються умовними.

Наприклад: “Якщо Василь мешкає в Куп’янську, тоді Василь мешкає в Харківський області". Висловлювання A називається гіпотезою або припущенням (посилкою), а висловлювання B називається наслідком або висновком.

Пам’ятаємо, що A —> B є брехня тоді і тільки тоді, коли A — істина, а B — брехня.

Таким чином, дані висловлювання є істинними:

- “Якщо 2 < 4, тоді Париж є столиця Франції“ (true —> true = істина),
- “Якщо Лондон є столиця Данії, тоді 2 < 4“ (false—> true = істина),
- “Якщо 4 = 7, тоді Лондон розташовано у Данії“ (false —> false = істина).

Однак, наступне висловлювання є брехнею:

“Якщо 2 < 4, тоді Лондон є столицею Данії“ (true —> false = брехня).

I.4 Рівність висловлювань
(продовження)

2. Подвійна умова (еквівалентність)

Висловлювання виду “A ~ B” читаємо таким чином “A тоді і тільки тоді, коли B“. Таке висловлювання називається подвійною умовою, або еквівалентністю. Воно є істина тоді, коли A і B мають однакові значення, A і B мають бути обидва істинними або обидва — брехнею.

$$A \sim B = (A \longrightarrow B) \& (B \longrightarrow A)$$

AB	A→B	B→A	(A→B)&(B→A)	A~B
00	1	1	1	1
01	1	0	0	0
10	0	1	0	0
11	1	1	1	1

I.4.1 Узагальнення рівносильності

Два складні висловлювання $F(A_1, A_2,\dots, A_n)$ і $G(A_1, A_2, \dots, A_n)$, називають еквівалентними (ідентичними, рівносильними), якщо при будь-яких значеннях простих висловлювань $A_1, A_2, \dots, A_n$ відповідні висловлювання F і G є однакові.

Приклад. Маємо складне висловлювання $F=\neg A \vee B$ і складне висловлювання $G= A\rightarrow B$.

Побудуємо таблицю істинності для цих складних висловлювань.

AB	¬A	¬AVB	A→B	F~G
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
10	0	0	0	1
11	0	1	1	1

Значення F і G збігаються, отже F еквівалентно G.

І.4.2 Закон контрапозиції

Нехай ми маємо вісловлювання A→B, (“Якщо Василь мешкає в Куп’янську (A), тоді Василь мешкає в Харківський області (B)"). Введемо два поняття для імплікації: **зворотнє** висловлювання (конверсія) і **протилежне** висловлювання:

1. Зворотнє висловлювання або **конверсія** вихідного є **B→A** (“Якщо Василь мешкає в Харківський області (B), тоді Василь мешкає у Куп’янську (A)”). Це може бути брехнею.

2. **Протилежне** висловлювання вихідного є **¬A→¬B** ((“Якщо Василь не мешкає в Куп’янську (¬A), тоді Василь не мешкає в Харківський області (¬B)”). Це може бути брехнею.

3. Контрапозицією умовного висловлювання F=A —>B є висловлювання G=¬B—>¬A (протилежне його зворотньому)**.**

4. Закон контрапозиції. Висловлювання F=A —>B і G=¬B—>¬A еквівалентні з точки зору логіки.

Приклад:

“Якщо Василь мешкає в Куп’янську, тоді Василь мешкає в Харківський області " теж саме, що “якщо Василь не мешкає в Харківський області, тоді Василь не мешкає в Куп’янську ".

Побудуємо таблицю істинності для складних висловлювань $G=\neg B\to A$ і $F=A\to B$.

Таблиця істинності для закону контрапозиції

A B	¬B	¬A	G=¬B→¬A	F=A→B
0 0	1	1	1	1
0 1	0	1	1	1
1 0	1	0	0	0
1 1	0	0	1	1

Значення F і G збігаються при всіх значеннях A і B.
Таким чином доведено **закон контрапозиції.**
Таблиця істинності — це один із методів доведення.

- Ми можемо довести еквівалентність двох висловлювань F(A, B) і G(A, B) іншим шляхом (методом міркувань):

Для цього необхідно показати, що кожного разу, коли F=1 (істина), G також є істиною; і навпаки, кожного разу, коли G=1 (істина), F також є іс-тиною (іншими словами: якщо F, то G, а якщо G, то F).

Або показати, що кожного разу, коли F=0 (брехня), G також є брех-нею; і навпаки, кожного разу коли G=0 (брехня), F також є брехнею (ін-шими словами: якщо F, то G, а якщо G, то F).

Теорема (закон контрапозиції). Висловлювання $G=\neg B\to\neg A$ і $F=A\to B$ є еквівалентними.

Доведення

Покажемо, що кожного разу, коли F=0 (брехня), G також є брехнею, і навпаки, кожного разу, коли G=0 (брехня), F також є брехнею.

1. Нехай $F=A\to B=0$, тоді, згідно з властивостями імплікації, маємо A=1, B=0, звідси $\neg B=1$, $\neg A=0$, таким чином $G=\neg B\to\neg A=0$ (згідно з визна-ченням імплікації).
2. Нехай $G=\neg B\to\neg A=0$, тоді, згідно з властивостями імплікації, маємо $\neg B=1$ і $\neg A=0$, отже B=0, A=1, таким чином $F=A\to B=0$ (згідно з визначенням імплікації). •

Приклади еквівалентностей, які часто використовуються:

- $A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B)$ закон Де Морґана для диз'юнкції;
- $A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B)$ закон Де Морґана для кон'юнкції;
- $\neg\neg A = A$ закон подвійного заперечення;
- $A \to B = \neg A \vee B$ перетворення імплікації на диз'юнкцію;
- $A \sim B = \neg(A \oplus B) = (A \to B) \& (B \to A) = (\neg A \vee B) \& (A \vee \neg B)$;
- $A \oplus B = \neg(A \sim B) = (\neg A \& B) \vee (A \& \neg B)$.

I.5 Тавтологія, протиріччя, висловлювання, що виконується, (*здійснене висловлювання*)

1. Складне висловлювання називається ***тавтологією***, якщо його значення завжди є істиною (1), незважаючи на істиннісні значення простих висловлювань, із яких воно складається.
   Приклад: висловлювання (pV¬p) є тавтологією.
2. Складне висловлювання називається ***протиріччям*** якщо його значення завжди є брехнею (0), незважаючи на істиннісні значення простих висловлювань, із яких воно складається.
   Приклад: висловлювання p&¬p є протиріччям.
3. Складне висловлювання, яке не є ні тавтологією, ні протиріччям називається ***висловлюванням, що виконується, або здійсненним висловлюванням***

A_1 A_2 … A_n	F
0 0 … 0	1
0 0 … 1	1
…	…
1 1 … 0	1
1 1 … 1	1

Щоб зрозуміти, чи є складне висловлювання тавтологією, достатньо побудувати для нього ТІ.

Скільки рядків буде в такої ТІ, якщо знаємо, зі скількох простих висловлювань воно побудоване?

Можливо також довести методом міркувань, що висловлювання є тавтологією (або протиріччям).

Для цього застосовують метод “від супротивного”. Тобто припускаємо, що дане висловлювання не тавтологія, і намагаємося знайти комбінації значень простих висловлювань, при яких складне висловлювання буде мати значення 0, тобто “брехня”. Якщо знайдемо, F не є тавтологією, якщо їх немає, то F є тавтологією.

Доведемо, що $F=((A \to B) \to A) \to A$ є тавтологія.

1. Нехай F=0, тоді, згідно з властивостями імплікації,
   $A=0$, а $(A \to B) \to A=1$ (тільки в цьому випадку F може дорівнювати 0).
2. Підставимо значення A в першу частину висловлювання F. $(0 \to B) \to 0$. Згідно з властивостями імплікації $(0 \to B) \to 0=0$, що конфліктує з нашим припущенням $(0 \neq 1)$.
3. Таким чином, $F=((A \to B) \to A) \to A$ є тавтологія, тобто $F \equiv 1$.

Оскільки протиріччя є запереченням тавтології, для доведення протиріччя можна застосовувати ті ж методи, що й для доведення тавтології.

І.6 Логічний наслідок

Складне висловлювання $G(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ називається **логічним наслідком** складного висловлювання $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, якщо кожного разу, коли F є істина, G також є істина. Інакше кажучи, F успадковує істину G.

Щоб визначити, чи є G логічним наслідком F, потрібно побудувати таблицю істинності висловлювань і порівняти відповідні рядки ($F \neq G$).

A B	A~B	B→A
0 0	1	1
0 1	0	0
1 0	0	1
1 1	1	1

Наприклад:
Нехай $F = A \sim B$ і $G = B \rightarrow A$.
У цьому випадку, коли F = “істина”, G=”істина” також.
Таким чином, G є логічним наслідком F.

Можливо також довести методом міркувань, що одне складне висловлювання є логічним наслідком іншого:

Якщо G є логічним наслідком F, то висловлювання H=F→G має бути тавтологією за визначенням логічного наслідку.

Приклад.

Маємо висловлювання G=AV(¬B), яке є логічним наслідком висловлювання F=AB V¬A ¬B. Покажемо, що висловлювання H=F→G **є** тавтологією. Інакше кажучи (AB V¬A ¬B)→(AV(¬B))≡1.

Доведення. Нехай висловлювання H=(AB V¬A ¬B)→(AV¬B), не є тавтологією, тоді мають бути такі комбінації значень A і B, при яких H=0.

Тоді, за визначенням імплікації, (ABV¬A ¬B)=1, а (AV¬B)=0.

З останнього висловлювання маємо: A=1 і B=0 (за визначенням диз'юнкції).

Якщо підставити знайдені значення A і B до висловлювання F, отримаємо конфлікт із вихідним припущенням ((1&0)V(0&1)=1, що протирічить властивостям кон'юнкції та диз'юнкції), таким чином, вихідна гіпотеза не може бути істиною, **отже H≡1,** а **G є логічним наслідком F**.

Найвживаніши тавтології

1. **A→A** **Закон визначення.** Кожне висловлювання є логічним наслідком самого себе (якщо щось існує, то воно існує).
2. **¬ (A&¬A)** **Закон протиріччя.** A і ¬A не можуть бути істинними одночасно.
3. **AV¬A** **Закон виключення третьго.** Або A є істина, або ¬A є істина.
4. **¬¬A~A** **Закон подвійного заперечення.** Подвійне заперечення висловлювання є тесаме висловлювання.
5. **A→(B→A)** **Істина з чого завгодно.** Якщо A=1**,** тоді B→A=1, незважаючи на значення B. B→A логічний наслідок A.
6. **¬A→(A→B)** **Що завгодно з брехні.** Якщо A=0, тоді A→ B =1, незважаючи на значення B. A→ B логічний наслідок **¬**A.

Найвживаніши тавтології (*продовження*)

7. **$A \wedge (A \to B) \to B$** **Modus ponens.** Правило розподілу. Якщо A є істина, а B є логічним наслідком A, тоді B є також істиною.
   Приклад. A= “Іде сніг”. $A \to B$=”Якщо зараз іде сніг, тоді зараз хмарно”. $A \wedge (A \to B) \to B$=”зараз хмарно”.
8. **$(A \to B) \wedge (\neg B) \to \neg A$** **Modus tollens.** Правило доказу від супротивного.
   Приклад. $A \to B$=” Якщо зараз іде сніг, тоді зараз хмарно”, $\neg B$=”Зараз не хмарно”, тоді “Зараз не іде сніг”.
9. **(A—>B) Λ (B —> C) —>(A —> C)** **Закон силогізму.**
   Приклад

Не знайшлося цвяха — підкова відпала, $(A_1 \to A_2)$

Не стало підкови — кобила закульгала, $(A_2 \to A_3)$

Кобила закульгала — командира вбито, — $(A_3 \to A_4)$

Кіннота тікає, — армія розбита, $(A_4 \to A_5)(A_5 \to A_6)$

Всіх вбиває ворог на своєму шляху, $(A_6 \to A_7)$

Все тому, що вчасно не знайшлося цвяха! $(A_1 \to A_7)$

Підсумок

Отже ви вивчили:

1. Рівність висловлювань;
2. Тавтологію, протиріччя, здійсненне висловлювання;
3. Логічний наслідок;
4. Базові логічні закони.

Домашнє завдання

1. Перевірте логічні закони за допомогою:

1) таблиць істинності;
2) міркувань.

2. Які з наведених висловлювань є логічним наслідком яких:

1) $A \rightarrow B$ 2) AVB 3) A&B 4) ¬(B&A)