Оренбургский государственный университет

Открытые онлайн курсы ОГУ

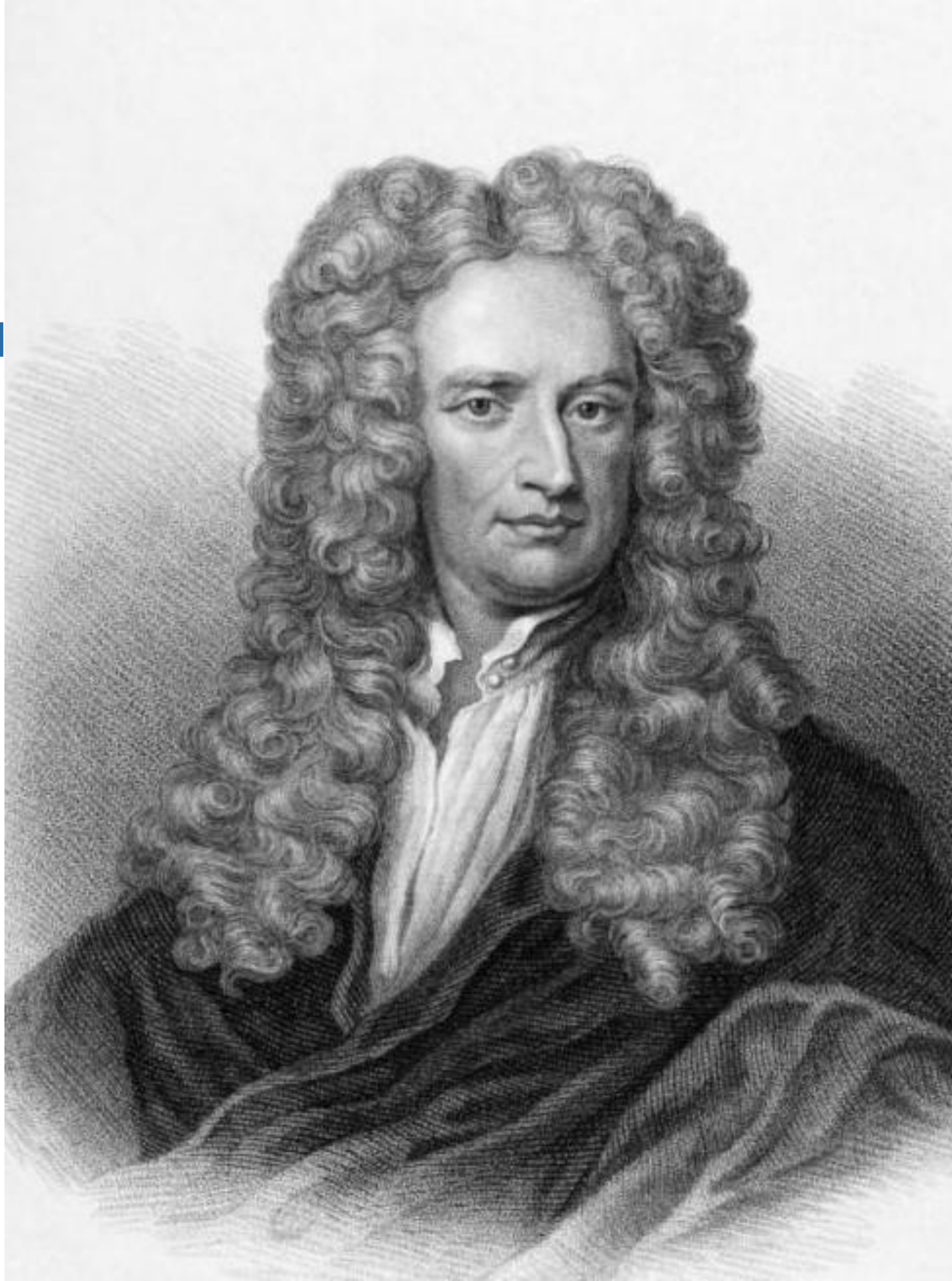
Дифференцирование функции одной переменной с приложениями

Модуль 2. Лекция 1 . Основные теоремы дифференциального исчисления функции одной переменной

Авторы:

Гамова Н.А., к.п.н., доцент кафедры прикладной математики

Спиридонова Е.В., к.ф.-м.н., доцент кафедры прикладной математики



План лекции

1. Теорема Ферма
2. Теорема Ролля
3. Теорема Коши
4. Теорема Лагранжа

Теорема Ферма

Теорема (Ферма): Пусть функция $y = f(x)$ определена на (a, b) и в некоторой точке x_0 этого интервала имеет наибольшее или наименьшее значение. Тогда, если в точке x_0 $\exists f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство:

Пусть функция $y = f(x)$ имеет наибольшее значение в точке x_0 , т. е.

$$f(x) \leq f(x_0), \forall x \in (a; b).$$

Тогда $f(x) - f(x_0) \leq 0,\text{т. е. } \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0,\ \forall\ (x_0 + \Delta x) \in (a; b)$.

Если $\Delta x > 0\ (x > x_0) \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0, f'(x_0 + 0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$ (правая производная)

Если $\Delta x < 0\ (x < x_0) \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0, f'(x_0 - 0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ (левая производная)

По условию $f'(x_0)$ существует $\rightarrow\ f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0)$

Это возможно только для случая, когда

$$f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = 0, \text{т. е. } f'(x_0) = 0$$

Случай, когда функция $y = f(x)$ имеет наименьшее значение в точке x_0 , разобрать самостоятельно!

Теорема Ролля

Теорема (Ролля): Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, причем:

1. $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$;
2. $y = f(x)$ дифференцируема на (a, b);
3. $f(a) = f(b)$.

Тогда существует точка $c \in (a, b)$, в которой $f'(c) = 0$.

Доказательство:

Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $\exists\, x_1, x_2 \in [a; b]: f(x_1) = m$, а $f(x_2) = M$ и выполняются неравенства $m \leq f(x) \leq M$.

Возможны два случая:

Теорема Коши

Теорема (Коши): Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на [*a*; *b*] и дифференцируемы на (a, b). Пусть $g'(x) \neq 0$. Тогда существует точка $c \in (a; b)$ такая, что справедлива формула:

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}$$

Доказательство:

Заметим, что $g(b) - g(a) \neq 0$. В противном случае по т. Ролля нашлась бы такая точка c: $g'(c) = 0$, чего не может быть по условию теоремы. Введем вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - F(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям т. Ролля $\rightarrow$ $\exists c \in (a, b)$, в которой $f'(c) = 0$.

Но $$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0$$

Отсюда $$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) \rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Теорема Лагранжа

Теорема (Лагранжа): Пусть на отрезке $[a; b]$ определена функция $y = f(x)$, причем:
1. $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$;
2. $y = f(x)$ дифференцируема на (a, b).

Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что справедлива формула

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Доказательство:

Рассмотрим теорему Лагранжа как частный случай т. Коши. Пусть $g(x) = x$, тогда

$$g(b) - g(a) = b - a, \qquad g'(x) = 1, \qquad g'(c) = 1.$$

Подставим эти значения в формулу из т. Коши

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Получим

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$