

1. МАТРИЦЫ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Матрицы. Действия с матрицами

- **Определение 1.1.** Таблица вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \boxtimes & & & \boxtimes \\ a_{m1} & a_{m2} & \boxtimes & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

- в которой все $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ – заданные числа, называется матрицей A размера $m \times n$. При этом m – число строк в матрице, n – число столбцов в матрице A . Число a_{ij} , стоящее в матрице A на пересечении i -ой строки и j -го столбца, называется элементом матрицы A .
- Если $m = n$, то матрица A называется квадратной, если же $m \neq n$, то A называется прямоугольной матрицей.

- **Примеры матриц**

- **1. Нулевая матрица** \mathbf{O} – матрица, у которой все элементы $a_{ij} = 0$:

$$\mathbf{O}_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxtimes & 0 \\ 0 & 0 & \boxtimes & 0 \\ \boxtimes & & & \boxtimes \\ 0 & 0 & \boxtimes & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

- **2. Единичная матрица** \mathbf{E} – квадратная матрица, у которой элементы:
 $a_{ij} = 1$ при $i = j$, а при $i \neq j$ $a_{ij} = 0$, т. е.

$$\mathbf{E}_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \boxtimes & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \boxtimes & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxtimes & 0 \\ \boxtimes & & & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & 0 & 0 & \boxtimes & 1 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

- **3. Диагональная матрица**
элементы:

D – квадратная матрица, у которой $n \times n$

$$a_{ij} = d_i \text{ при } i = j, \text{ а при } i \neq j \text{ } a_{ij} = 0 : \quad D_{n \times n} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \boxtimes & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \boxtimes & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \boxtimes & 0 \\ \boxtimes & & & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & 0 & 0 & \boxtimes & d_n \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

- **4. Матрица «треугольного вида» («верхнетреугольного вида»),**

A_{Δ} – квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные «под главной диагональю», равны нулю, т. е.

$$A_{\Delta} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \boxtimes & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \boxtimes & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \boxtimes & a_{3n} \\ \boxtimes & & & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & 0 & 0 & \boxtimes & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \cdot \quad (1.5)$$

- **Замечание.** «Главной диагональю» произвольной матрицы называют группу элементов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ (при $m \geq n$), либо группу элементов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm}$ (при $m < n$).
- **5. Матрица «почти треугольного вида»,** A_{Δ} – прямоугольная матрица, у которой все элементы, расположенные под «главной диагональю», равны нулю, т. е. при $m > n$

$$A_{\Delta}^{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \boxtimes & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \boxtimes & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \boxtimes & a_{3n} \\ \boxtimes & & & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & 0 & 0 & \boxtimes & a_{nn} \\ 0 & 0 & 0 & \boxtimes & 0 \\ \boxtimes & & & & \boxtimes \\ 0 & 0 & 0 & \boxtimes & 0 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

- либо при $m < n$

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \boxtimes & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \boxtimes & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & & a_{3n} \\ \boxtimes & & & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & 0 & 0 & \boxtimes & a_{mm} & \boxtimes & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

- **Определение 1.2** (равенство матриц). Матрица A называется равной матрице B ($A = B$), если обе матрицы имеют одинаковый размер $m \times n$ и, кроме того, все соответствующие элементы равны между собой: $a_{ij} = b_{ij}$.

- **Например.** Если

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix},$$

то $A = B$, $A \neq C$, $B \neq C$.

• **Определение 1.3** (сумма двух матриц). Пусть даны две матрицы A и B , тогда суммой $A + B$ матриц A и B называется матрица C , у которой элементы $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

• **Например.**
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3} + \begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

• **Определение 1.4** (произведение матрицы на число). Пусть дана матрица A и число λ . Произведением числа λ на матрицу A называется такая матрица B , у которой все элементы $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$.

• **Например.**
$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$$

• **Определение 1.5** (произведение двух матриц). Пусть даны две матрицы A и B , тогда произведением матрицы A (слева) на матрицу B (справа) называется матрица C , у которой элементы находятся так:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj} \quad (1.8)$$

• Свойства операций над матрицами

- 1) $A + B = B + A$ — КОММУТАТИВНОСТЬ,
 $m \times n \quad m \times n$
- 2) $A - B = A + (-1) \cdot B$, 3) $A \cdot E = A$, $E \cdot A = A$,
 $m \times n \quad m \times n \quad m \times n \quad n \times n \quad m \times m \quad m \times n$
- 4) Произведение матриц зависит от порядка расположения сомножителей, то есть,
 $A \cdot B \neq B \cdot A$

- 5) $A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ — АССОЦИАТИВНОСТЬ.
 $n \times n \quad n \times n \quad n \times n$

- 6) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ — ДИСТРИБУТИВНОСТЬ.
 $m \times n \quad m \times n \quad n \times k$

- **Например.** Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, то

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 \\ -3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 & -3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) & -3 \cdot 3 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 8 & -7 & -9 \end{pmatrix}$$

- **Замечание.** $\begin{matrix} B \cdot A \\ 2 \times 3 \quad 2 \times 2 \end{matrix}$ – умножение невозможно. Кроме того:

$$\underline{A} \cdot \underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \\ -3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 & -3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = A \cdot C,$$

$$\underline{C} \cdot \underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 10 \end{pmatrix} = C \cdot A \Rightarrow A \cdot C \neq C \cdot A.$$

- **Определение 1.6.** Дана квадратная матрица A . Обратной матрицей к матрице A называется такая матрица A^{-1} , которая обладает следующими свойствами:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E, \tag{1.9}$$

где E – единичная матрица такого же размера.

- **Замечание.** Не всякая квадратная матрица имеет к себе обратную.

- **Например:** матрица $\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ не имеет к себе обратной, т. к. если

$$\underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{из (1.9)} \Rightarrow E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

по определению 1.2 должны выполняться все равенства:

$$b_{21} = 1, b_{22} = 0, 0 = 0, 0 = 1 - \text{противоречие.}$$

- **Теорема 1.1.** Дана диагональная матрица , у которой $d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot \dots \cdot d_n \neq 0$:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \dots & 0 \\ \dots & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} d_1^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_3^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n^{-1} \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

1.2. Элементарные преобразования матриц

- **Определение 1.7.** *Элементарными преобразованиями* матрицы A называются следующие преобразования:

- 1) перестановка любых двух строк (столбцов) в матрице;
- 2) умножение любой строки (столбца) на любое ненулевое число;
- 3) прибавление к любой строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на любое число.

Матрицы A и B называются эквивалентными ($A \sim B$), если они получаются одна из другой с помощью цепочки элементарных преобразований.