1. МАТРИЦЫ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Матрицы. Действия с матрицами

- **Определение 1.1.** Таблица вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

- в которой все $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ – заданные числа, называется матрицей A размера $m \times n$. При этом m – число строк в матрице , n – число столбцов в матрице A. Число a_{ij}, стоящее в матрице A на пересечении i–ой строки и j–го столбца, называется элементом матрицы A.

- Если $m = n$, то матрица A называется квадратной, если же $m \neq n$, то A называется прямоугольной матрицей.

- **Примеры матриц**

- **1. Нулевая матрица** O – матрица, у которой все элементы $a_{ij} = 0$:

$$\underset{m\times n}{\mathrm{O}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.2)$$

- **2. Единичная матрица** E – квадратная матрица, у которой элементы:

$a_{ij} = 1$ при $i = j$, а при $i \neq j$ $a_{ij} = 0$, т. е.

$$\underset{n\times n}{\mathrm{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.3)$$

- **3. Диагональная матрица** $\underset{n\times n}{D}$ – квадратная матрица, у которой элементы:

$a_{ij} = d_i$ при $i = j$,

а при $i \neq j$ $a_{ij} = 0$:

$$\underset{n\times n}{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \qquad (1.4)$$

- **4. Матрица «треугольного вида» («верхнетреугольного вида»),**

A_Δ – квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные «под главной диагональю», равны нулю, т. е.

$$\underset{n\times n}{A_\Delta} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \bullet \quad . \qquad (1.5)$$

- **Замечание.** «Главной диагональю» произвольной матрицы называют группу элементов $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ (при $m \ge n$), либо группу элементов $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}$ (при $m < n$).

- **5. Матрица «почти треугольного вида»,** $A_{"\Delta"}$ – прямоугольная матрица, у которой все элементы , расположенные под «главной диагональю», равны нулю, т. е. при $m > n$

$$\underset{m\times n}{A_{"\Delta"}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.6)$$

- либо при $m < n$

$$\underset{m\times n}{A_{"\Delta"}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & & & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \; \cdots & a_{mm} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1.7)$$

- **Определение 1.2** (равенство матриц). Матрица A называется равной матрице B (A = B), если обе матрицы имеют одинаковый размер $m \times n$ и, кроме того, все соответствующие элементы равны между собой: $a_{ij} = b_{ij}$.

- **Например.** Если

$$\underset{2\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underset{2\times 3}{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underset{2\times 3}{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix},$$

то A = B, A $\neq$ C, B $\neq$ C.

- **Определение 1.3** (сумма двух матриц). Пусть даны две матрицы $\underset{m\times n}{A}$ и $\underset{m\times n}{B}$, тогда суммой A + B матриц A и B называется матрица $\underset{m\times n}{C}$, у которой элементы $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

- **Например.** $\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}} + \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}}$

- **Определение 1.4** (произведение матрицы на число). Пусть дана матрица $\underset{m\times n}{A}$ и число λ. Произведением числа λ на матрицу A называется такая матрица $\underset{m\times n}{B}$, у которой все элементы $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$.

- **Например.** $3 \cdot \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}}$

- **Определение 1.5** (произведение двух матриц). Пусть даны две матрицы $\underset{m\times p}{A}$ и $\underset{p\times n}{B}$, тогда произведением матрицы A (слева) на матрицу B (справа) называется матрица $\underset{m\times n}{C}$, у которой элементы находятся так:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj} \tag{1.8}$$

- **Свойства операций над матрицами**

- 1) $\underset{m\times n}{A}+\underset{m\times n}{B}=B+A$ – коммутативность,
- 2) $\underset{m\times n}{A}-\underset{m\times n}{B}=A+(-1)\cdot B$, 3) $\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times n}{E}=A$, $\underset{m\times m}{E}\cdot\underset{m\times n}{A}=A$,
- 4) Произведение матриц зависит от порядка расположения сомножителей, то есть, $A\cdot B\neq B\cdot A$.
- 5) $\underset{n\times n}{A}\cdot\underset{n\times n}{B}\cdot\underset{n\times n}{C}=(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$ – ассоциативность.
- 6) $\left(\underset{m\times n}{A}+\underset{m\times n}{B}\right)\cdot\underset{n\times k}{C}=A\cdot C+B\cdot C$ – дистрибутивность.
- **Например.** Если $\underset{2\times 2}{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$, $\underset{2\times 3}{B}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $\underset{2\times 2}{C}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, то

$$\underset{2\times 2}{A}\cdot\underset{2\times 3}{B}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 0+2\cdot 2 & 1\cdot 1+2\cdot(-1) & 1\cdot 3+2\cdot 0\\ -3\cdot 0+4\cdot 2 & -3\cdot 1+4\cdot(-1) & -3\cdot 3+4\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1 & 3\\ 8 & -7 & -9\end{pmatrix}$$

- **Замечание.** $\underset{2\times3}{B}\cdot\underset{2\times2}{A}$ – умножение невозможно. Кроме того:

$$\underset{2\times 2}{A}\cdot\underset{2\times 2}{C}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot1 & 1\cdot0+2\cdot2\\ -3\cdot1+4\cdot1 & -3\cdot0+4\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 8\end{pmatrix}=A\cdot C,$$

$$\underset{2\times 2}{C}\cdot\underset{2\times 2}{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot(-3) & 1\cdot2+0\cdot4\\ 1\cdot1+2\cdot(-3) & 1\cdot2+2\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -5 & 10\end{pmatrix}=C\cdot A \quad\Rightarrow A\cdot C\neq C\cdot A.$$

- **Определение 1.6.** Дана квадратная матрица $\underset{n\times n}{A}$. Обратной матрицей к матрице А называется такая матрица $\underset{n\times n}{A^{-1}}$, которая обладает следующими свойствами:

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E, \tag{1.9}$$

где E – единичная матрица такого же размера.

- **Замечание.** Не всякая квадратная матрица имеет к себе обратную .

- **Например:** матрица $\underset{2\times 2}{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ не имеет к себе обратной, т. к. если

$$\underset{2\times 2}{A^{-1}}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\Rightarrow \textit{из } (1.9)\Rightarrow\ E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{21} & b_{22}\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

по определению 1.2 должны выполняться все равенства:

$$b_{21}=1,\ b_{22}=0,\ 0=0,\ 0=1-\textit{противоречие.}$$

- **Теорема 1.1.** Дана диагональная матрица , у которой $d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot \ldots \cdot d_n \neq 0$:

$$\underset{n\times n}{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} d_1^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n^{-1} \end{pmatrix} \qquad (1.10)$$

1.2. Элементарные преобразования матриц

- **Определение 1.7.** *Элементарными преобразованиями* матрицы A называются следующие преобразования:

1) перестановка любых двух строк (столбцов) в матрице;
2) умножение любой строки (столбца) на любое ненулевое число;
3) прибавление к любой строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на любое число.

Матрицы A и B называются эквивалентными (A ~B), если они получаются одна из другой с помощью цепочки элементарных преобразований.