Лекция 4. Измерение направления ветра

Способы измерения направления ветра:

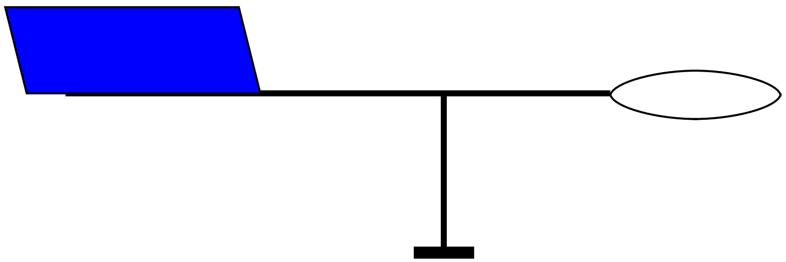
1. Флюгарка (в том числе с дистанционной передачей данных).

2. Шары-пилоты и радиозонды (в свободной атмосфере).

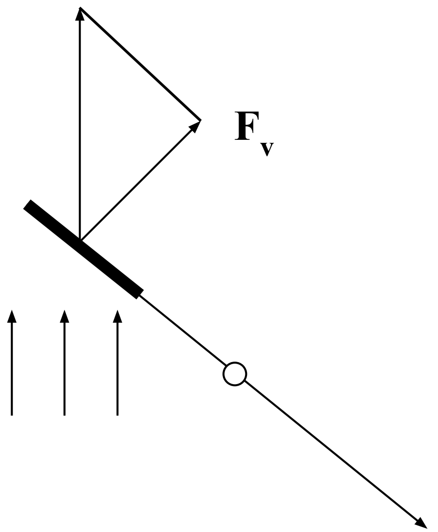
3. Лазерные и акустические анемометры с векторным сложением проекций.

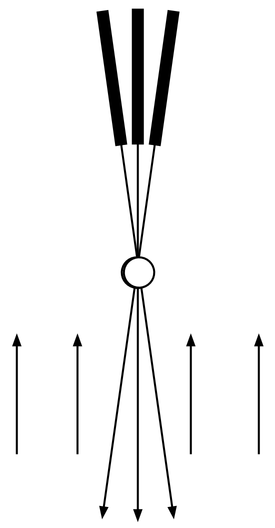
Лекция 4. Измерение направления ветра

Теория действия флюгарки.



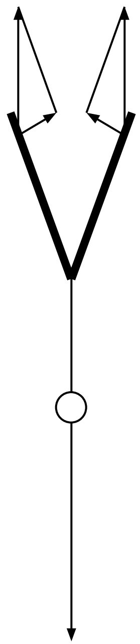
Флюгарка разворачивается под действием ветра:



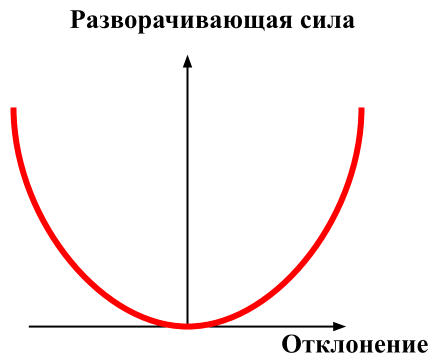


При повороте флюгарки по ветру сила F_v становится равной нулю. Однако при малейших отклонениях от этого направления она появляется. Флюгарка колеблется.

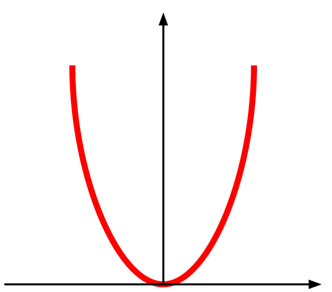
Для уменьшения колебаний флюгарку снабжают двумя плоскостями:



Тогда при колебаниях флюгарки одна из разворачивающих сил уменьшается, а другая увеличивается. Флюгарка становится более устойчивой.



Флюгарка с одной лопастью



Флюгарка с двумя лопастями

Лекция 4. Измерение направления ветра

Рассмотрим силы, действующие на флюгарку при ее повороте.

1. Сила инерции, препятствующая вращению флюгарки. Момент силы инерции:

$$M\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}$$

где M **– момент инерции флюгарки (** mr^2 **),**

φ **– угол поворота флюгарки,**

τ **– время.**

2. Сила трения, препятствующая вращению флюгарки. Момент силы трения:

$$k_1\frac{d\varphi}{d\tau}$$

где k_1 **- коэффициент трения на оси флюгарки.**

3. Сила аэродинамического давления, поворачивающая флюгарку. Момент силы аэродинамического давления:

$$k_2(\varphi - \varphi_v)$$

где k_2 **- коэффициент, зависящий от атмосферного давления,**

φ_v **– направление ветра.**

4. Сила аэродинамического сопротивления, препятствующая повороту. Момент силы аэродинамического сопротивления:

$$k_3 \frac{d}{d\tau}(\varphi - \varphi_v)$$

Сумма всех моментов сил равна нулю:

$$M \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + k_1 \frac{d\varphi}{d\tau} + k_2(\varphi - \varphi_v) + k_3 \frac{d}{d\tau}(\varphi - \varphi_v) = 0$$

Лекция 4. Измерение направления ветра

$$M\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}+k_1\frac{d\varphi}{d\tau}+k_2(\varphi-\varphi_v)+k_3\frac{d}{d\tau}(\varphi-\varphi_v)=0$$

Предположим:

1. Ветер северный: $\varphi_v=0$

2. Скорость и направление ветра постоянные.

Тогда:

$$M\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}+k_1\frac{d\varphi}{d\tau}+k_2\varphi+k_3\frac{d\varphi}{d\tau}=0$$

Обозначим:

$$k_1+k_3\equiv k$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}+\frac{k}{M}\frac{d\varphi}{d\tau}+\frac{k_2}{M}\varphi=0$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{k}{M}\frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{k_2}{M}\varphi = 0$$

Это однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Ищем решение в виде:

$$\varphi = Ce^{b\tau}$$

где С и в – константы.

Подставляем решение в уравнение:

$$b^2Ce^{b\tau} + \frac{k}{M}bCe^{b\tau} + \frac{k_2}{M}Ce^{b\tau} = 0$$

Получаем характеристическое уравнение:

$$b^2 + \frac{k}{M}b + \frac{k_2}{M} = 0$$

$$b^2 + \frac{k}{M}b + \frac{k_2}{M} = 0$$

Его решение:

$$b_{1,2} = -\frac{k}{2M} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4M^2} - \frac{k_2}{M}} = -\frac{k}{2M} \pm \frac{\sqrt{k^2 - 4Mk_2}}{2M}$$

Случай 1.

$$\boxed{k^2 >> 4Mk_2}$$

Т.е. флюгарка маленькая, легкая (малое M), трение и аэродинамическое торможение велико (большое k).

Тогда:

$$b_{1,2} = -\frac{k}{2M} \pm \frac{k}{2M} = \begin{cases} = 0 \\ = -\dfrac{k}{M} \end{cases}$$

Лекция 4. Измерение направления ветра

Получаем два решения:

$$\varphi_1 = C_1 e^0 = C_1$$

$$\varphi_2 = C_2 e^{-\frac{k}{M}\tau}$$

Объединяем их в общее решение:

$$\varphi = C_1 + C_2 e^{-\frac{k}{M}\tau}$$

Учтем начальное и конечное условия:

$\varphi_{\tau=0} = \varphi_0$ **(прежнее направление ветра)**

$\varphi_{\tau\to\infty} = 0$ **(северное направление ветра)**

Подставляя, получаем C_1 и C_2 :

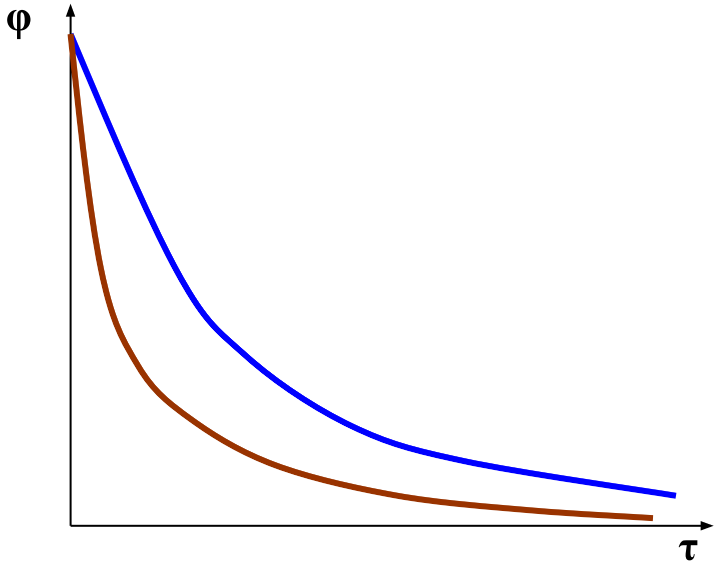
$$\varphi_{\tau\to\infty} = C_1 = 0$$

$$\varphi_{\tau=0} = C_2 = \varphi_0$$

Тогда общее решение:

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 e^{-\frac{k}{M}\tau}}$$

Построим график:



Чем больше коэффициент $\frac{k}{M}$, т. е. чем легче и меньше флюгарка, тем быстрее она воспринимает новое направление ветра.

При этом необходимо условие:

$$k^2 > 4Mk_2$$

Назовем такой режим действия флюгарки апериодическим.

Случай 2.

$$b = -\frac{k}{2M} \pm \frac{\sqrt{k^2 - 4Mk_2}}{2M}$$

$$\boxed{k^2 < 4Mk_2}$$

Тогда дискриминант отрицательный. Корни характеристического уравнения мнимые. Возможны два решения дифференциального уравнения:

$$\varphi_1 = C_1 e^{-\frac{k\tau}{2M}} \cos\sqrt{\frac{k_2}{M} - \frac{k^2}{4M^2}} \cdot \tau$$

$$\cancel{\varphi_2 = C_2 e^{-\frac{k\tau}{2M}} \sin\sqrt{\frac{k_2}{M} - \frac{k^2}{4M^2}} \cdot \tau}$$

Подставляя во второе решение условие $\varphi_{\tau=0} = \varphi_0$, видим, что оно не выполняется $(\sin 0 = 0)$. Поэтому второе решение отбросим.

Остается одно решение:

$$\varphi_1 = C_1 e^{-\frac{k\tau}{2M}} \cos\sqrt{\frac{k_2}{M} - \frac{k^2}{4M^2}} \cdot \tau$$

Подставляем начальное условие: $\varphi_{\tau=0} = \varphi_0$

Тогда: $C_1 = \varphi_0$

Запишем решение в виде:

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\frac{k\tau}{2M}} \cos\frac{2\pi}{T} \cdot \tau$$

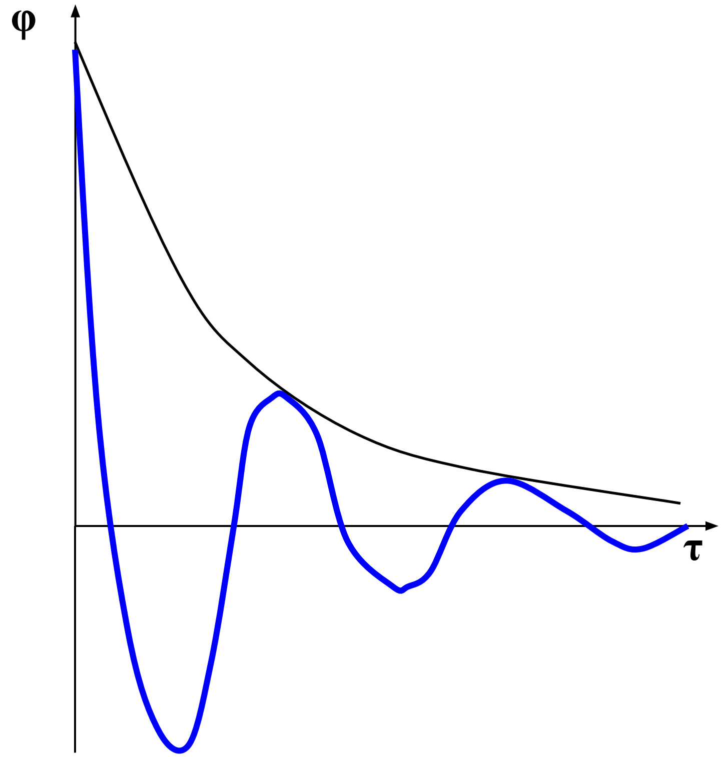
где:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k_2}{M} - \frac{k^2}{4M^2}}} = \frac{4\pi \cdot M}{\sqrt{4Mk_2 - k^2}}$$

Лекция 4. Измерение направления ветра

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\frac{k\tau}{2M}} \cos\frac{2\pi}{T}\cdot\tau \qquad T = \frac{4\pi\cdot M}{\sqrt{4Mk_2 - k^2}}$$

Это колебательное движение с затухающей амплитудой и периодом T:



Назовем такой режим действия флюгарки периодическим.

$$T = \frac{4\pi \cdot M}{\sqrt{4Mk_2 - k^2}}$$

Чем меньше масса флюгарки, тем меньше период колебаний Т.

Выводы.

1. Если флюгарка легкая, $k^2 > 4Mk_2$, то она работает в апериодическом режиме. Чем меньше масса, тем быстрее флюгарка воспринимает направление.

2. Если флюгарка тяжелая, $k^2 < 4Mk_2$, то она работает в периодическом режиме. Чем больше масса, тем больше период колебаний.

Таким образом, существует такая масса флюгарки, когда периодический режим сменяется апериодическим.

Назовем такой режим предельно периодическим. Он достигается при условии:

$$k^2 = 4Mk_2$$

Или:

$$M = \frac{k^2}{4k_2}$$

Поскольку k = k (V), а k_2 зависит от трения и аэродинамического сопротивления, то масса и размер флюгарки выбираются с учетом этих параметров согласно требованию:

$$\boxed{M < \frac{k^2}{4k_2}}$$