

# Сверхпроводимость

*План:*

1. *Основные свойства*
  - *Критическая температура и критическое магнитное поле*
  - *Квантование магнитного потока*
  - *Идеальный диамагнетизм.*
  - *Магнитные свойства сверхпроводников.*
2. *Теоретическое рассмотрение*
  - *Теория Лондонов.*
  - *Куперовские пары.*
  - *Теория Бардина-Купера-Шриффера (БКШ).*
3. *Слабая сверхпроводимость. Эффекты Джозефсона.*
  - *Квантовый магнитометр.*

# Основные свойства

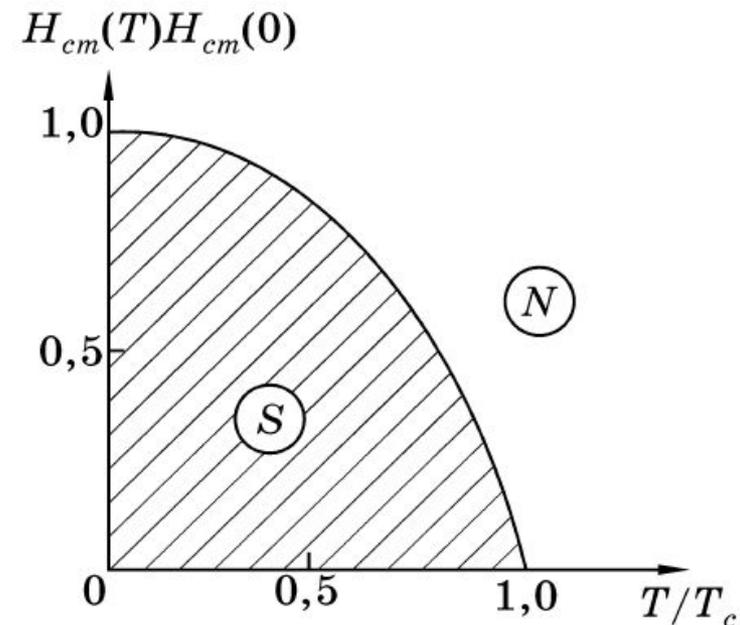
## Критическая температура и критическое магнитное поле

Температура, при которой происходит переход из нормального состояния в сверхпроводящее – критическая температура  $T_c$ .

Сверхпроводимость можно разрушить слабым магнитным полем – критическим  $H_{cm}$

$$H_{cm}(T) = H_{cm}(0) \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad (1)$$

Зависимость критического поля  $H_c$  от температуры



# Основные свойства

## Квантование магнитного потока

Рассмотрим сверхпроводящее кольцо, по которому циркулирует сверхпроводящий ток  $I$ . Электроны движутся по окружности радиуса  $r$ , со скоростью  $v$ , создавая магнитный поток  $\Phi$  через рассматриваемую окружность. Энергия этого потока  $E$

$$E = \frac{1}{2} I \Phi \quad (2)$$

$$I = \frac{Ne}{T} = \frac{Ne v}{2\pi r} \quad E = \frac{1}{2} \frac{Ne v}{2\pi r} \Phi = \frac{Ne v}{4\pi r} \Phi \quad (3)$$

$$E = N \frac{mv^2}{2} \quad (4) \quad \Phi = \frac{2\pi m v r}{e} = \frac{2\pi p r}{e} \quad (5)$$

$$p r = n \hbar = n \frac{h}{2\pi} \quad \Phi = \frac{h}{2e} n \quad (6)$$

Это выражает квантование магнитного потока в сверхпроводниках. Квант магнитного потока – флюксон

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2,07 \cdot 10^{-15} \text{ Вб} \quad (7)$$

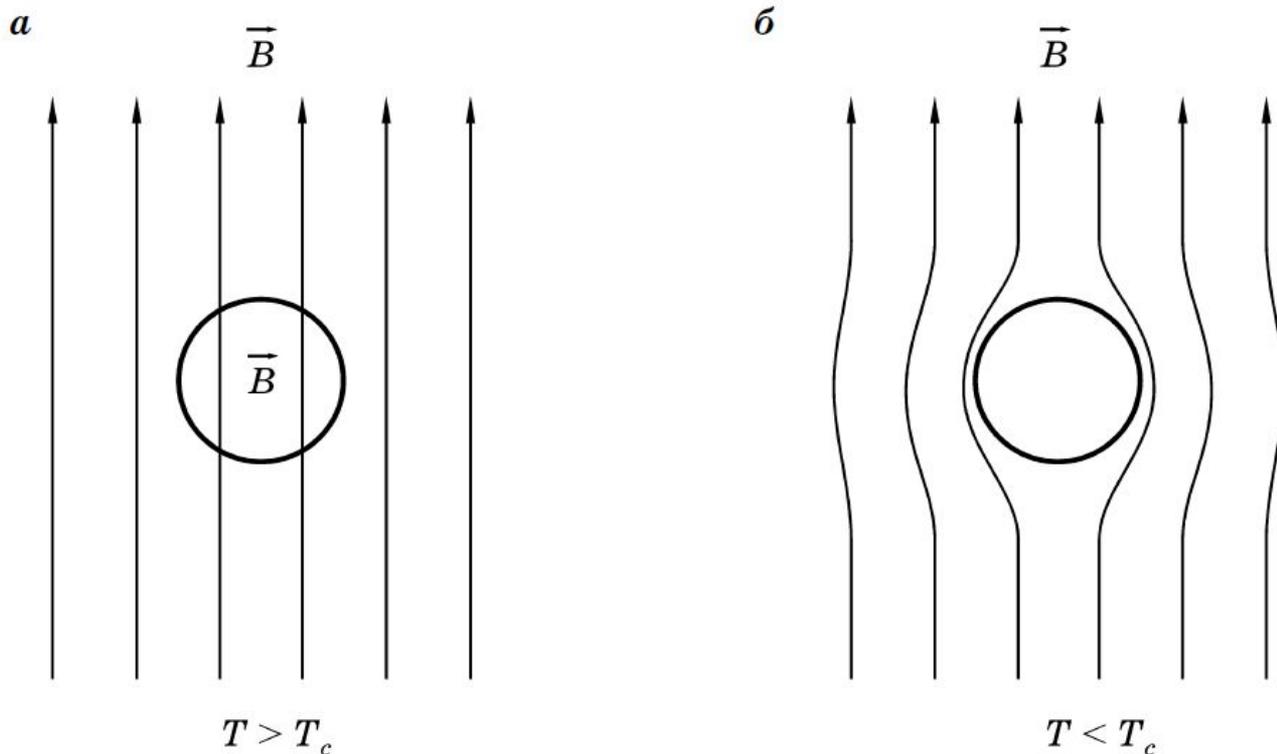
# Основные свойства

## Идеальный диамагнетизм

В 1933 г. было обнаружено, что при  $T < T_c$  магнитный поток выталкивается из образца.

В сверхпроводящем состоянии образцы становятся идеальными диамагнетиками, в которых магнитная индукция  $\vec{B} = 0$

Это явление – эффект Мейсснера-Оксенфельда.



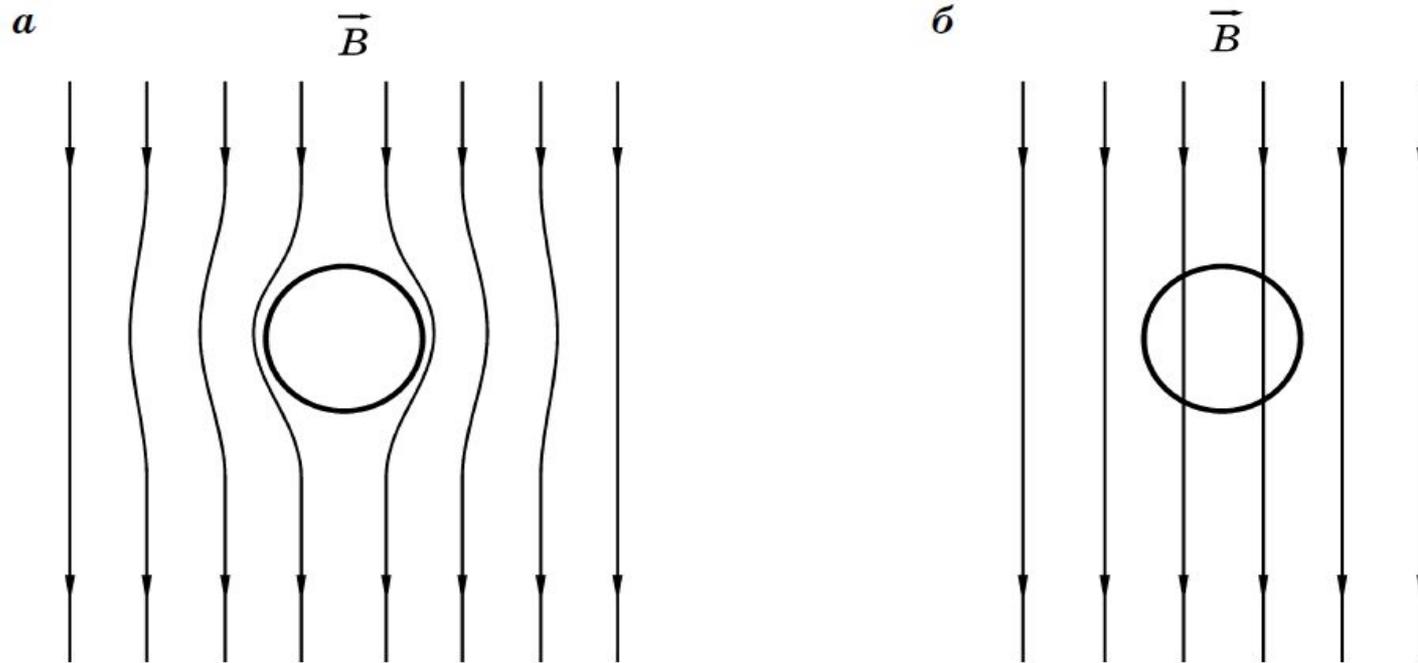
*Выталкивание магнитного потока из сверхпроводящего образца*

# Основные свойства

## Идеальный диамагнетизм

из закона Ома  $\vec{E} = \rho \cdot \vec{j}$        $\rho \rightarrow 0$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\vec{B}}{dt} \quad (8) \quad \frac{d\vec{B}}{dt} = 0 \quad T < T_c, H > 0$$



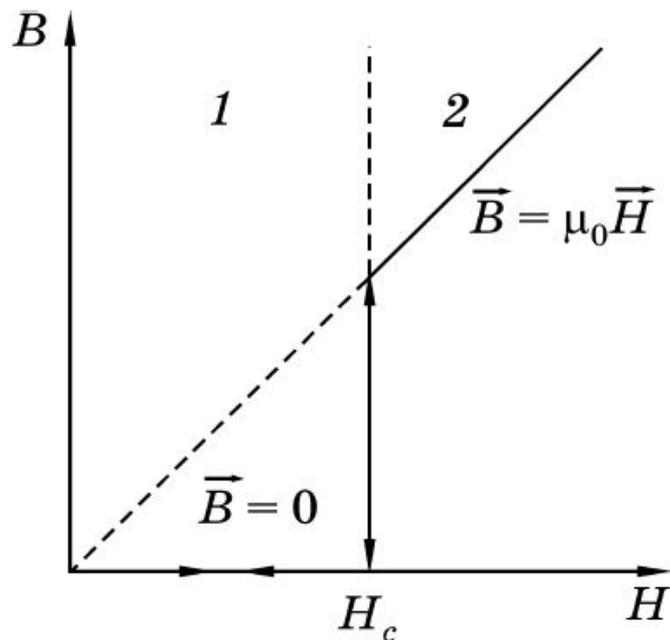
*Зависимость магнитного состояния идеального проводника при  $T < T_c, H > 0$  от предыстории:*

*a — идеальный проводник в магнитном поле при  $T < T_c$ ; б — то же, но при  $T > T_c$ .*

# Основные свойства

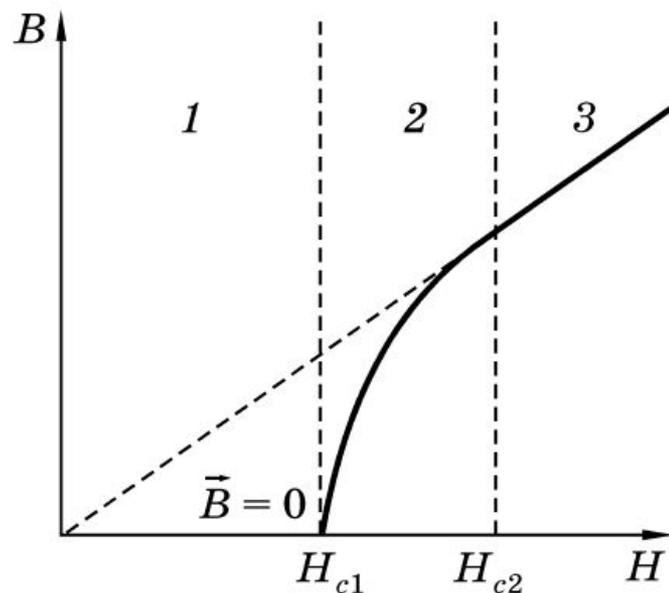
## Магнитные свойства сверхпроводников

Сверхпроводники: первого рода, второго рода (ниобий, сверхпроводящие сплавы и химические соединения).



*Магнитное поле внутри сверхпроводника первого рода во внешнем магнитном поле  $H$ :*

1 — сверхпроводящее; 2 — нормальное состояние.



*Среднее магнитное поле в сверхпроводнике второго рода во внешнем магнитном поле  $H$ :*

1 — сверхпроводящее; 2 — смешанное; 3 — нормальное состояние.

# Основные свойства

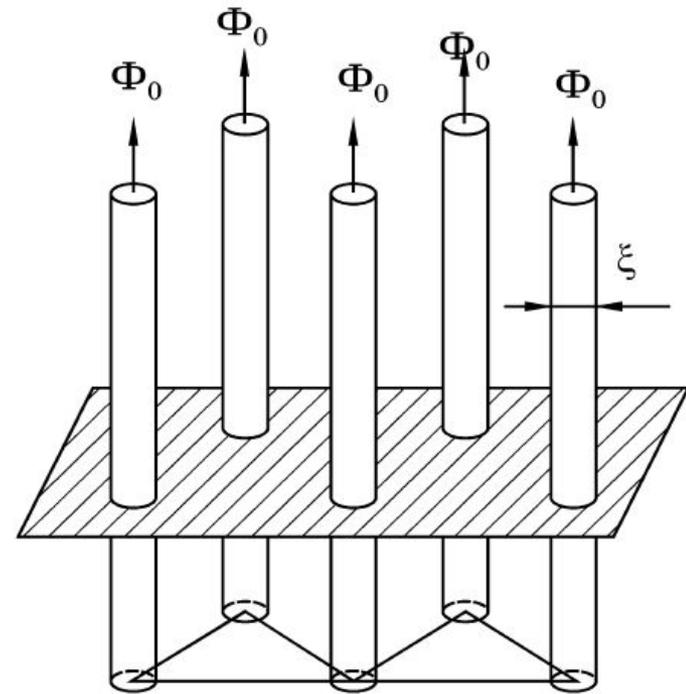
## Магнитные свойства сверхпроводников

Сердцевина вихря – кор. он равен длине когерентности  $\xi$

$$H_{c1} \cong \frac{\Phi_0}{\pi\lambda^2} \quad (9)$$

$$H_{c2} \cong \frac{\Phi_0}{\pi\xi^2} \quad (10)$$

Закрепление вихрей – пиннинг.



Абрикосовские вихри в сверхпроводнике второго рода в магнитном поле  $H_{c1} < H < H_{c2}$

# Теоретическое рассмотрение

## Теория Лондонов

1935 г. теория Лондонов – «двухжидкостная» модель сверхпроводника.

Два типа электронов: «нормальные» -  $n_n(T)$ ; «сверхпроводящие» -  $n_s(T)$ .

$$\vec{j} \quad \vec{E} \quad \vec{B}$$

$$m \frac{d\vec{V}_s}{dt} = -e\vec{E} \quad (11)$$

$$\vec{j} = -en_s\vec{V}_s \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{e^2 n_s}{m} \vec{E} \quad (12)$$

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = 0 \quad \vec{E} = 0 \quad \text{rot} \dot{\vec{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \dot{\vec{B}}}{\partial t} \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{4\pi}{c} \lambda^2 \text{rot} \vec{j} + \dot{\vec{B}} \right] = 0 \quad (14)$$

$$\lambda^2 = \frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} \quad \text{rot} \dot{\vec{B}} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (15)$$

# Теоретическое рассмотрение

## Теория Лондонов

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B} = -\Delta \vec{B} + \nabla \operatorname{div} \vec{B} \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\lambda^2 \Delta \dot{\vec{B}} - \dot{\vec{B}}] = 0 \quad (16)$$

$$\Delta \frac{\partial}{\partial t} \dot{\vec{B}} - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial t} \dot{\vec{B}} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \dot{\vec{B}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial t} \dot{\vec{B}}(0) \exp\left(-\frac{\mathbf{x}}{\lambda}\right) = \dot{\vec{B}}_0 \exp\left(-\frac{\mathbf{x}}{\lambda}\right) \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \dot{\vec{B}}(0) = \frac{\partial}{\partial t} \dot{\vec{B}}_0 \quad \Delta \vec{B} - \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} = 0 \quad (19)$$

$$B(\mathbf{x}) = B_0 \exp\left(-\frac{\mathbf{x}}{\lambda}\right) \quad (20)$$

$$\operatorname{rot} \vec{j} = -\frac{c}{4\pi} \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} \quad (21)$$

# Теоретическое рассмотрение

## Теория Лондонов

$$x = \lambda \quad \frac{1}{e} B_0$$

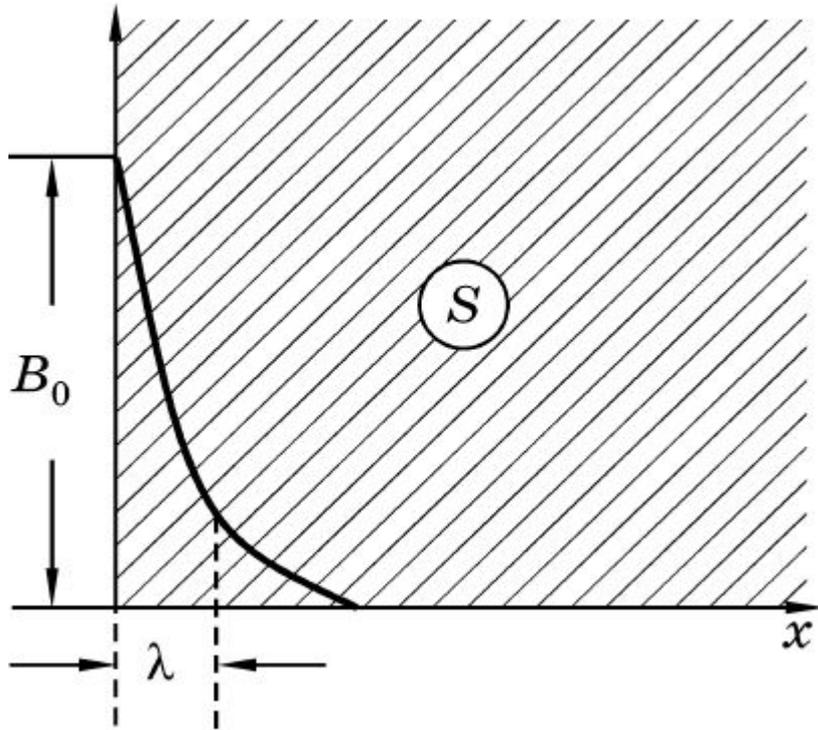
при  $T = 0 \text{ К}$

$$n_S(0) = n \approx 10^{22} \text{ см}^{-3}$$

$$\lambda(0) \approx 10^{-6} \text{ см}$$

$$T \ll T_c$$

$$j = \frac{cB_0}{4\pi\lambda} \exp\left(\frac{x}{\lambda}\right) = I_0 \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \quad (21)$$



Изменение магнитного  
поля у поверхности  
сверхпроводника

# Теоретическое рассмотрение

## Куперовские пары

$$\vec{k} \uparrow, -\vec{k} \downarrow \quad \Delta \approx k_B T_c \quad \delta x \delta p \approx \hbar \quad \Delta \approx E_F$$

$$\Delta \approx k_B T_c = \delta E = \delta \left( \frac{p^2}{2m^*} \right) = \left( \frac{p^2}{m^*} \right) \delta p \approx v_F \delta p \quad (22)$$

$$\delta x \equiv \xi_0 \approx \frac{\hbar v_F}{\Delta} \approx \frac{1}{k_F} \frac{E_F}{k_B T_c} \quad (23)$$

$$E_F \sim 10 \text{ эВ}, k_F \sim 10^8 \text{ см}^{-1} \text{ и } T_c = 10 \text{ К} \quad \xi_0 = 10^{-4} \text{ см}$$

# *Теоретическое рассмотрение*

## **Теория Бардина-Купера-Шриффера (Теория БКШ)**

Микроскопическая теория сверхпроводимости была построена Бардиным, Купером и Шриффером в 1957 г.

$$N(E_F) \quad T_c \approx \theta_D \exp\left(-\frac{1}{N(E_F)V}\right) \quad (24)$$

# Слабая сверхпроводимость. Эффекты Джозефсона

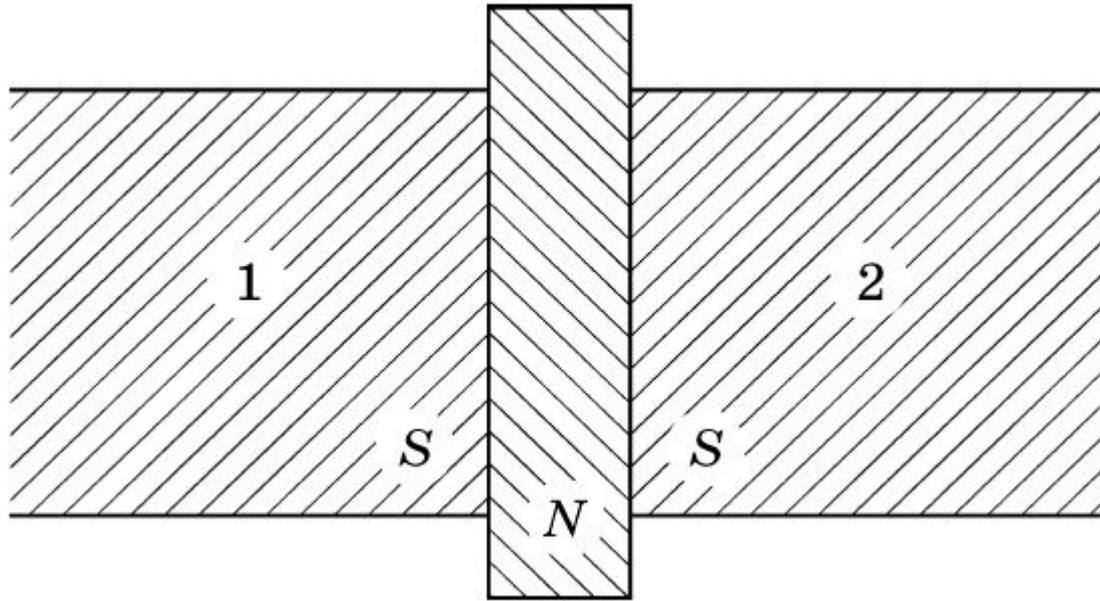


Схема перехода  
Джозефсона

$$E_1 \text{ и } E_2 \quad k$$

$$k = 0 \quad E_1 = E_2$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = E_1 \psi_1 + k \psi_2 \quad (25)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = E_2 \psi_2 + k \psi_1$$

$$\psi_1 = \sqrt{\rho} \exp(i\Phi_1), \quad \psi_2 = \sqrt{\rho} \exp(i\Phi_2) \quad (26)$$

# Слабая сверхпроводимость. Эффекты Джозефсона

$$V \quad q = 2e \quad qV \quad -\frac{qV}{2} \quad +\frac{qV}{2}$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{qV}{2} \psi_1 + k \psi_2, \quad (27)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = -\frac{qV}{2} \psi_2 + k \psi_1$$

$$i\hbar \left( \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \frac{\partial \rho}{\partial t} \exp(i\Phi_1) + i\sqrt{\rho} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \exp(i\Phi_1) \right) = \quad (28)$$
$$= \frac{qV}{2} \sqrt{\rho} \exp(i\Phi_1) + k\sqrt{\rho} \exp(i\Phi_2).$$

$$\delta = \Phi_2 - \Phi_1 \quad (29)$$

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} - 2\hbar \rho \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = qV \rho + 2k\rho (\cos \delta + i \sin \delta) \quad (30)$$

# Слабая сверхпроводимость. Эффекты Джозефсона

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} - 2\hbar \rho \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = -qV\rho + 2k\rho(\cos\delta - i\sin\delta) \quad (31)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{2k\rho}{\hbar} \sin\delta \quad (32)$$

$$I = I_0 \sin\delta \quad (33)$$

$$-\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = \frac{k\rho}{\hbar} \cos\delta + \frac{qV}{2\hbar} \quad (34)$$

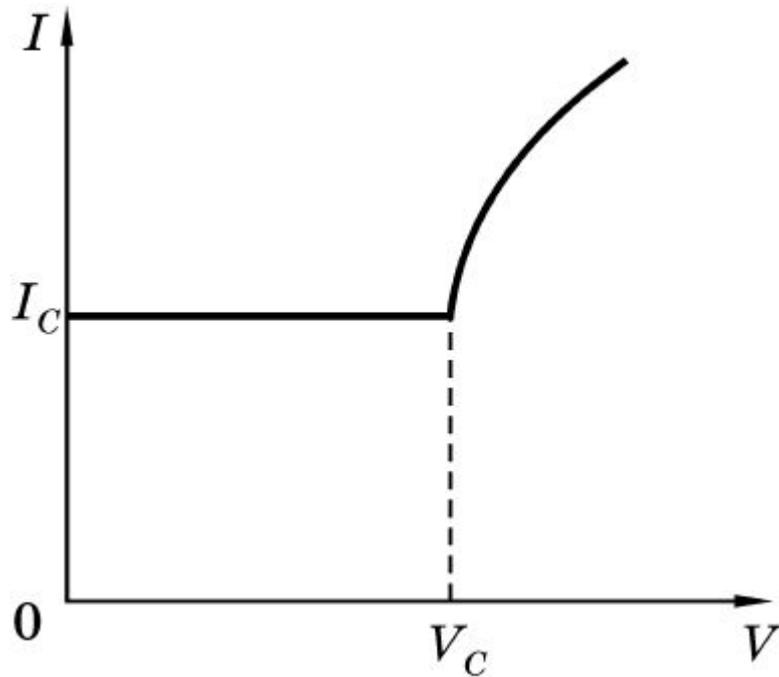
$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = -\frac{k\rho}{\hbar} \cos\delta + \frac{qV}{2\hbar} \quad (35)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{qV}{\hbar} \quad (36)$$

# Слабая сверхпроводимость. Эффекты Джозефсона

$$q = 2e \quad \delta = \delta_0 + \frac{q}{\hbar} \int V(t) dt \quad V_0$$

$$I = I_c \sin\left(\delta_0 + \frac{q}{\hbar} V_0 t\right) \quad (37)$$



*Вольт-амперная характеристика джозефсоновского перехода*