Лекция 5

Плоские и планарные графы

ИЗОМОРФНЫЕ ГРАФЫ

- Графы G' и G'' называются **изоморфными**, если существует взаимно –однозначное соответствие между их ребрами и вершинами, причем соответствующие ребра соединяют соответствующие вершины.
- Между названием вершины и ее номером различия нет. Можно так переобозначить вершины первого графа, что в новых обозначениях вершины и ребра будут совпадать со вторым графом, причем кратным ребрам первого G' должны соответствовать кратные ребра второго G'' такой же кратности (рис. 5.1).

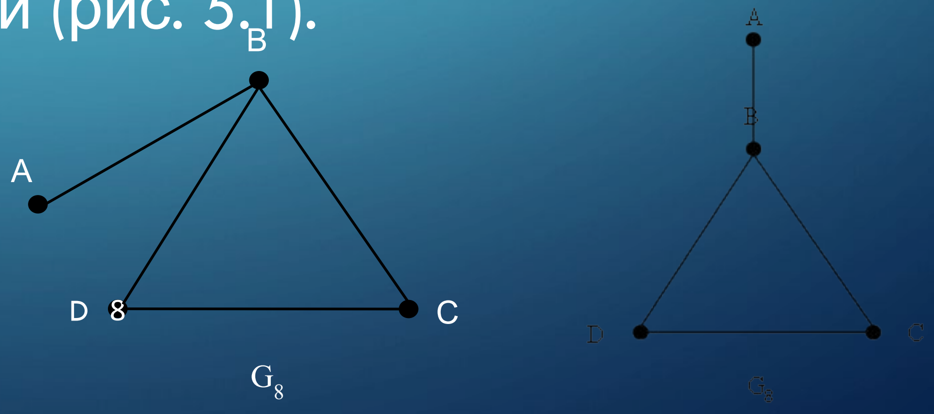


Рисунок 5.1 – Изоморфные графы

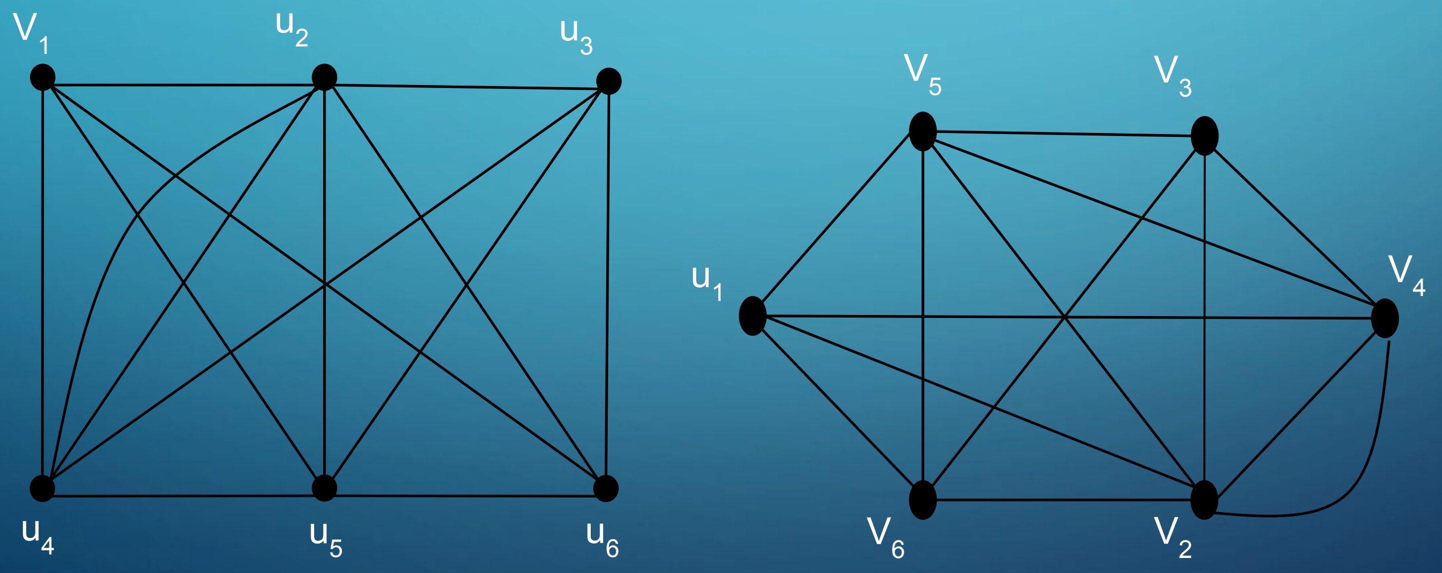
ДВА ГРАФА ИЗОМОРФНЫ ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА ВЕРШИНЫ ОДНОГО ИЗ НИХ МОЖНО ПЕРЕНУМЕРОВАТЬ ТАК, ЧТОБЫ МАТРИЦА СМЕЖНОСТИ ЭТОГО ГРАФА СОВПАЛА С МАТРИЦЕЙ СМЕЖНОСТИ ВТОРОГО ГРАФА.

Пример. Если графы устроены достаточно сложно, то по рисунку бывает нелегко определить, изоморфны они или нет. Непохожие на вид графы G_1 и G_2, изображенные на рисунке 5.2, изоморфны: если обозначить вершины этих графов так, как это сделано на рисунке 5.2, то отображение из множества $V(G_1)$ на множество $V(G_2)$, сохраняющее номера вершин, является изоморфизмом. В самом деле, при такой нумерации вершин каждый из графов будет иметь матрицу смежности, приведенную на рисунке 5.2 справа.

Выяснение являются ли два данных графа изоморфными, в общем случае весьма сложен. Установим ряд свойств, которыми должны обладать изоморфные графы. Если пара графов G_1, G_2 не удовлетворяет какому-нибудь из этих свойств, можно утверждать, что эти графы не изоморфны.

Пусть графы G_1 и G_2 изоморфны, тогда:

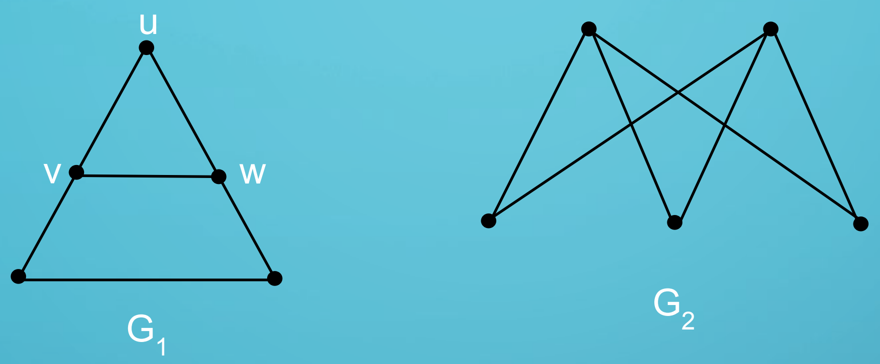
- G_1 и G_2 содержат одинаковое число вершин;
- G_1 и G_2 содержат одинаковое число ребер;
- G_1 и G_2 имеют одинаковое распределение степеней вершин (из определения изоморфизма следует, что любая вершина графа G_1 имеет ту же степень, что и ее образ при изоморфизме – вершина графа G_2);



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рисунок. 5.2 – Два изоморфных графа и их матрица смежности

−если графы G_1 и G_2 изоморфны и H – подграф в G_1. то граф G_2 содержит подграф, изоморфный H.
Это свойство часто позволяет установить, что данные графы неизоморфны. В качестве примера рассмотрим графы G_1 и G_2 (рис. 5.3).

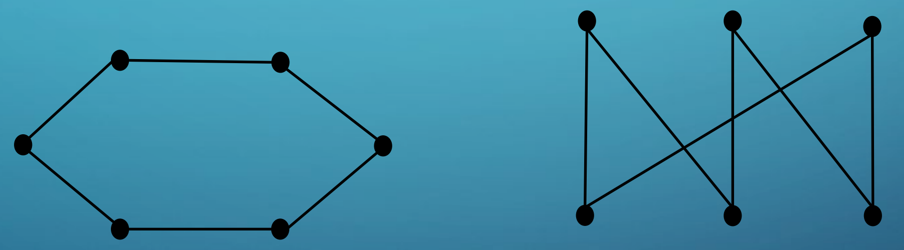


В каждом из этих графов – шесть ребер и пять вершин, три из которых имеют степень 2. а две – степень 3, т.е. первые три свойства выполнены. Но эти графы не изоморфны. В самом деле, в G_1 есть подграф, порожденный тремя вершинами (u, v и w), в котором любые две вершины смежны, а в G_2 такого подграфа нет.

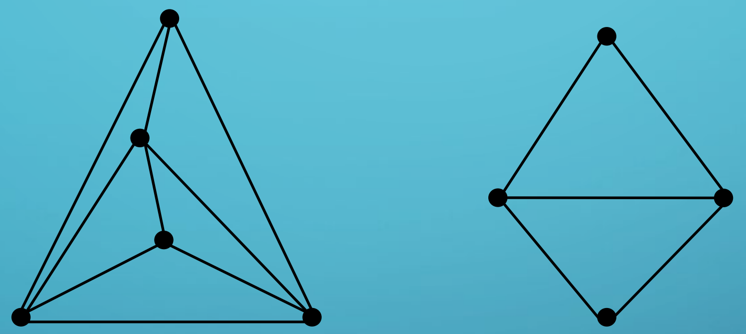
Аналогично устанавливается изоморфизм между ориентированными графами. При этом следует помнить, что ребро является упорядоченным множеством, и надо быть особенно внимательным, соблюдая порядок.

ПЛОСКИЕ И ПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ

- Граф, изображенный на плоскости, называется **плоским**, если его ребра не пересекаются в точках, отличных от вершин графа.
- Свойство «быть плоским» может не сохраняться при переходе к изоморфному графу. Например, графы G_1 и G_2 (рис. 5.4), изоморфны. Но граф G_1 является плоским, а граф G_2 – нет.



- Граф называется **планарным**, если он изоморфен плоскому графу. Граф G_2 на рисунке 5.4 является планарным, но не плоским.
- Плоский граф называется **максимально плоским**, если невозможно добавить к нему ни одного ребра так, чтобы полученный граф был плоским



Каждая грань в плоском представлении максимально плоского графа имеет 3 вершины. Поэтому максимально плоский граф называют еще **триангулированным**. Операция добавления новых ребер, в результате которой в плоском представлении каждая грань имеет ровно 3 вершины, называется **триангуляцией** графа. Триангулированные графы с одним и тем же числом вершин могут не совпадать.

УКЛАДКА ГРАФА НА ПОВЕРХНОСТИ

- Понятия плоского и планарного графа являются частными случаями следующих более общих понятий.
- Пусть σ – произвольная поверхность в трехмерном пространстве. Граф *G*, изображенный на поверхности σ, называется **уложенным на σ**, если его ребра не пересекаются в точках, отличных от вершин. Граф *G* **укладывается на поверхности σ**, если он изоморфен некоторому графу, уложенному на σ.
- Свойство графа укладываться на поверхности безусловно зависит от вида этой поверхности. Однако многие поверхности с точки зрения укладки графов ничем не отличаются от плоскости. Принципиально важен следующий случай.
- **Теорема об укладке графа на сфере.** Граф укладывается на сфере

Гранью плоского графа называется максимальная область плоскости, любые две точки которой можно соединить непрерывной линией, не пересекающей граф (точки графа не принадлежат никакой грани). Т.е. грань в плоском представлении графа G называется часть плоскости, ограниченная простым циклом и не содержащая внутри других циклов. Тем самым каждая точка плоскости принадлежит хотя бы одной грани плоского графа.

Число граней плоского графа G обозначается через g(G).

- **Замечание**. Любой плоский граф содержит ровно одну неограниченную грань (иными словами, грань бесконечной площади). Эта грань называется **внешней**.

- Граф G, изображенный на рис. 5, имеет четыре грани – F_1, F_2, F_3 и F_4. Грань F_4 является внешней.

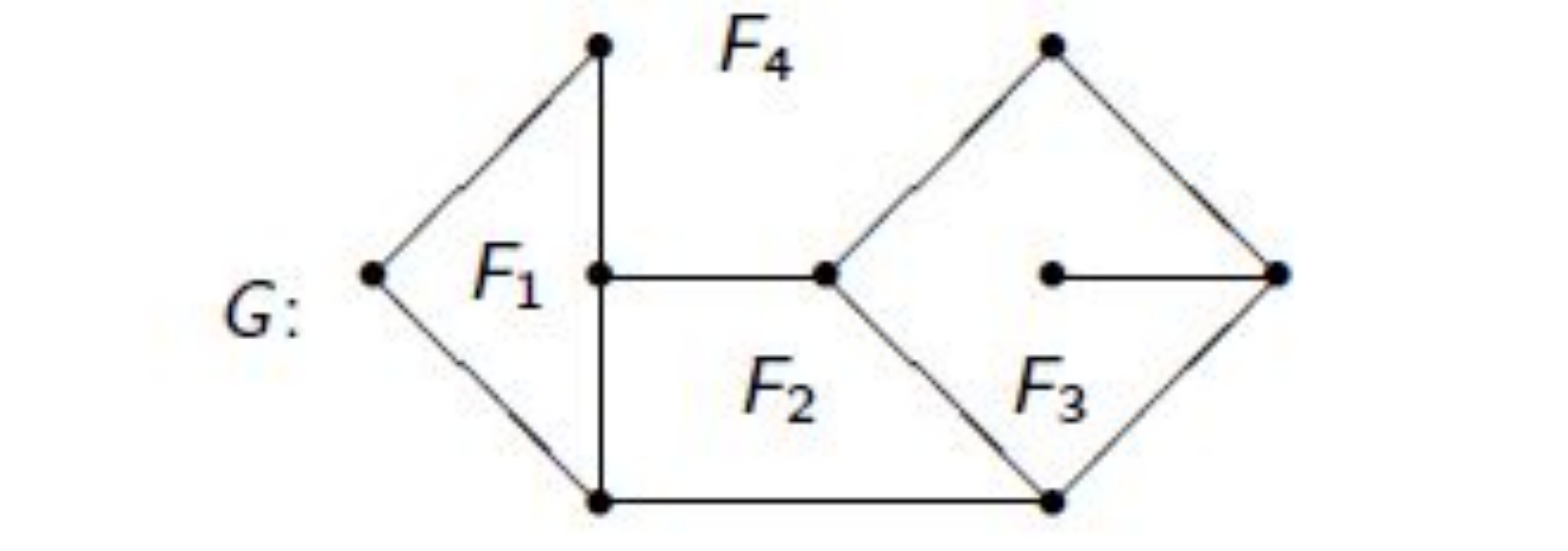


Рис. 5. Грани плоского графа

- **Границей грани** будем считать множество вершин и ребер, принадлежащих этой грани
- Границами граней F_1, F_2, F_3 и F_4 графа G. изображенного на рис. 5. являются, соответственно, графы G_1, G_2. G_3 и G_4, изображенные на рис. 6.

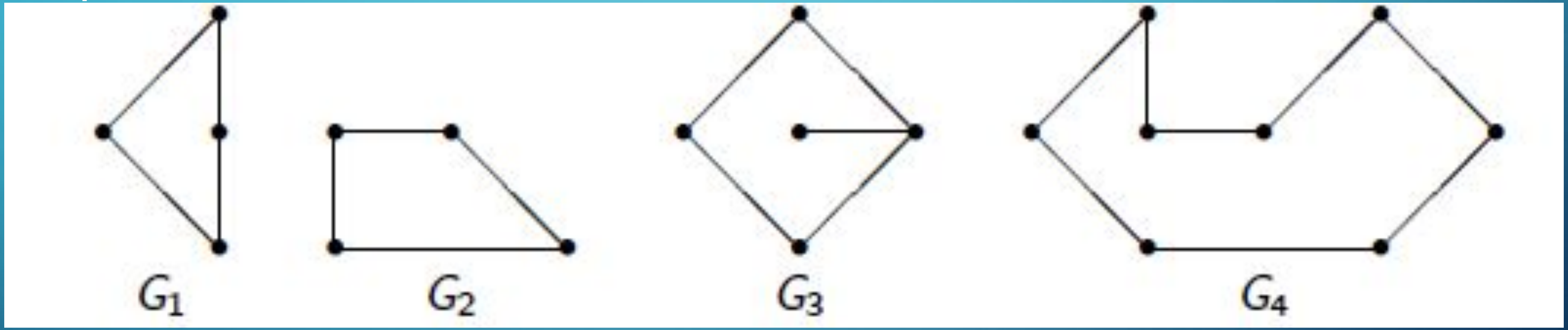


Рис. 6. Границы граней

Две грани будем называть соседними, если их границы имеют хотя бы одно общее ребро.

ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА

- Если обыкновенный связный плоский граф имеет n вершин, m ребер и r граней, то

$$n - m + r = 2.$$

Замечание. Равенство

$$n - m + r = 2$$

из формулировки теоремы называется тождеством Эйлера.

СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ ЭЙЛЕРА

- **1. Следствие об изоморфизме**
- Два изоморфных плоских графа имеют одинаковое число граней.
- Таким образом, у всех плоских изображений заданного планарного графа будет одно и то же число граней.
- **2. Следствие о несвязных графах**
- Если обыкновенный плоский граф *G* имеет *n* вершин, *m* ребер, *r* граней и *c* компонент связности, то

$$n - m + r = c + 1.$$

- **3. Следствие о числе ребер**

Если обыкновенный связный планарный граф G содержит n вершин и m ребер и $n \geq 3$, то

$$m \leq 3n - 6.$$

- **4. Следствие о графе $К_5$**

Граф $К_5$ не планарен. (Полный граф с n вершинами обозначается через $К_n$.)

Доказательство. Граф $К_5$ содержит 5 вершин и 10 ребер. Поскольку неравенство $10 \leq 3 \cdot 5 - 6$ неверно, этот граф не планарен по следствию о числе ребер.

- **5. Следствие о графе $К_{3,3}$**

Граф $К_{3,3}$ не планарен.

КРИТЕРИИ ПЛАНАРНОСТИ.

- Если граф является планарным, это можно доказать, предъявив соответствующее плоское изображение. Гораздо сложнее доказать, что граф планарным не является (головоломка о домах и колодцах служит тому хорошим примером). Теорема Эйлера и ее следствия позволяют в некоторых случаях доказывать непланарность графов.
- **Замечание о непланарных подграфах**
- Если у графа G есть непланарный подграф, то G не планарен.
- Однако непланарность многих графов только этими способами доказать нельзя. Нужен критерий, позволяющий доказать непланарность любого непланарного графа. Рассмотрим два варианта такого критерия. Оба они демонстрируют, что графы K_5 и $K_{3,3}$, являются в некотором смысле «универсальными» непланарными графами.
- Введем две новые операции над графами

- Пусть *u* и *v* – смежные вершины графа G. Удалим из графа G ребро (*u*, *v*). а затем добавим к полученному графу новую вершину *w* и два новых ребра: (*u*,*w*) и (*v*,*w*) (см. рис. 7). Полученный после этого граф обозначим через *G*′. Говорят, что граф *G*′ получен *добавлением вершины степени 2 к графу* G.

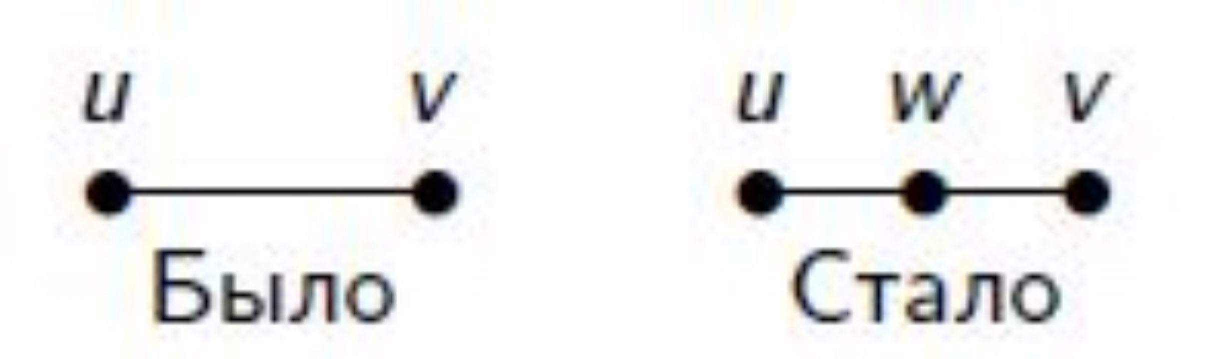


Рис. 7. Добавление вершины степени 2

- Пусть *w* – вершина графа *G*, степень которой равна 2. Обозначим вершины, смежные с *w* в *G*, через *u* и *v*. Удалим из графа *G* вершину *w*, а затем добавим к полученному графу ребро (*u*, *v*) (см. рис. 8). Полученный граф обозначим через *G′*. Говорят, что граф G' получен *стиранием вершины степени 2 в графе G*.

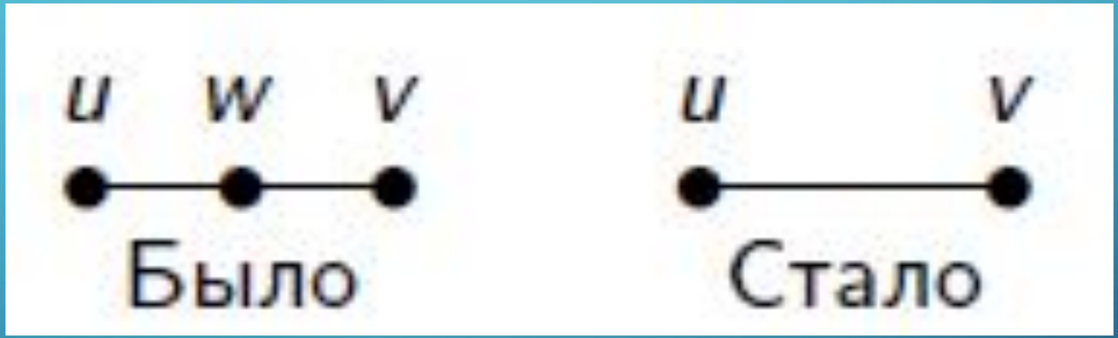


Рис. 8. Стирание вершины степени 2

- Графы G_1 и G_2 называются **гомеоморфными,** если один из них может быть получен из другого применением конечного (возможно нулевого) числа операций добавления и/или стирания вершин степени 2.

- Графы G_1 и G_2. изображенные на рис. 9, гомеоморфны. поскольку граф G_2 может быть получен из G_1 стиранием вершин *a*, *b*, *c* и *d* и добавлением в

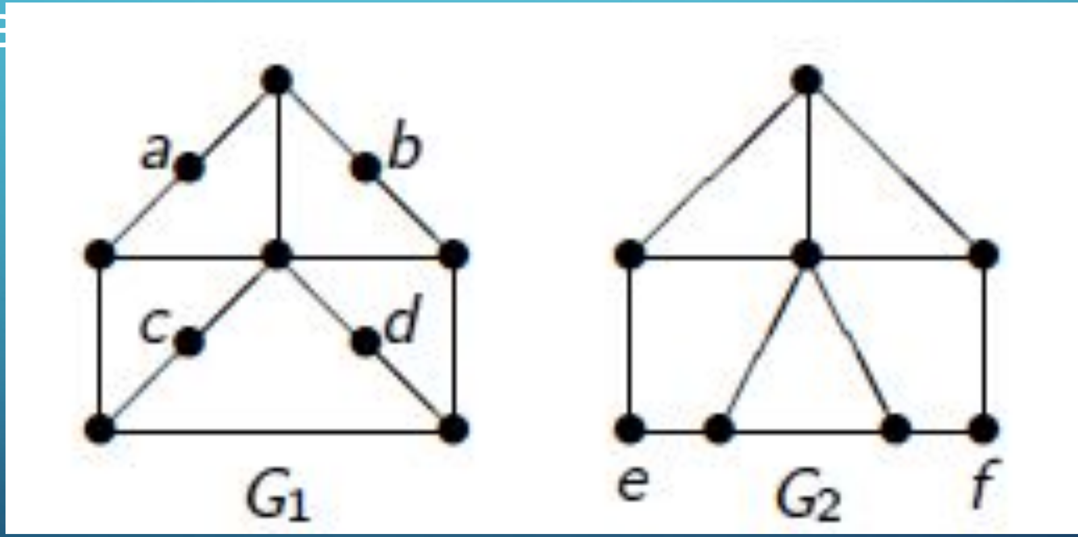


Рис. 9. Гомеоморфные графы

Теорема Понтрягина— Куратовского

- Обыкновенный граф G планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного одному из графов K_5 и $K_{3,3}$.
- Пример. Покажем, как с помощью теоремы Понтрягина-Куратовского можно доказать непланарность графа. Рассмотрим граф, изображенный на рис. 10 слева (так называемый граф Петерсена).
- Удалив из этого графа ребра (z_1, z_4) и (z_2, z_3), получаем граф G_1. изображенный на рис. 10 посередине. Таким образом, G_1 – подграф графа Петерсена. Граф G_1 изоморфен графу G_2, изображенному на рис. 10 справа. Очевидно, что граф G_2 получается из графа $K_{3,3}$ добавлением четырех вершин степени 2 (а именно, вершин z_1, z_2, z_3 и z_4). В силу теоремы Понтрягина-Куратовского граф Петерсена не планарен.

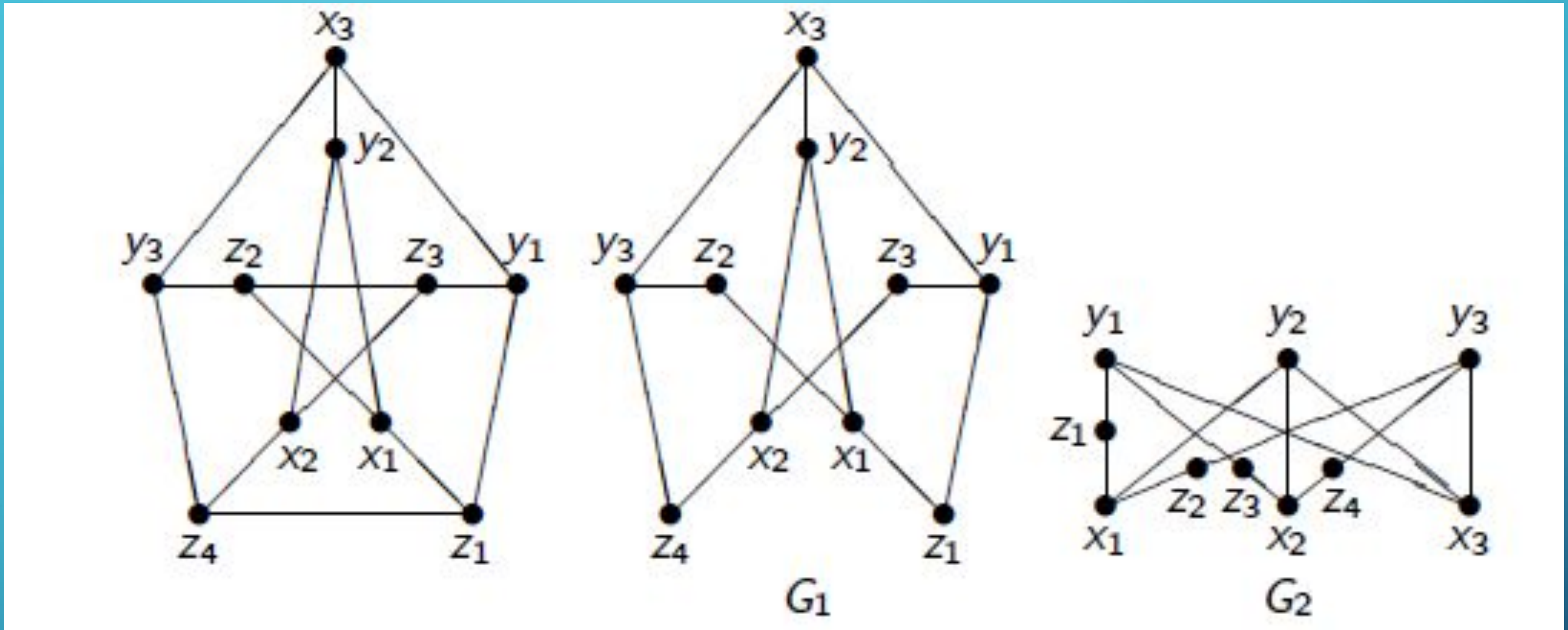
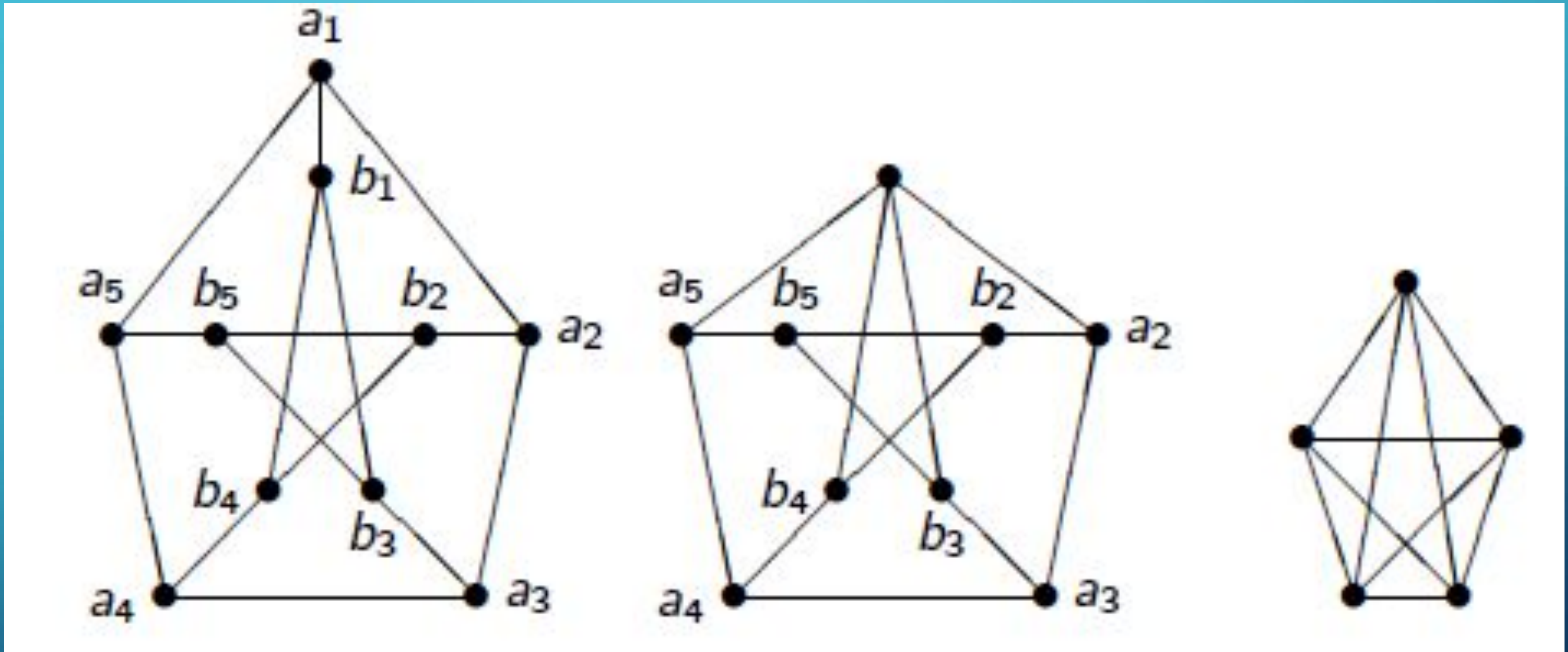


Рис. 10 – Удаление ребер

- Если конечным (возможно нулевым) числом операций стягивания ребра из графа G можно получить граф H, то говорят, что G **стягивается** к H.

ТЕОРЕМА ВАГНЕРА

- Обыкновенный граф G планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, который стягивается к графу K_5 или графу $K_{3,3}$.
- Пример. Покажем, как с помощью второго критерия планарности можно доказать непланарность графа. Рассмотрим вновь граф Петерсена и обозначим его вершины так, как это сделано на рис. 11 слева. Стягиванием ребра (a_1, b_1) получим граф, изображенный на рис. 11 посередине. Затем последовательно стянем ребра (a_2, b_2), (a_3, b_3). (a_4, b_4) и, наконец, (a_5, b_5). В результате получим граф, изображенный на рис. 11 справа, т.е. граф K_5. Применяя теорему Вагнера, убеждаемся в том, что граф Петерсена не планарен.



- Рис 11 – Стягивание ребер

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ