5. Лемма. *Пусть все* $a_k \in [-\infty, +\infty]$ *и* $a_k \to a \in [-\infty, +\infty]$ *при* $k \to \infty$. *Тогда*

$$a = \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{j \geqslant k} a_j, \quad a = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{j \geqslant k} a_j. \quad (1)$$

6. Замечание. Пусть $a_k \in [-\infty, +\infty]$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Числа

$$\varliminf_{k \to \infty} a_k = \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{j \geqslant k} a_j \quad \text{и} \quad \varlimsup_{k \to \infty} a_k = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{j \geqslant k} a_j$$

называются *нижним* и соотв. *верхним пределами* последовательности (a_k).

Легко доказать, что всегда $-\infty \leqslant \varliminf_{k \to \infty} a_k \leqslant \varlimsup_{k \to \infty} a_k \leqslant +\infty$.

7. Теорема. *Пусть* $A\in\Sigma$, *функции* $f_k: A\to[-\infty,+\infty]$, $k\in\mathbb{N}$, *измеримы,* $f: A\to[-\infty,+\infty]$ *и* $f(x)=\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ *для каждого* $x\in A$. *Тогда функция* f *также измерима.*

Доказательство. Это простое следствие теоремы 4 и леммы 5. □

8. Теорема. (Об измеримости композиции непрерывной функции с измеримым отображением). *Пусть* $A\in\Sigma$, *функции* $f_1, f_2, \dots, f_n: A\to[-\infty,+\infty]$, *измеримы, множество* $D\subset\mathbb{R}^n$ *открыто, функция* $\varphi: D\to\mathbb{R}$ *непрерывна и*

$$\big(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\big)\in D \text{ для каждого } x\in A.$$

Тогда функция $h: A\to\mathbb{R}$,

$$h(x)=\varphi\big(f_1(x), f_1(x), \dots, f_n(x)\big) \text{ для всех } x\in A, \quad (3)$$

измерима.

Доказательство. Рассмотрим случай $n=2$. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Надо доказать, что $h^{-1}((\alpha, +\infty]) \in \Sigma$. Отметим, что значение $+\infty$ невозможно, так как $\varphi : D \to \mathbb{R}$. Поэтому $h^{-1}((\alpha, +\infty]) = h^{-1}((\alpha, +\infty))$.

Рассмотрим множество $G = \varphi^{-1}((\alpha, +\infty)) \subset \mathbb{R}^2$.

Из непрерывности φ следует, что G открыто. Пусть

$$G = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k, \; P_k = [a_k, b_k) \times [c_k, d_k)$$

– разложение множества G на брусы. Тогда

$$h^{-1}((\alpha, +\infty]) = h^{-1}((\alpha, +\infty)) = \{x \in A ; \varphi(f_1(x), f_2(x)) > \alpha\} =$$

$$= \{x \in A ; (f_1(x), f_2(x)) \in G\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in A ; (f_1(x), f_2(x)) \in P_k\} =$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\{x \in A ; a_k \leqslant f_1(x) < b_k\} \cap \{x \in A ; c_k \leqslant f_2(x) < d_k\} \right) =$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(f_1^{-1}([a_k, b_k)) \cap f_2^{-1}([c_k, d_k)) \right) \in \Sigma,$$

так как по условию функции f_1, f_2 измеримы и, следовательно,

$$f_1^{-1}([a_k, b_k)), f_2^{-1}([c_k, d_k)) \in \Sigma.$$

При $n=1$ доказательство проще. При $n \geqslant 3$ доказательство аналогично, но формулы будут более громоздкими. □

Отметим еще несколько простых свойств измеримых функций.

(a) *Если $A, B \in \Sigma$, $B \subset A$ и функция $f : A \to [-\infty, +\infty]$ измерима, то ее сужение $f|_B : B \to [-\infty, +\infty]$ на множество B измеримо.*

Доказательство. Обозначим $g = f|_B$. Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем

$$g^{-1}((\alpha, +\infty]) = \{x \in B ; g(x) > \alpha\} = \{x \in B ; f(x) > \alpha\} =$$

$$= B \cap \{x \in A ; f(x) > \alpha\} = B \cap f^{-1}((\alpha, +\infty]) \in \Sigma. \ \square$$

(b) *Пусть $A = \bigcup\limits_{k=1}^{m} B_k$ или $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$, где все $B_k \in \Sigma$, и пусть $f : A \to [-\infty, +\infty]$. Если для каждого $k \in \mathbb{N}$ сужение $g_k = f|_{B_k}$ функции f на множество B_k измеримо, то исходная функция f также измерима.*

Доказательство. Пусть $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем

$$f^{-1}((\alpha, +\infty]) = \{x \in A;\, f(x) > \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in B_k;\, f(x) > \alpha\} =$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in B_k;\, g_k(x) > \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} g_k^{-1}((\alpha, +\infty]) \in \Sigma,$$

так как все сужения $g_k = f|_{B_k} : B_k \to \mathbb{R}$ измеримы. □

(c) *Пусть* $A \in \Sigma$, *функция* $f : A \to [-\infty, +\infty]$ *измерима и* $a \in$ □ *. Тогда функция* $a f : A \to [-\infty, +\infty]$ *также измерима.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Если $a > 0$, то множество

$$(a f)^{-1}((\alpha, +\infty]) = \{x \in A;\, a f(x) > \alpha\} = \{x \in A;\, f(x) > \alpha/a\}$$

$$= \{x \in A;\, f(x) > \alpha/a\} \in \Sigma,$$

принадлежит Σ, так как функция $f : A \to [-\infty, +\infty]$ измерима.

Если $a<0$, то по теореме 3

$$(af)^{-1}((\alpha,+\infty]) = \{x\in A\,;\,af(x)>\alpha\} = \{x\in A\,;\,f(x)<\alpha/a\}\in\Sigma$$

При $a\neq 0$ измеримость af доказана.

Функция $0\cdot f$ определена на множестве $A\setminus f^{-1}\{-\infty,+\infty\}\in\Sigma$ и ее измеримость очевидна. □

(d) *Пусть* $A\in\Sigma$ *и функции* $f,g:A\to[-\infty,+\infty]$ *измеримы. Тогда функции* $f+g$ *и* $f-g$, *определенные на множествах*

$$\operatorname{dom}(f+g) = A\setminus\left(\left[f^{-1}(-\infty)\cap g^{-1}(+\infty)\right]\cup\left[f^{-1}(+\infty)\cap g^{-1}(-\infty)\right]\right),$$

$$\operatorname{dom}(f-g) = A\setminus\left(\left[f^{-1}(-\infty)\cap g^{-1}(-\infty)\right]\cup\left[f^{-1}(+\infty)\cap g^{-1}(+\infty)\right]\right),$$

измеримы.

Доказательство. Множество A можно разбить на 9 множеств

$$H_1 = f^{-1}(\mathbb{R}) \cap g^{-1}(\mathbb{R}), \quad H_2 = f^{-1}(\mathbb{R}) \cap g^{-1}(+\infty),$$

$$H_3 = f^{-1}(\mathbb{R}) \cap g^{-1}(-\infty),$$

$$H_4 = f^{-1}(+\infty) \cap g^{-1}(\mathbb{R}), \quad H_5 = f^{-1}(+\infty) \cap g^{-1}(+\infty),$$

$$H_6 = f^{-1}(+\infty) \cap g^{-1}(-\infty),$$

$$H_7 = f^{-1}(-\infty) \cap g^{-1}(\mathbb{R}), \quad H_8 = f^{-1}(-\infty) \cap g^{-1}(+\infty),$$

$$H_9 = f^{-1}(-\infty) \cap g^{-1}(-\infty).$$

Из теоремы 3 следует, что все $H_i \in \Sigma$. В частности, H_6 и $H_9 \in \Sigma$. Значит, $\mathrm{dom}(f+g) = A \setminus (H_6 \cup H_9)$.

На множестве H_1 функция $f+g$ имеет вид (3), где

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \varphi(x, y) = x + y,\ \ f_1 = f \text{ и } f_2 = g.$$

По теореме 8 функция $f+g$ на множестве H_1 измерима.

На каждом из остальных множеств H_i, $i = 2, 3, 4, 5, 7, 8$, функция $f+g$ постоянна (равна $+\infty$ или $-\infty$) и, значит, измерима.

Применяя свойство (b), заключаем, что функция $f+g$ измерима. Измеримость функции $f-g$ доказывается аналогично. □

Глава 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПО НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ МЕРЕ

В данной главе всюду, где явно не указано иное, фиксировано пространство (S, Σ, μ) с неотрицательной мерой, т.е. заданы множество S, σ-алгебра Σ его подмножеств и мера $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$. Предполагается, что пространство (S, Σ, μ) *полно в смысле Лебега*, т.е. $A \in \Sigma$ всякий раз, когда $A \subset B$, $B \in \Sigma$ и $\mu B = 0$.

Предполагается также, что пространство (S, Σ, μ) *не имеет атомов бесконечной меры*. Это означает, что в каждом множестве $B \in \Sigma$ с мерой $\mu B = +\infty$ содержится подмножество $A \in \Sigma$ с мерой $0 < \mu A < +\infty$.

При первом чтении можно считать, что $S = \mathbb{R}^n$, σ-алгебра Σ совпадает с σ-алгеброй $\mathrm{L}\left(\mathbb{R}^n\right)$ множеств $A \subset \mathbb{R}^n$, измеримых в смысле Лебега и μ – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

§1. Интегрирование простых функций

1. Определение. Измеримая функция $\varphi : S \to \mathbb{R}$ называется *простой*, если она имеет конечное множество значений

$$\varphi(S) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\} \subset \mathbb{R}$$

и для каждого $\alpha_k \neq 0$ множество $A_k = \varphi^{-1}(\alpha_k)$ имеет конечную меру, т.е. $\mu A_k < +\infty$. Множество $\varphi^{-1}(0)$ будет иметь конечную меру только тогда, когда $\mu S < +\infty$.

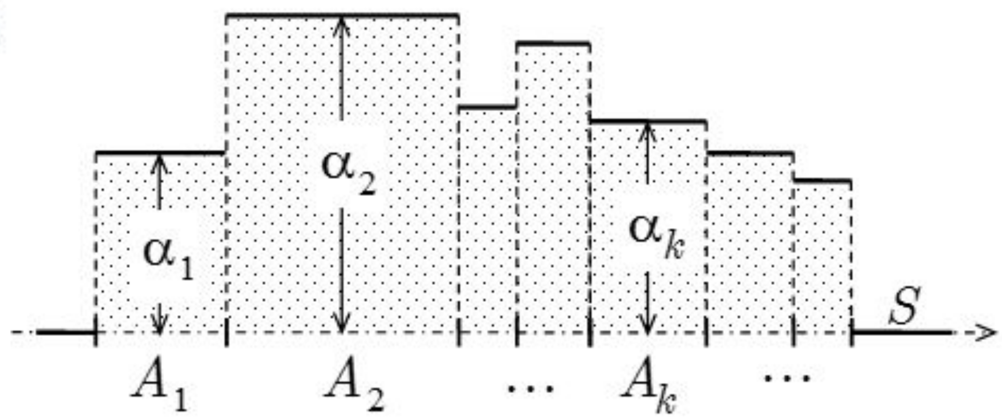

Рис. 1. Простая функция φ

Если $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ – все *ненулевые* значения простой функции φ, и все эти α_k попарно различны, то (см. рис. 1)

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{A_k}(t) \text{ для всех } t \in S \quad (1)$$

$$\text{или, короче, } \varphi = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{A_k}, (1')$$

где $A_k = \varphi^{-1}(\alpha_k)$ при $k = 1, 2, \ldots, m$ и для каждого $A \subset S$

$$\chi_A : S \to \mathbb{R}, \quad \chi_A(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in A, \\ 0, & \text{если } t \notin A, \end{cases}$$

– *характеристическая функция множества* A.

Замечание. Из равенства (1) сразу следует, что для каждого $\alpha > 0$ $\varphi^{-1}(\alpha, +\infty) = \{t \in S; \varphi(t) > \alpha\} \in \Sigma$ и $\mu\left(\varphi^{-1}(\alpha, +\infty)\right) < +\infty$.

2. Определение. Пусть задана *неотрицательная простая функция* (1) и $C \in \Sigma$. *Интеграл* $\int\limits_C \varphi \, d\mu$ (*от функции* φ *по мере* μ *и по множеству* C)

определяется равенством $\int\limits_C \varphi \, d\mu = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot \mu(C \cap A_k)$. (2)

Иногда нужно указать переменную, по которой происходит интегрирование. Тогда вместо $\int\limits_C \varphi \, d\mu$ пишут $\int\limits_C \varphi(t) \, d\mu(t)$, $\int\limits_C \varphi(x) \, d\mu(x)$ и т.п.

3. Замечание. Интеграл (2) имеет простой геометрический смысл. А именно, если $S = C = \mathbb{R}$, μ – мера Лебега на прямой, функция (1) неотрицательна и все A_k – промежутки конечной меры, то правая часть равенства (2) совпадает с площадью множества

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant y \leqslant \varphi(x)\right\},$$

именуемого ***подграфиком*** функции φ (см. рис.1).

Если $S = C = \mathbb{R}^2$, μ – мера Лебега на плоскости $\mathbb{R}^2$, функция (1) на $\mathbb{R}^2$ неотрицательна и все A_k – прямоугольники, то интеграл (2) есть объем подграфика $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leqslant z \leqslant \varphi(x, y)\right\}$

Установим основные свойства интеграла (2) от простой функции $\varphi : S \to [0, +\infty)$.

Первые 4 свойства очевидны.

(a) *Всегда* $0 \leqslant \int\limits_C \varphi \, d\mu < +\infty$.

(b) *Если* $B, C \in \Sigma$ *и* $B \subset C$, *то* $\int\limits_B \varphi \, d\mu \leqslant \int\limits_C \varphi \, d\mu$.

(c) *Если* $\mu C = 0$ *или* $\varphi = 0$ *на* C, *то* $\int\limits_C \varphi \, d\mu = 0$.

(d) *Если* $\alpha \geqslant 0$, $\mu C < +\infty$ *и* $\varphi(t) = \alpha$ *для всех* $t \in C$, *то* $\int \varphi \, d\mu = \alpha \cdot \mu C$.

4. Теорема. (Счетная аддитивность интеграла).
Пусть $\varphi : S \to [0, +\infty)$ *– простая функция. Отображение*

$\mu_\varphi : \Sigma \to [0, +\infty)$, $\mu_\varphi(C) = \int\limits_C \varphi \, d\mu$ *для всех* $C \in \Sigma$,

является неотрицательной мерой на Σ.

Доказательство. Очевидно $\mu_\varphi(\varnothing) = 0$. Пусть $C = \bigsqcup\limits_{j \in \mathbb{N}} C_j$, где все $C_j \in \Sigma$. Нужно доказать равенство $\mu_\varphi C = \sum\limits_{j \in \mathbb{N}} \mu_\varphi C_j$.

Используем разложение (1) функции φ. Для каждого $k = 1, 2, \dots, m$ имеем

$$C \cap A_k = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} \left(C_j \cap A_k\right) \text{ и } \mu\left(C \cap A_k\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu\left(C_j \cap A_k\right).$$

Поэтому

$$\mu_\varphi C = \int_C \varphi \, d\mu = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot \mu\left(C \cap A_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu\left(C_j \cap A_k\right).$$

Отсюда по свойству линейности суммы ряда

$$\mu_\varphi C = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu\left(C_j \cap A_k\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot \mu\left(C_j \cap A_k\right).$$

По определению (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot \mu\left(C_j \cap A_k\right) = \int_{C_j} \varphi \, d\mu$.

Следовательно,

$$\mu_\varphi C = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot \mu\left(C_j \cap A_k\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{C_j} \varphi \, d\mu = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_\varphi\left(C_j\right). \ \square$$

Из теоремы 4 и из свойства (с) вытекает следующий полезный факт:

5. Следствие. *Если* $B, C \in \Sigma$, $B \subset C$ и $\varphi = 0$ на $C \setminus B$, *то* $\int\limits_B \varphi \, d\mu = \int\limits_C \varphi \, d\mu$.

Доказательство. Применяя теорему 4 и свойство (с), имеем

$$\int\limits_C \varphi \, d\mu = \int\limits_{C \setminus B} \varphi \, d\mu + \int\limits_B \varphi \, d\mu = 0 + \int\limits_B \varphi \, d\mu = \int\limits_B \varphi \, d\mu . \square$$

6. Теорема. (*). (Линейность интеграла). *Пусть* $C \in \Sigma$, $\alpha \geqslant 0$ *и* φ, ψ *– неотрицательные простые функции. Тогда*

$$\int\limits_C (\varphi + \psi) \, d\mu = \int\limits_C \varphi \, d\mu + \int\limits_C \psi \, d\mu, \int\limits_C \alpha \varphi \, d\mu = \alpha \cdot \int\limits_C \varphi \, d\mu . (3)$$

(**). (Монотонность интеграла). *Пусть* $C \in \Sigma$ *и пусть неотрицательные простые функции* φ, ψ *таковы, что* $\varphi \leqslant \psi$ *на множестве* C, *т.е.* $\varphi(t) \leqslant \psi(t)$ *для всех* $t \in C$. *Тогда* $\int\limits_C \varphi \, d\mu \leqslant \int\limits_C \psi \, d\mu$.

Доказательство. Пусть $\varphi = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{A_k}$, $\psi = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \chi_{B_i}$ – разложения вида (1), т.е. такие, что числа $\alpha_k \in \mathbb{R}$ попарно различны и положительны, множества $A_k \in \Sigma$ непусты и попарно не пересекаются, числа $\beta_i \in \mathbb{R}$ попарно различны и положительны, множества $B_i \in \Sigma$ непусты и попарно не пересекаются. По определению 2

$$\int_C \varphi \, d\mu = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot \mu\left(C \cap A_k\right), \int_C \psi \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot \mu\left(C \cap B_i\right). \quad (4)$$

Обозначим $E = \left(\bigsqcup_{k=1}^{m} A_k \right) \cup \left(\bigsqcup_{i=1}^{n} B_i \right)$, $A_0 = E \setminus \left(\bigsqcup_{k=1}^{m} A_k \right)$, $B_0 = E \setminus \left(\bigsqcup_{i=1}^{n} B_i \right)$. Ясно, что $E,\ A_0,\ B_0 \in \Sigma$, $\varphi(t) = 0$ на A_0 и $\psi(t) = 0$ на B_0. Полагая $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, из (4) получим

$$\int_C \varphi \, d\mu = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \cdot \mu\left(C \cap A_k\right), \int_C \psi \, d\mu = \sum_{i=0}^{n} \beta_i \cdot \mu\left(C \cap B_i\right). \quad (5)$$

Отметим еще, что $E = \bigsqcup_{k=0}^{m} A_k = \bigsqcup_{i=0}^{n} B_i$. (6)

(*). Докажем равенства (3). Очевидно $C = (C \setminus E) \sqcup (C \cap E)$.
На множестве $C \setminus E$ обе функции φ и ψ равны 0. По свойству (c)

$$\int_{C \setminus E} (\varphi + \psi)\, d\mu = 0 = 0 + 0 = \int_{C \setminus E} \varphi\, d\mu + \int_{C \setminus E} \psi\, d\mu . \tag{7}$$

Из (6) имеем

$$C \cap E = C \cap E \cap E = C \cap \left(\bigsqcup_{k=0}^{m} A_k \right) \cap \left(\bigsqcup_{i=0}^{n} B_i \right) = \bigsqcup_{k=0}^{m} \bigsqcup_{i=0}^{n} D_{ki}, \tag{8}$$

где $D_{ki} = C \cap A_k \cap B_i$. На каждом множестве D_{ki}

$$\varphi(t) = \alpha_k,\ \ \psi(t) = \beta_i,\ (\varphi + \psi)(t) = \varphi(t) + \psi(t) = \alpha_k + \beta_i .$$

По свойству (d)

$$\int_{D_{ki}} (\varphi + \psi)\, d\mu = (\alpha_k + \beta_i) \cdot \mu D_{ki} = \alpha_k \cdot \mu D_{ki} + \beta_i \cdot \mu D_{ki} = \int_{D_{ki}} \varphi\, d\mu + \int_{D_{ki}} \psi\, d\mu \tag{9}$$

Применяя теорему 4, из равенств (8) и (9) получим

$$\int\limits_{C \cap E} (\varphi + \psi)\, d\mu = \sum_{i,k} \int\limits_{D_{ki}} (\varphi + \psi)\, d\mu = \sum_{i,k} \int\limits_{D_{ki}} \varphi\, d\mu + \sum_{i,k} \int\limits_{D_{ki}} \psi\, d\mu =$$

$$= \int\limits_{C \cap E} \varphi\, d\mu + \int\limits_{C \cap E} \psi\, d\mu .$$

Отсюда и из (7) следует первое из равенств (3). Второе равенство (3) очевидно.

(**). Допустим теперь, что $\varphi(t) \leqslant \psi(t)$ для всех $t \in C$. Тогда

$$\int\limits_{D_{ki}} \varphi\, d\mu \leqslant \int\limits_{D_{ki}} \psi\, d\mu$$

для всех k и i. Действительно, если $D_{ki} \neq \varnothing$, то

$$\alpha_k = \varphi(t) \leqslant \psi(t) = \beta_i \text{ на } D_{ki},$$

так как $\varphi \leqslant \psi$ на множестве C, и по свойству (d)

$$\int\limits_{D_{ki}} \varphi\, d\mu = \alpha_k \cdot \mu(D_{ki}) \leqslant \beta_i \cdot \mu D_{ki} = \int\limits_{D_{ki}} \psi\, d\mu . \quad (10)$$

Если же $D_{ki} = \varnothing$, пусто, то обе части неравенства (10) равны 0.

Применяя теорему 4 и соотношения (8) и (10), имеем

$$\int_C \varphi\, d\mu = \int_{C\setminus E} \varphi\, d\mu + \int_{C\cap E} \varphi\, d\mu = 0 + \int_{C\cap E} \varphi\, d\mu = \int_{C\cap E} \varphi\, d\mu =$$

$$\overset{(8)}{=} \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} \int_{D_{ki}} \varphi\, d\mu \overset{(10)}{\leqslant} \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} \int_{D_{ki}} \psi\, d\mu \overset{(8)}{=}$$

$$= \int_{C\cap E} \psi\, d\mu = 0 + \int_{C\cap E} \psi\, d\mu = \int_{C\setminus E} \psi\, d\mu + \int_{C\cap E} \psi\, d\mu = \int_C \psi\, d\mu .$$

Утверждение (**) также доказано. □

Из утверждения (**) следует еще одно полезное свойство:

(e) *Пусть* $C \in \Sigma$ *и неотрицательные простые функции* φ, ψ *таковы, что* $\varphi(t) = \psi(t)$ *для всех* $t \in C$. *Тогда* $\int_C \varphi\, d\mu = \int_C \psi\, d\mu$.

§2. Интегрирование неотрицательных измеримых функций

1. Определение. Пусть $C \in \Sigma$ и функция $f : C \to [0, +\infty]$ измерима. В этом случае *интеграл от функции* f *по мере* μ *по множеству* C определяется равенством

$$\int_C f \, d\mu = \sup_{0 \leqslant \varphi \leqslant f} \int_C \varphi \, d\mu , \quad (1)$$

где супремум берется по всем простым функциям $\varphi : S \to \mathbb{R}$ таким, что $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant f(t)$ для всех $t \in C$.

Если $B \subset C$, $B \in \Sigma$, то по определению $\int_B f \, d\mu = \int_C f\big|_B \, d\mu$.