

5. Лемма. Пусть все $a_k \in [-\infty, +\infty]$ и $a_k \rightarrow a \in [-\infty, +\infty]$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда

$$a = \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{j \geq k} a_j, \quad a = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{j \geq k} a_j. \quad (1)$$

6. Замечание. Пусть $a_k \in [-\infty, +\infty]$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Числа

$$\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} a_k = \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{j \geq k} a_j \quad \text{и} \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} a_k = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{j \geq k} a_j$$

называются *нижним* и соотв. *верхним пределами* последовательности (a_k) .

Легко доказать, что всегда $-\infty \leq \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} a_k \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} a_k \leq +\infty$.

7. Теорема. Пусть $A \in \Sigma$, функции $f_k: A \rightarrow [-\infty, +\infty]$, $k \in \mathbb{N}$, измеримы, $f: A \rightarrow [-\infty, +\infty]$ и $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ для каждого $x \in A$. Тогда функция f также измерима.

Доказательство. Это простое следствие теоремы 4 и леммы 5. \square

8. Теорема. (Об измеримости композиции непрерывной функции с измеримым отображением). Пусть $A \in \Sigma$, функции $f_1, f_2, \dots, f_n: A \rightarrow [-\infty, +\infty]$, измеримы, множество $D \subset \mathbb{R}^n$ открыто, функция $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и

$$(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \in D \text{ для каждого } x \in A.$$

Тогда функция $h: A \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(x) = \varphi(f_1(x), f_1(x), \dots, f_n(x)) \text{ для всех } x \in A, \quad (3)$$

измерима.

Доказательство. Рассмотрим случай $n=2$. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Надо доказать, что $h^{-1}((\alpha, +\infty]) \in \Sigma$. Отметим, что значение $+\infty$ невозможно, так как

$\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$. Поэтому $h^{-1}((\alpha, +\infty]) = h^{-1}((\alpha, +\infty))$.

Рассмотрим множество $G = \varphi^{-1}((\alpha, +\infty)) \subset \mathbb{R}^2$.

Из непрерывности φ следует, что G открыто. Пусть

$$G = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k, \quad P_k = [a_k, b_k) \times [c_k, d_k)$$

– разложение множества G на брусы. Тогда

$$\begin{aligned} h^{-1}((\alpha, +\infty]) &= h^{-1}((\alpha, +\infty)) = \{x \in A; \varphi(f_1(x), f_2(x)) > \alpha\} = \\ &= \{x \in A; (f_1(x), f_2(x)) \in G\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in A; (f_1(x), f_2(x)) \in P_k\} = \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} (\{x \in A; a_k \leq f_1(x) < b_k\} \cap \{x \in A; c_k \leq f_2(x) < d_k\}) = \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} (f_1^{-1}([a_k, b_k)) \cap f_2^{-1}([c_k, d_k))) \in \Sigma, \end{aligned}$$

так как по условию функции f_1, f_2 измеримы и, следовательно,

$$f_1^{-1}([a_k, b_k]), f_2^{-1}([c_k, d_k]) \in \Sigma.$$

При $n=1$ доказательство проще. При $n \geq 3$ доказательство аналогично, но формулы будут более громоздкими. \square

Отметим еще несколько простых свойств измеримых функций.

(а) Если $A, B \in \Sigma$, $B \subset A$ и функция $f: A \rightarrow [-\infty, +\infty]$ измерима, то ее сужение $f|_B: B \rightarrow [-\infty, +\infty]$ на множество B измеримо.

Доказательство. Обозначим $g = f|_B$. Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned} g^{-1}((\alpha, +\infty]) &= \{x \in B; g(x) > \alpha\} = \{x \in B; f(x) > \alpha\} = \\ &= B \cap \{x \in A; f(x) > \alpha\} = B \cap f^{-1}((\alpha, +\infty]) \in \Sigma. \quad \square \end{aligned}$$

(b) Пусть $A = \bigcup_{k=1}^m B_k$ или $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, где все $B_k \in \Sigma$, и пусть

$f: A \rightarrow [-\infty, +\infty]$. Если для каждого $k \in \mathbb{N}$ сужение $g_k = f|_{B_k}$ функции f на множество B_k измеримо, то исходная функция f также измерима.

Доказательство. Пусть $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned} f^{-1}((\alpha, +\infty]) &= \{x \in A; f(x) > \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in B_k; f(x) > \alpha\} = \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in B_k; g_k(x) > \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} g_k^{-1}((\alpha, +\infty]) \in \Sigma, \end{aligned}$$

так как все сужения $g_k = f|_{B_k} : B_k \rightarrow \mathbb{R}$ измеримы. \square

(с) Пусть $A \in \Sigma$, функция $f : A \rightarrow [-\infty, +\infty]$ измерима и $a \in \mathbb{R}$. Тогда функция $af : A \rightarrow [-\infty, +\infty]$ также измерима.

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Если $a > 0$, то множество

$$\begin{aligned} (af)^{-1}((\alpha, +\infty]) &= \{x \in A; af(x) > \alpha\} = \{x \in A; f(x) > \alpha/a\} \\ &= \{x \in A; f(x) > \alpha/a\} \in \Sigma, \end{aligned}$$

принадлежит Σ , так как функция $f : A \rightarrow [-\infty, +\infty]$ измерима.

Если $a < 0$, то по теореме 3

$$(af)^{-1}((\alpha, +\infty]) = \{x \in A; af(x) > \alpha\} = \{x \in A; f(x) < \alpha/a\} \in \Sigma$$

При $a \neq 0$ измеримость af доказана.

Функция $0 \cdot f$ определена на множестве $A \setminus f^{-1}\{-\infty, +\infty\} \in \Sigma$ и ее измеримость очевидна. \square

(d) Пусть $A \in \Sigma$ и функции $f, g: A \rightarrow [-\infty, +\infty]$ измеримы. Тогда функции $f+g$ и $f-g$, определенные на множествах

$$\text{dom}(f+g) = A \setminus \left([f^{-1}(-\infty) \cap g^{-1}(+\infty)] \cup [f^{-1}(+\infty) \cap g^{-1}(-\infty)] \right),$$

$$\text{dom}(f-g) = A \setminus \left([f^{-1}(-\infty) \cap g^{-1}(-\infty)] \cup [f^{-1}(+\infty) \cap g^{-1}(+\infty)] \right),$$

измеримы.

Доказательство. Множество A можно разбить на 9 множеств

$$H_1 = f^{-1}(\mathbb{R}) \cap g^{-1}(\mathbb{R}), \quad H_2 = f^{-1}(\mathbb{R}) \cap g^{-1}(+\infty),$$

$$H_3 = f^{-1}(\mathbb{R}) \cap g^{-1}(-\infty),$$

$$H_4 = f^{-1}(+\infty) \cap g^{-1}(\mathbb{R}), \quad H_5 = f^{-1}(+\infty) \cap g^{-1}(+\infty),$$

$$H_6 = f^{-1}(+\infty) \cap g^{-1}(-\infty),$$

$$H_7 = f^{-1}(-\infty) \cap g^{-1}(\mathbb{R}), \quad H_8 = f^{-1}(-\infty) \cap g^{-1}(+\infty),$$

$$H_9 = f^{-1}(-\infty) \cap g^{-1}(-\infty).$$

Из теоремы 3 следует, что все $H_i \in \Sigma$. В частности, H_6 и $H_9 \in \Sigma$. Значит, $\text{dom}(f+g) = A \setminus (H_6 \cup H_9)$.

На множестве H_1 функция $f+g$ имеет вид (3), где

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x, y) = x + y, \quad f_1 = f \quad \text{и} \quad f_2 = g.$$

По теореме 8 функция $f+g$ на множестве H_1 измерима.

На каждом из остальных множеств H_i , $i = 2, 3, 4, 5, 7, 8$, функция $f+g$ постоянна (равна $+\infty$ или $-\infty$) и, значит, измерима.

Применяя свойство (b), заключаем, что функция $f+g$ измерима. Измеримость функции $f-g$ доказывается аналогично. \square

Глава 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПО НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ МЕРЕ

В данной главе всюду, где явно не указано иное, фиксировано пространство (S, Σ, μ) с неотрицательной мерой, т.е. заданы множество S , σ -алгебра Σ его подмножеств и мера $\mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$. Предполагается, что пространство (S, Σ, μ) *полно в смысле Лебега*, т.е. $A \in \Sigma$ всякий раз, когда $A \subset B$, $B \in \Sigma$ и $\mu B = 0$.

Предполагается также, что пространство (S, Σ, μ) *не имеет атомов бесконечной меры*. Это означает, что в каждом множестве $B \in \Sigma$ с мерой $\mu B = +\infty$ содержится подмножество $A \in \Sigma$ с мерой $0 < \mu A < +\infty$.

При первом чтении можно считать, что $S = \mathbb{R}^n$, σ -алгебра Σ совпадает с σ -алгеброй $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ множеств $A \subset \mathbb{R}^n$, измеримых в смысле Лебега и μ – мера Лебега в \mathbb{R}^n .

§1. Интегрирование простых функций

1. Определение. Измеримая функция $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ называется *простой*, если она имеет конечное множество значений

$$\varphi(S) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\} \subset \mathbb{R}$$

и для каждого $\alpha_k \neq 0$ множество $A_k = \varphi^{-1}(\alpha_k)$ имеет конечную меру, т.е. $\mu A_k < +\infty$. Множество $\varphi^{-1}(0)$ будет иметь конечную меру только тогда, когда $\mu S < +\infty$.

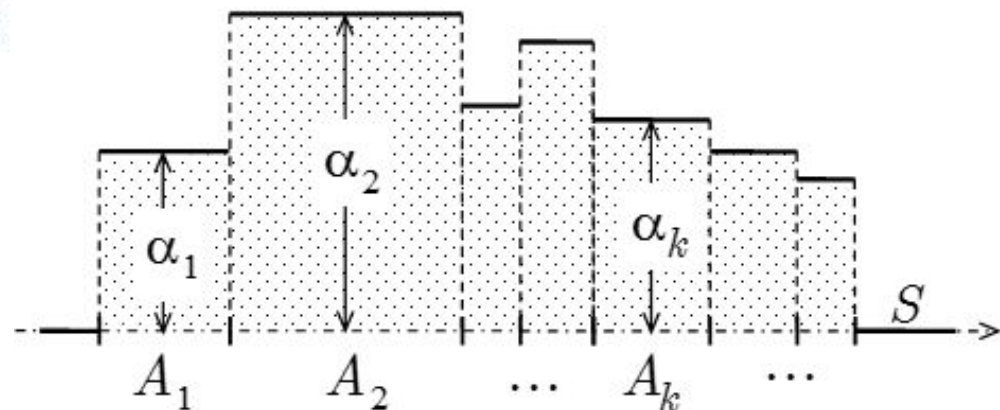


Рис. 1. Простая функция φ

Если $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ — все *ненулевые* значения простой функции φ , и все эти α_k попарно различны, то (см. рис. 1)

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{A_k}(t) \text{ для всех } t \in S \quad (1)$$

$$\text{или, короче, } \varphi = \sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{A_k}, (1')$$

где $A_k = \varphi^{-1}(\alpha_k)$ при $k = 1, 2, \dots, m$ и для каждого $A \subset S$

$$\chi_A : S \rightarrow \mathbb{R}, \quad \chi_A(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in A, \\ 0, & \text{если } t \notin A, \end{cases}$$

– характеристическая функция множества A .

Замечание. Из равенства (1) сразу следует, что для каждого $\alpha > 0$ $\varphi^{-1}(\alpha, +\infty) = \{t \in S; \varphi(t) > \alpha\} \in \Sigma$ и $\mu(\varphi^{-1}(\alpha, +\infty)) < +\infty$.

2. Определение. Пусть задана неотрицательная простая функция (1) и $C \in \Sigma$. Интеграл $\int_C \varphi d\mu$ (от функции φ по мере μ и по множеству C)

$$\text{определяется равенством } \int_C \varphi d\mu = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot \mu(C \cap A_k). \quad (2)$$

Иногда нужно указать переменную, по которой происходит интегрирование. Тогда вместо $\int_C \varphi d\mu$ пишут $\int_C \varphi(t) d\mu(t)$, $\int_C \varphi(x) d\mu(x)$ и т.п.

3. **Замечание.** Интеграл (2) имеет простой геометрический смысл. А именно, если $S = C = \mathbb{R}$, μ – мера Лебега на прямой, функция (1) неотрицательна и все A_k – промежутки конечной меры, то правая часть равенства (2) совпадает с площадью множества

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq \varphi(x)\},$$

именуемого *подграфиком* функции φ (см. рис.1).

Если $S = C = \mathbb{R}^2$, μ – мера Лебега на плоскости \mathbb{R}^2 , функция (1) на \mathbb{R}^2 неотрицательна и все A_k – прямоугольники, то интеграл (2) есть объем подграфика $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; (x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq z \leq \varphi(x, y)\}$

Установим основные свойства интеграла (2) от простой функции $\varphi : S \rightarrow [0, +\infty)$.

Первые 4 свойства очевидны.

(a) Всегда $0 \leq \int_C \varphi d\mu < +\infty$.

(b) Если $B, C \in \Sigma$ и $B \subset C$, то $\int_B \varphi d\mu \leq \int_C \varphi d\mu$.

(c) Если $\mu C = 0$ или $\varphi = 0$ на C , то $\int_C \varphi d\mu = 0$.

(d) Если $\alpha \geq 0$, $\mu C < +\infty$ и $\varphi(t) = \alpha$ для всех $t \in C$, то $\int_C \varphi d\mu = \alpha \cdot \mu C$.

4. Теорема. (Счетная аддитивность интеграла).

Пусть $\varphi : S \rightarrow [0, +\infty)$ – простая функция. Отображение

$$\mu_\varphi : \Sigma \rightarrow [0, +\infty), \quad \mu_\varphi(C) = \int_C \varphi d\mu \text{ для всех } C \in \Sigma,$$

является неотрицательной мерой на Σ .

Доказательство. Очевидно $\mu_\varphi(\emptyset) = 0$. Пусть $C = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} C_j$,

где все $C_j \in \Sigma$. Нужно доказать равенство $\mu_\varphi C = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_\varphi C_j$.

Используем разложение (1) функции φ . Для каждого $k = 1, 2, \dots, m$ имеем

$$C \cap A_k = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} (C_j \cap A_k) \text{ и } \mu(C \cap A_k) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(C_j \cap A_k).$$

Поэтому

$$\mu_{\varphi} C = \int_C \varphi d\mu = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot \mu(C \cap A_k) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(C_j \cap A_k).$$

Отсюда по свойству линейности суммы ряда

$$\mu_{\varphi} C = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(C_j \cap A_k) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot \mu(C_j \cap A_k).$$

По определению (2) $\sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot \mu(C_j \cap A_k) = \int_{C_j} \varphi d\mu$.

Следовательно,

$$\mu_{\varphi} C = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot \mu(C_j \cap A_k) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{C_j} \varphi d\mu = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_{\varphi}(C_j). \quad \square$$

Из теоремы 4 и из свойства (с) вытекает следующий полезный факт:

5. Следствие. Если $B, C \in \Sigma$, $B \subset C$ и $\varphi = 0$ на $C \setminus B$, то

$$\int_B \varphi d\mu = \int_C \varphi d\mu.$$

Доказательство. Применяя теорему 4 и свойство (с), имеем

$$\int_C \varphi d\mu = \int_{C \setminus B} \varphi d\mu + \int_B \varphi d\mu = 0 + \int_B \varphi d\mu = \int_B \varphi d\mu. \quad \square$$

6. Теорема. (*). (Линейность интеграла). Пусть $C \in \Sigma$, $\alpha \geq 0$ и φ, ψ – неотрицательные простые функции. Тогда

$$\int_C (\varphi + \psi) d\mu = \int_C \varphi d\mu + \int_C \psi d\mu, \quad \int_C \alpha \varphi d\mu = \alpha \cdot \int_C \varphi d\mu. \quad (3)$$

(**). (Монотонность интеграла). Пусть $C \in \Sigma$ и пусть неотрицательные простые функции φ, ψ таковы, что $\varphi \leq \psi$ на множестве C , т.е. $\varphi(t) \leq \psi(t)$ для всех $t \in C$. Тогда $\int_C \varphi d\mu \leq \int_C \psi d\mu$.

Доказательство. Пусть $\varphi = \sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{A_k}$, $\psi = \sum_{i=1}^n \beta_i \chi_{B_i}$

– разложения вида (1), т.е. такие, что числа $\alpha_k \in \mathbb{R}$ попарно различны и положительны, множества $A_k \in \Sigma$ непусты и попарно не пересекаются, числа $\beta_i \in \mathbb{R}$ попарно различны и положительны, множества $B_i \in \Sigma$ непусты и попарно не пересекаются. По определению 2

$$\int_C \varphi d\mu = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot \mu(C \cap A_k), \quad \int_C \psi d\mu = \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot \mu(C \cap B_i). \quad (4)$$

$$\text{Обозначим } E = \left(\bigsqcup_{k=1}^m A_k \right) \cup \left(\bigsqcup_{i=1}^n B_i \right), \quad A_0 = E \setminus \left(\bigsqcup_{k=1}^m A_k \right),$$

$$B_0 = E \setminus \left(\bigsqcup_{i=1}^n B_i \right). \quad \text{Ясно, что } E, A_0, B_0 \in \Sigma, \quad \varphi(t) = 0 \text{ на } A_0 \text{ и}$$

$\psi(t) = 0$ на B_0 . Полагая $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, из (4) получим

$$\int_C \varphi d\mu = \sum_{k=0}^m \alpha_k \cdot \mu(C \cap A_k), \quad \int_C \psi d\mu = \sum_{i=0}^n \beta_i \cdot \mu(C \cap B_i). \quad (5)$$

$$\text{Отметим еще, что } E = \bigsqcup_{k=0}^m A_k = \bigsqcup_{i=0}^n B_i. \quad (6)$$

(*). Докажем равенства (3). Очевидно $C = (C \setminus E) \sqcup (C \cap E)$.

На множестве $C \setminus E$ обе функции φ и ψ равны 0. По свойству (с)

$$\int_{C \setminus E} (\varphi + \psi) d\mu = 0 = 0 + 0 = \int_{C \setminus E} \varphi d\mu + \int_{C \setminus E} \psi d\mu. \quad (7)$$

Из (6) имеем

$$C \cap E = C \cap E \cap E = C \cap \left(\bigsqcup_{k=0}^m A_k \right) \cap \left(\bigsqcup_{i=0}^n B_i \right) = \bigsqcup_{k=0}^m \bigsqcup_{i=0}^n D_{ki}, \quad (8)$$

где $D_{ki} = C \cap A_k \cap B_i$. На каждом множестве D_{ki}

$$\varphi(t) = \alpha_k, \quad \psi(t) = \beta_i, \quad (\varphi + \psi)(t) = \varphi(t) + \psi(t) = \alpha_k + \beta_i.$$

По свойству (d)

$$\int_{D_{ki}} (\varphi + \psi) d\mu = (\alpha_k + \beta_i) \cdot \mu D_{ki} = \alpha_k \cdot \mu D_{ki} + \beta_i \cdot \mu D_{ki} = \int_{D_{ki}} \varphi d\mu + \int_{D_{ki}} \psi d\mu \quad (9)$$

Применяя теорему 4, из равенств (8) и (9) получим

$$\begin{aligned} \int_{C \cap E} (\varphi + \psi) d\mu &= \sum_{i,k} \int_{D_{ki}} (\varphi + \psi) d\mu = \sum_{i,k} \int_{D_{ki}} \varphi d\mu + \sum_{i,k} \int_{D_{ki}} \psi d\mu = \\ &= \int_{C \cap E} \varphi d\mu + \int_{C \cap E} \psi d\mu. \end{aligned}$$

Отсюда и из (7) следует первое из равенств (3). Второе равенство (3) очевидно.

(**). Допустим теперь, что $\varphi(t) \leq \psi(t)$ для всех $t \in C$. Тогда

$$\int_{D_{ki}} \varphi d\mu \leq \int_{D_{ki}} \psi d\mu$$

для всех k и i . Действительно, если $D_{ki} \neq \emptyset$, то

$$\alpha_k = \varphi(t) \leq \psi(t) = \beta_i \text{ на } D_{ki},$$

так как $\varphi \leq \psi$ на множестве C , и по свойству (d)

$$\int_{D_{ki}} \varphi d\mu = \alpha_k \cdot \mu(D_{ki}) \leq \beta_i \cdot \mu D_{ki} = \int_{D_{ki}} \psi d\mu. \quad (10)$$

Если же $D_{ki} = \emptyset$, пусто, то обе части неравенства (10) равны 0.

Применяя теорему 4 и соотношения (8) и (10), имеем

$$\begin{aligned} \int_C \varphi d\mu &= \int_{C \setminus E} \varphi d\mu + \int_{C \cap E} \varphi d\mu = 0 + \int_{C \cap E} \varphi d\mu = \int_{C \cap E} \varphi d\mu = \\ &\stackrel{(8)}{=} \sum_{k=0}^m \sum_{i=0}^n \int_{D_{ki}} \varphi d\mu \stackrel{(10)}{\leq} \sum_{k=0}^m \sum_{i=0}^n \int_{D_{ki}} \psi d\mu \stackrel{(8)}{=} \\ &= \int_{C \cap E} \psi d\mu = 0 + \int_{C \cap E} \psi d\mu = \int_{C \setminus E} \psi d\mu + \int_{C \cap E} \psi d\mu = \int_C \psi d\mu. \end{aligned}$$

Утверждение (**) также доказано. \square

Из утверждения (**) следует еще одно полезное свойство:

(e) Пусть $C \in \Sigma$ и неотрицательные простые функции φ, ψ таковы, что $\varphi(t) = \psi(t)$ для всех $t \in C$. Тогда $\int_C \varphi d\mu = \int_C \psi d\mu$.

§2. Интегрирование неотрицательных измеримых функций

1. Определение. Пусть $C \in \Sigma$ и функция $f : C \rightarrow [0, +\infty]$ измерима. В этом случае *интеграл от функции f по мере μ по множеству C* определяется равенством

$$\int_C f d\mu = \sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int_C \varphi d\mu, \quad (1)$$

где супремум берется по всем простым функциям $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ таким, что $0 \leq \varphi(t) \leq f(t)$ для всех $t \in C$.

Если $B \subset C$, $B \in \Sigma$, то по определению $\int_B f d\mu = \int_C f|_B d\mu$.