1.Равносильность уравнений и неравенств

Два неравенства

$$f_1(x) > g_1(x) \quad \text{и} \quad f_2(x) > g_2(x) \qquad (1)$$

или два уравнения

$$f_1(x) = g_1(x) \quad \text{и} \quad f_2(x) = g_2(x) \qquad (2)$$

называются равносильными на множестве X, если каждое решение первого неравенства (уравнения), принадлежащее множеству X, является решением второго и, наоборот, каждое решение второго, принадлежащее X, является решением первого, или, если, ни одно из неравенств (уравнений) на X не имеет решений. Т. е. два неравенства (уравнения) равносильны, по определению, если множества решений этих неравенств (уравнений) на X совпадают.

- $\Leftrightarrow$ −обозначение равносильного перехода

$$f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0 \text{ (или } f(x)>0 \Leftrightarrow g(x)>0\text{)}.$$

Пример равносильных уравнений

$$\sqrt{x^2-4}=1-x^2 \Leftrightarrow \sqrt{\sin^2 x-2}=0$$

Условия равносильности уравнений

$$\sqrt{f(x)} = a^2 \Leftrightarrow f(x) = a^4. \qquad \text{(УР К1)}$$

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases} \qquad \text{(УР К2)}$$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} f(x) = g(x). \qquad \text{(УР К3)}$$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ \left[\begin{array}{l} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{array}\right. \end{cases} \qquad \text{(УР К4)}$$

Пример 2. При каких значениях параметра a системы

$$\begin{cases} ax+3y=6a-4, \\ x+y=2a \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2-2y^4-6x+8=0, \\ x^2+y^2-(2a+4)x+2(a^2+a+2)=0 \end{cases}$$

равносильны?

Равносильные переходы

Пусть функции f(x), g(x), h(x) определены на X.

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) < g(x) + h(x). \qquad \text{(УР 1)}$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x). \qquad \text{(УР 2)}$$

Если $h(x) > 0$ на X, то на X

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x) < g(x)h(x), \qquad \text{(УР 3)}$$

(умножение неравенства на ПОЛОЖИТЕЛЬНУЮ функцию приводит к равносильному неравенству с тем же знаком)

Если $h(x)<0$ на X, то на X

$$f(x)<g(x)\Leftrightarrow f(x)h(x)>g(x)h(x), \qquad \text{(УР 4)}$$

(умножение неравенства на ОТРИЦАТЕЛЬНУЮ функцию приводит к смене знака неравенства)

Если $h(x)\neq 0$ на X, то на X

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)h(x)=g(x)h(x). \qquad \text{(УР 5)}$$

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x). \qquad \text{(УР 6)}$$

ВАЖНО!

Если обе части неравенства отрицательны, то умножив обе части на (–1), придём к неравенству противоположного знака, но с положительными частями, и к нему применим (УР 6).

Нельзя возводить ЛЧ и ПЧ неравенства в квадрат, если они имеют разные знаки

-
- Пример

$$-7 < 5$$

НО!

$$(-7)^2 > 5^2$$

Если обе части уравнения ***неотрицательны***, то

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow f^2(x)=g^2(x). \qquad \text{(УР 7)}$$

Для любых $f(x)$ и $g(x)$ на X и любого натурального n

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow f^{2n+1}(x)=g^{2n+1}(x). \qquad \text{(УР 8)}$$

Неравенство вида $f(x) \geq 0 (\leq 0)$ называется нестрогим. По определению,

$$f(x) \geq 0 (\leq 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ f(x)>0(<0). \end{array} \right. \qquad \text{(УР 9)}$$

2.Иррациональные неравенства

Решите неравенство $\sqrt{x+3} > x+1$.

Неравенства вида $\sqrt{f(x)} \ge g(x)$ и $\sqrt{f(x)} \le g(x)$

$\sqrt{f(x)} \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) \ge g^2(x). \end{cases} \end{array}\right.$	**(УР К5)**

$\sqrt{f(x)} \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) \le g^2(x), \\ f(x) \ge 0. \end{cases}$	**(УР К7)**

Пример

Решите неравенство $3\sqrt{3x^2-8x-3}>1-2x.$

Неравенство вида $\sqrt{f(x)} \le \sqrt{g(x)}$

$\sqrt{f(x)} \le \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge 0. \end{cases}$	(УР К8)

Замечание. Для строгих неравенств в условиях равносильности надо просто заменить значок $\ge$ или $\le$ на $>$ или $<$ соответственно.

Пример

Решите неравенство $\sqrt{2x+1} \le \sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 5}.$

Неравенства вида $\dfrac{\sqrt{f(x)}-g(x)}{h(x)} \geq 0.$

$$\frac{\sqrt{f(x)}-g(x)}{h(x)} \geq 0\ (\leq 0) \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)<0, \\ h(x)>0\ (<0), \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)\geq 0, \\ \dfrac{f(x)-g^2(x)}{h(x)} \geq 0\ (\leq 0). \end{cases} \end{array}\right. \qquad \text{(УР К9)}$$

Примеры. Решите неравенства

$$\frac{4x+15-4x^2}{\sqrt{4x+15}+2x} \geq 0. \qquad \frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x} \geq 2\,. \qquad \frac{\sqrt{x^2-4x+3}-2(x+7)}{x^2-x-72} \leq 0.$$

Неравенства вида $\dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}}{h(x)} \geq 0 \; (\leq 0)$

$$\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}}{h(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ \dfrac{f(x)-g(x)}{h(x)} \geq 0 \end{cases} \qquad \text{(УР К11)}$$

Полезное правило корня

Знак разности $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}$ совпадает со знаком разности $f(x)-g(x)$ в ОДЗ. (П К2)

Примеры. Решите неравенства

1 $$\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x+1} \le x.$$

2 $$\frac{\sqrt{4x^2-3x+2}-\sqrt{4x-3}}{x^2-5x+6} \le 0$$

Найдите наименьшую длину промежутка, содержащую все решения неравенства

Нестрогое неравенство $\dfrac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} \geq 0 \, (\leq 0)$

$$\frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} \geq 0 \, (\leq 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \, (< 0). \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\frac{\sqrt{6 - x - x^2}}{x^2 - 1} \leq 0.$$

Неравенства, содержащие модуль

$$\frac{|x-1|}{x+2}<1 \qquad \frac{|x-5|-1}{2|x-6|-4}\le 1$$

Неравенства вида $\left|f(x)\right| < g(x)$

$$\left|f(x)\right| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$$

Неравенство вида $\left|f(x)\right| > g(x)$

$$\left|f(x)\right| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$$

Приме р

$$\left|\left|x^2 - 8x + 2\right| - x^2\right| \geq 2x + 2.$$

Неравенство вида $|f(x)| < |g(x)|$

знак разности $|f(x)| - |g(x)|$ совпадает со знаком произведения $(f(x)+g(x))(f(x)-g(x))$

Дополнительное условие равносильности

$$|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow (f(x)-g(x))(f(x)+g(x)) < 0.$$

Приме
р

$$\frac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{|x^2-6x+5|-|x^2-2x-3|} \le 0.$$

Задания

1 Решите неравенство $\frac{1}{x^2+2x+1}+\frac{9}{x^2-2x+1}\le\frac{8}{x^2+1}$.

2 Найти наибольшее значение функции

$$f(x)=\frac{10}{x^2+4\pi x+41}+\cos x.$$

3 $$\frac{|x^3|-|5x|}{\sqrt{x^2-4x-1}-|x|+2}=0.$$

4 $$\sqrt{x^3+x^2-x-6}=x.$$

5 $$\sqrt{x^4-2x-5}=1-x.$$

6 $$\frac{x^2-2}{\sqrt[3]{5x-7}-x+1}=0.$$

1 $\sqrt{-25x^2+15x-2}\left(8x^2-6x+1\right)\geq 0.$

2 $\sqrt{x-1+\sqrt{2-x}}\leq\frac{1}{2}.$

3 $\sqrt{\sqrt{x-2}-x+4}\leq\sqrt{2}.$

4 $8+6\left|3-\sqrt{x+5}\right|>x.$

5 $x^2-|5x-3|-x<2.$

6 $\sqrt{\frac{2\sqrt{x-1}-x}{x^2-x+1}}\leq 1.$

1 $$\frac{\sqrt{2x^3-27x^2+90x}}{2x-15}\geq x-6.$$

2 $$\frac{\sqrt{3x+\sqrt{9x-2}}-\sqrt{3x+\sqrt{6x-3}}}{\sqrt{3x-2\sqrt{3x-1}}-\sqrt{3x+3-4\sqrt{3x-1}}}<0.$$

3 $$\frac{\sqrt[3]{x^2-1}+3\sqrt[5]{x^2-1}+4}{(2x-3)(2x-1)}\leq 0.$$

4 $$\frac{\left(\sqrt{x+4}+x-2\right)\left(\sqrt{4x+9}+x-3\right)}{\sqrt{6-x-4x^2-x^3}}\leq 0.$$

Решите системы уравнений

1
$$\begin{cases} \sqrt{2x-1}+\sqrt{y+3}=3, \\ 2xy-y+6x-3=4. \end{cases}$$

2 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x|+|x-2|-2y=0, \\ x^2-2x+y^2-2ay=-2a \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

3 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (ay+ax-1)(y+x-a)=0, \\ |xy|=a \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

Решите уравнения и неравенства с параметром

1 Найдите все значения a, при каждом их которых уравнение

$$7x^2+4-(a+1)\sqrt{7x^2+4}+\frac{2(a+1)^2}{a+7}=0$$

имеет ровно два корня.

2 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2+7|x+1|+5\sqrt{x^2+2x+5}=2a+3|x-4a+1|$$

имеет хотя бы один корень.

3 Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$|x^2-8x+a+5|>10$$

не имеет решений на отрезке $[a-6;a]$.

4 Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x-8} = -ax + 3a + 2$$

имеет единственное решение.

5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^3 + ax^2 + 3x - 2 = 0$$

не имеет ни одного решения на интервале $(0;2)$.

11(4). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |x-2| - 2y = 0, \\ x^2 - 2x + y^2 - 2ay = -2a \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

12(4). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (ay + ax - 1)(y + x - a) = 0, \\ |xy| = a \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.