

1.Равносильность уравнений и неравенств

Два неравенства

$$f_1(x) > g_1(x) \text{ и } f_2(x) > g_2(x) \quad (1)$$

или два уравнения

$$f_1(x) = g_1(x) \text{ и } f_2(x) = g_2(x) \quad (2)$$

называются равносильными на множестве X , если каждое решение первого неравенства (уравнения), принадлежащее множеству X , является решением второго и, наоборот, каждое решение второго, принадлежащее X , является решением первого, или, если, ни одно из неравенств (уравнений) на X не имеет решений. Т. е. два неравенства (уравнения) равносильны, по определению, если множества решений этих неравенств (уравнений) на X совпадают.

- \Leftrightarrow –обозначение равносильного перехода

$$f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0 \text{ (или } f(x)>0 \Leftrightarrow g(x)>0 \text{)}.$$

Пример равносильных уравнений

$$\sqrt{x^2 - 4} = 1 - x^2 \Leftrightarrow \sqrt{\sin^2 x - 2} = 0$$

Условия равносильности уравнений

$$\sqrt{f(x)} = a^2 \Leftrightarrow f(x) = a^4. \quad (\text{УР К1})$$

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases} \quad (\text{УР К2})$$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} f(x) = g(x). \quad (\text{УР К3})$$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ \left[\begin{array}{l} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{array} \right. \end{cases} \quad (\text{УР К4})$$

Пример 2. При каких значениях параметра a системы

$$\begin{cases} ax + 3y = 6a - 4, \\ x + y = 2a \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x^2 - 2y^4 - 6x + 8 = 0, \\ x^2 + y^2 - (2a + 4)x + 2(a^2 + a + 2) = 0 \end{cases}$$

равносильны?

Равносильные переходы

Пусть функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ определены на X .

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) < g(x) + h(x). \quad (\text{УР 1})$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x). \quad (\text{УР 2})$$

Если $h(x) > 0$ на X , то на X

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x) < g(x)h(x), \quad (\text{УР 3})$$

(умножение неравенства на
ПОЛОЖИТЕЛЬНУЮ функцию приводит к
равносильному неравенству с тем же
знаком)

Если $h(x) < 0$ на X , то на X

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x) > g(x)h(x), \quad (\text{УР 4})$$

(умножение неравенства на
ОТРИЦАТЕЛЬНУЮ функцию приводит к
смене знака неравенства)

Если $h(x) \neq 0$ на X , то на X

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x) = g(x)h(x). \quad (\text{УР 5})$$

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x). \quad (\text{УР } 6)$$

ВАЖНО!

Если обе части неравенства отрицательны, то умножив обе части на (-1) , придём к неравенству противоположного знака, но с положительными частями, и к нему применим (УР 6).

Нельзя возводить ЛЧ и ПЧ неравенства в квадрат, если они имеют разные знаки

-
- Пример

$$-7 < 5$$

НО!

$$(-7)^2 > 5^2$$

Если обе части уравнения *неотрицательны*, то

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x). \quad (\text{УР } 7)$$

Для любых $f(x)$ и $g(x)$ на X и любого натурального n

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f^{2n+1}(x) = g^{2n+1}(x). \quad (\text{УР } 8)$$

Неравенство вида $f(x) \geq 0 (\leq 0)$ называется нестрогим. По определению,

$$f(x) \geq 0 (\leq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ f(x) > 0 (< 0). \end{cases} \quad (\text{УР } 9)$$

2. Иррациональные неравенства

Решите неравенство $\sqrt{x+3} > x+1$.

Неравенства вида $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ и $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g^2(x). \end{cases} \quad (\text{УР K5})$$

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g^2(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \quad (\text{УР K7})$$

Пример

Решите неравенство $3\sqrt{3x^2 - 8x - 3} > 1 - 2x$.

Неравенство вида $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$

$$\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \quad \text{(УР К8)}$$

Замечание. Для строгих неравенств в условиях равносильности надо просто заменить значок \geq или \leq на $>$ или $<$ соответственно.

Пример

Решите неравенство $\sqrt{2x+1} \leq \sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 5}$.

Неравенства вида $\frac{\sqrt{f(x)} - g(x)}{h(x)} \geq 0$.

$$\frac{\sqrt{f(x)} - g(x)}{h(x)} \geq 0 (\leq 0) \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} g(x) < 0, \\ h(x) > 0 (< 0), \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} g(x) \geq 0, \\ \frac{f(x) - g^2(x)}{h(x)} \geq 0 (\leq 0). \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (\text{УР К9})$$

**Примеры. Решите
неравенства**

$$\frac{4x + 15 - 4x^2}{\sqrt{4x + 15} + 2x} \geq 0.$$

$$\frac{\sqrt{2-x} + 4x - 3}{x} \geq 2.$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3} - 2(x + 7)}{x^2 - x - 72} \leq 0.$$

Неравенства вида $\frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}}{h(x)} \geq 0$ (≤ 0)

$$\frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}}{h(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ \frac{f(x) - g(x)}{h(x)} \geq 0 \end{cases} \quad (\text{УР К11})$$

Полезное правило корня

Знак разности $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$ совпадает со знаком разности $f(x) - g(x)$ в ОДЗ. (П К2)

Примеры. Решите неравенства

$$1 \quad \frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x+1} \leq x.$$

$$2 \quad \frac{\sqrt{4x^2-3x+2}-\sqrt{4x-3}}{x^2-5x+6} \leq 0$$

Найдите наименьшую длину промежутка, содержащую все решения неравенства

Нестрогое неравенство $\frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} \geq 0 (\leq 0)$

$$\frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} \geq 0 (\leq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0; \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 (< 0). \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{6-x-x^2}}{x^2-1} \leq 0.$$

Неравенства, содержащие модуль

$$\frac{|x-1|}{x+2} < 1$$

$$\frac{|x-5|-1}{2|x-6|-4} \leq 1$$

Неравенства вида $|f(x)| < g(x)$

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$$

Неравенство вида $|f(x)| > g(x)$

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{cases}$$

Пример

$$\left| x^2 - 8x + 2 \right| - x^2 \geq 2x + 2.$$

Неравенство вида $|f(x)| < |g(x)|$

знак разности $|f(x)| - |g(x)|$ совпадает со знаком произведения $(f(x) + g(x))(f(x) - g(x))$

**Дополнительное условие
равносильности**

$$|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) < 0.$$

Приме

р

$$\frac{\sqrt{-x^2 + 7x - 6}}{|x^2 - 6x + 5| - |x^2 - 2x - 3|} \leq 0.$$

Задания

1 Решите неравенство $\frac{1}{x^2 + 2x + 1} + \frac{9}{x^2 - 2x + 1} \leq \frac{8}{x^2 + 1}$.

2 Найти наибольшее значение функции

$$f(x) = \frac{10}{x^2 + 4\pi x + 41} + \cos x.$$

3 $\frac{|x^3| - |5x|}{\sqrt{x^2 - 4x - 1} - |x| + 2} = 0.$

4 $\sqrt{x^3 + x^2 - x - 6} = x.$

5 $\sqrt{x^4 - 2x - 5} = 1 - x.$

6 $\frac{x^2 - 2}{\sqrt[3]{5x - 7} - x + 1} = 0.$

$$1 \quad \sqrt{-25x^2 + 15x - 2} (8x^2 - 6x + 1) \geq 0.$$

$$2 \quad \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} \leq \frac{1}{2}.$$

$$3 \quad \sqrt{\sqrt{x-2} - x + 4} \leq \sqrt{2}.$$

$$4 \quad 8 + 6|3 - \sqrt{x+5}| > x.$$

$$5 \quad x^2 - |5x - 3| - x < 2.$$

$$6 \quad \sqrt{\frac{2\sqrt{x-1} - x}{x^2 - x + 1}} \leq 1.$$

$$1 \quad \frac{\sqrt{2x^3 - 27x^2 + 90x}}{2x - 15} \geq x - 6.$$

$$2 \quad \frac{\sqrt{3x + \sqrt{9x - 2}} - \sqrt{3x + \sqrt{6x - 3}}}{\sqrt{3x - 2\sqrt{3x - 1}} - \sqrt{3x + 3 - 4\sqrt{3x - 1}}} < 0.$$

$$3 \quad \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1} + 3\sqrt[5]{x^2 - 1} + 4}{(2x - 3)(2x - 1)} \leq 0.$$

$$4 \quad \frac{(\sqrt{x + 4} + x - 2)(\sqrt{4x + 9} + x - 3)}{\sqrt{6 - x - 4x^2 - x^3}} \leq 0.$$

Решите системы уравнений

1

$$\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \sqrt{y+3} = 3, \\ 2xy - y + 6x - 3 = 4. \end{cases}$$

2 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |x-2| - 2y = 0, \\ x^2 - 2x + y^2 - 2ay = -2a \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

3 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (ay + ax - 1)(y + x - a) = 0, \\ |xy| = a \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

Решите уравнения и неравенства с параметром

- 1 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$7x^2 + 4 - (a+1)\sqrt{7x^2 + 4} + \frac{2(a+1)^2}{a+7} = 0$$

имеет ровно два корня.

- 2 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 7|x+1| + 5\sqrt{x^2 + 2x + 5} = 2a + 3|x - 4a + 1|$$

имеет хотя бы один корень.

- 3 Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$|x^2 - 8x + a + 5| > 10$$

не имеет решений на отрезке $[a-6; a]$.

4 Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x-8} = -ax + 3a + 2$$

имеет единственное решение.

5 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^3 + ax^2 + 3x - 2 = 0$$

не имеет ни одного решения на интервале $(0; 2)$.

11(4). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |x - 2| - 2y = 0, \\ x^2 - 2x + y^2 - 2ay = -2a \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

12(4). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (ay + ax - 1)(y + x - a) = 0, \\ |xy| = a \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.