Тема 2

Элементы математической логики

Высказывания

- Предложение, о котором имеет смысл говорить, что оно является истинным или ложным, называют высказыванием.

Являются ли высказываниями предложения?

- «Волга впадает в Черное море»
- «2+2=4»
- «Который час?»
- «Мойте руки перед едой!»
- «Земля – единственная обитаемая планета во Вселенной»
- «Это высказывание – ложное»

Значение истинности высказывания

- Введем функцию α(P) , значение которой равно 1, если высказывание P истинно и 0, если высказывание P ложное. Число α(P) будем назвать значением истинности высказывания.

$$\alpha(P) = \begin{cases} 1, \text{если высказывание } P \text{ истинно} \\ 0, \text{если высказвание } P \text{ ложно} \end{cases}$$

Элементарные и сложные высказывания

- Если никакая часть высказывания сама по себе не является высказыванием, то высказывание называют элементарным или исходным.
- Сложным называют высказывание, допускающее разделение его на другие высказывания.

Операции над высказываниями

- 1. Инверсия или негация (логическое отрицание)
- 2. Дизъюнкция (логическое сложение)
- 3. Конъюнкция (логическое умножение)
- 4. Импликация (логическое следствие)
- 5. Эквивалентность или эквиваленция (логическое равенство)

Обозначения и значение

- Инверсия или негация: $\neg A$, $\overline{A}$, «Не»
- Дизъюнкция: $\vee$, «Или»
- Конъюнкция: $\wedge$, «И»
- Импликация: $\Rightarrow$, $\rightarrow$ «Если, то»
- Эквивалентность, эквиваленция $\leftrightarrow$, $\Leftrightarrow$ «тогда, и только тогда»

Инверсия или негация - логическое отрицание
¬A , $\overline{A}$, «не А» или «неверно, что А»

Таблица истинности

A	¬A
1	0
0	1

Отрицание высказывания истинно, когда высказывание ложно, и ложно, когда высказывание истинно.

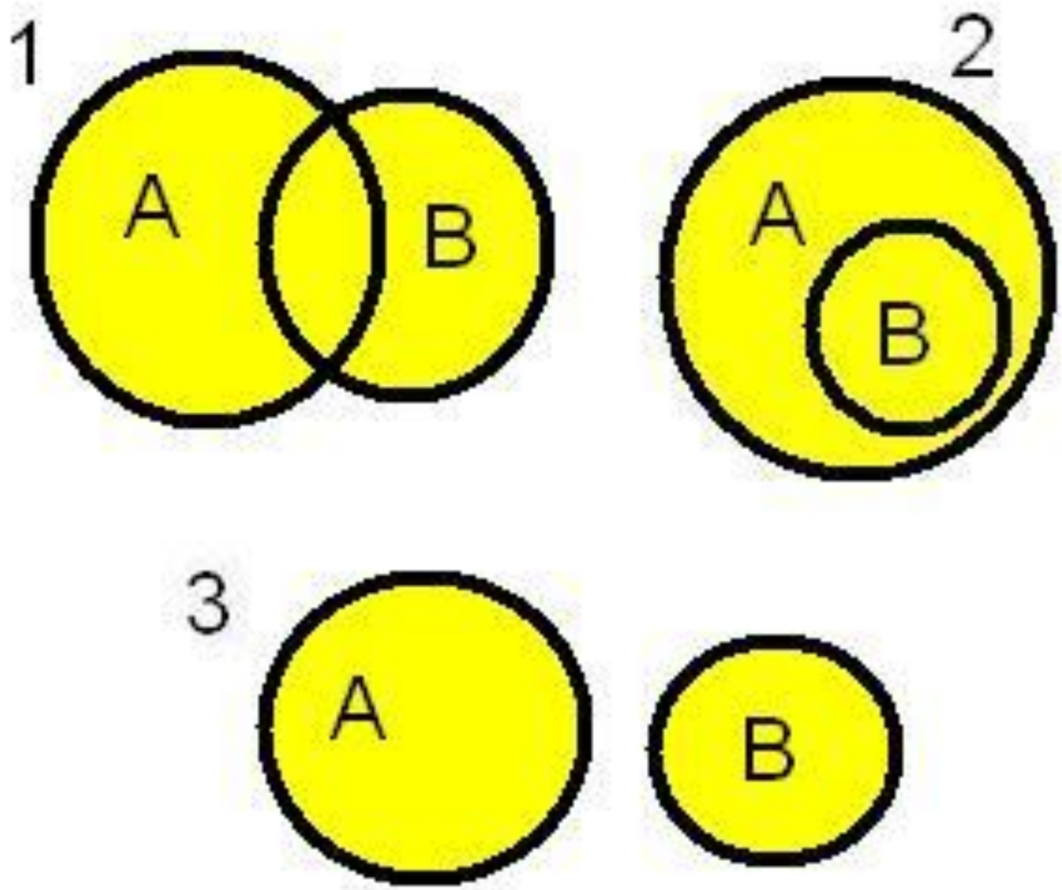
Дизъюнкция

Дизъюнкцией высказываний А и В называется высказывание А $\vee$ В (*читается "А или В"*), которое истинно тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из этих высказываний.

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Дизъюнкцию называют *логической суммой* и обозначают иногда «А + В». Из приведенного определения видно, что союз «или» употреблен в неразделительном смысле –
«А или В, или оба».

В алгебре множеств дизъюнкции соответствует объединение



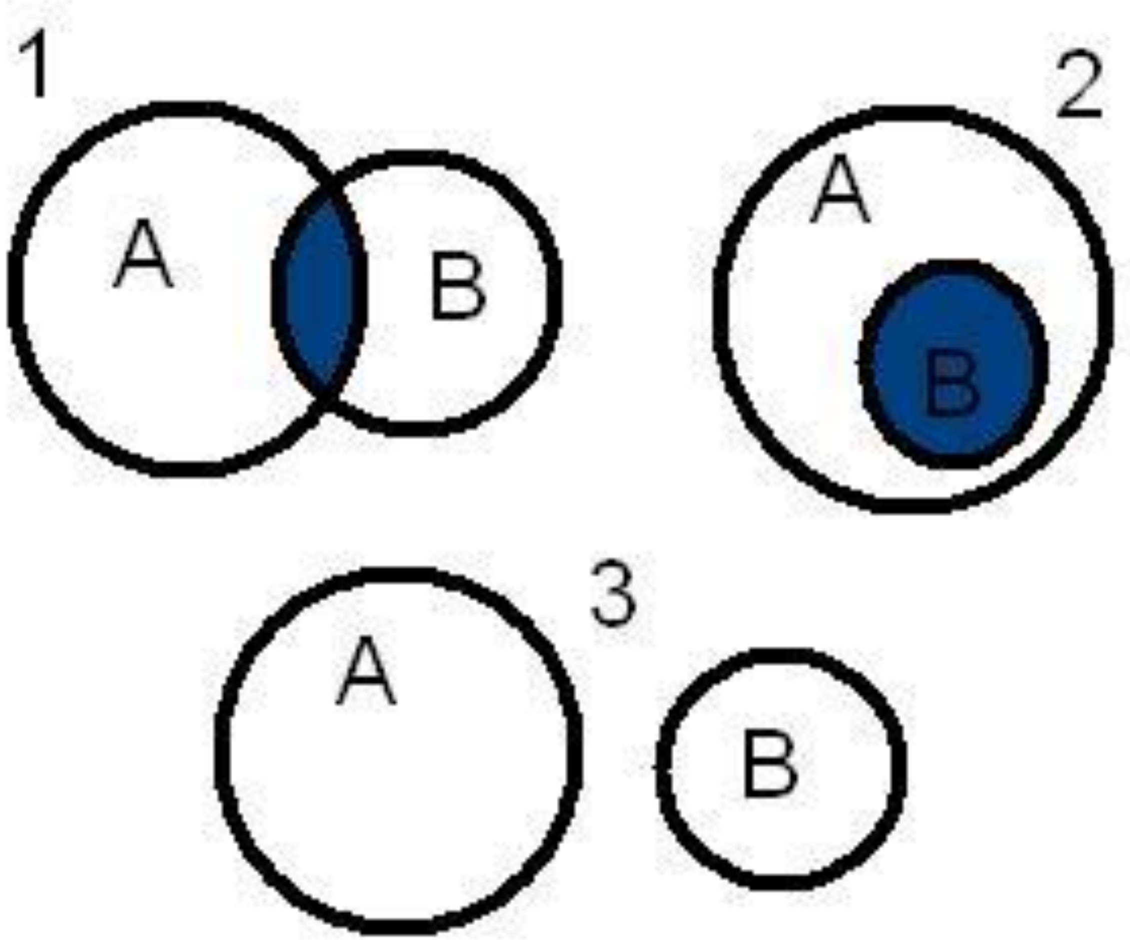
Конъюнкция

Конъюнкцией высказываний А и В называется высказывание А $\wedge$ В *(читается А и В)*, которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба эти высказывания.

А	В	А$\wedge$В
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Конъюкцию называют также логическим произведением и часто обозначают А•В (или АВ). Вместо знака $\wedge$ используется знак & .

В алгебре множеств конъюнкции соответствует пересечение



Импликация

Импликацией высказываний A и B называется высказывание $A \to B$ (читается – “если A, то B”), которое ложно тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно.

A	B	$A \to B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Вместо знака $\to$ употребляются также знаки: $\Rightarrow$, $\supset$. В импликации $A \to B$ первый элемент *A* **называется** *антецендентом* **(лат.** ***antecendens*** **–«предшествующий»), а второй элемент** *B* **–** *консеквентом* **(** ***consequens*** **– «последующий»).**

Импликации $A \to B$ эквивалентна, формуле $\sim A \vee B$.

Эквиваленция
(логическая равносильность)

Эквиваленцией двух высказываний называется новое высказывание, которое истинно тогда и только тогда когда оба высказывания одновременно истинны либо ложны

A	B	A↔B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$$A \leftrightarrow B \qquad A \Leftrightarrow B$$

Читается «*A* ***тогда и только тогда, когда*** *B*».

Исключающее ИЛИ (строгая дизъюнкция)

Обозначение: **A⊕B** Логическая связка «ЛИБО…, ЛИБО»

Высказывание, соответствующее **исключающему или**, похоже на дизъюнкцию, но исключает одновременную истинность обоих высказываний

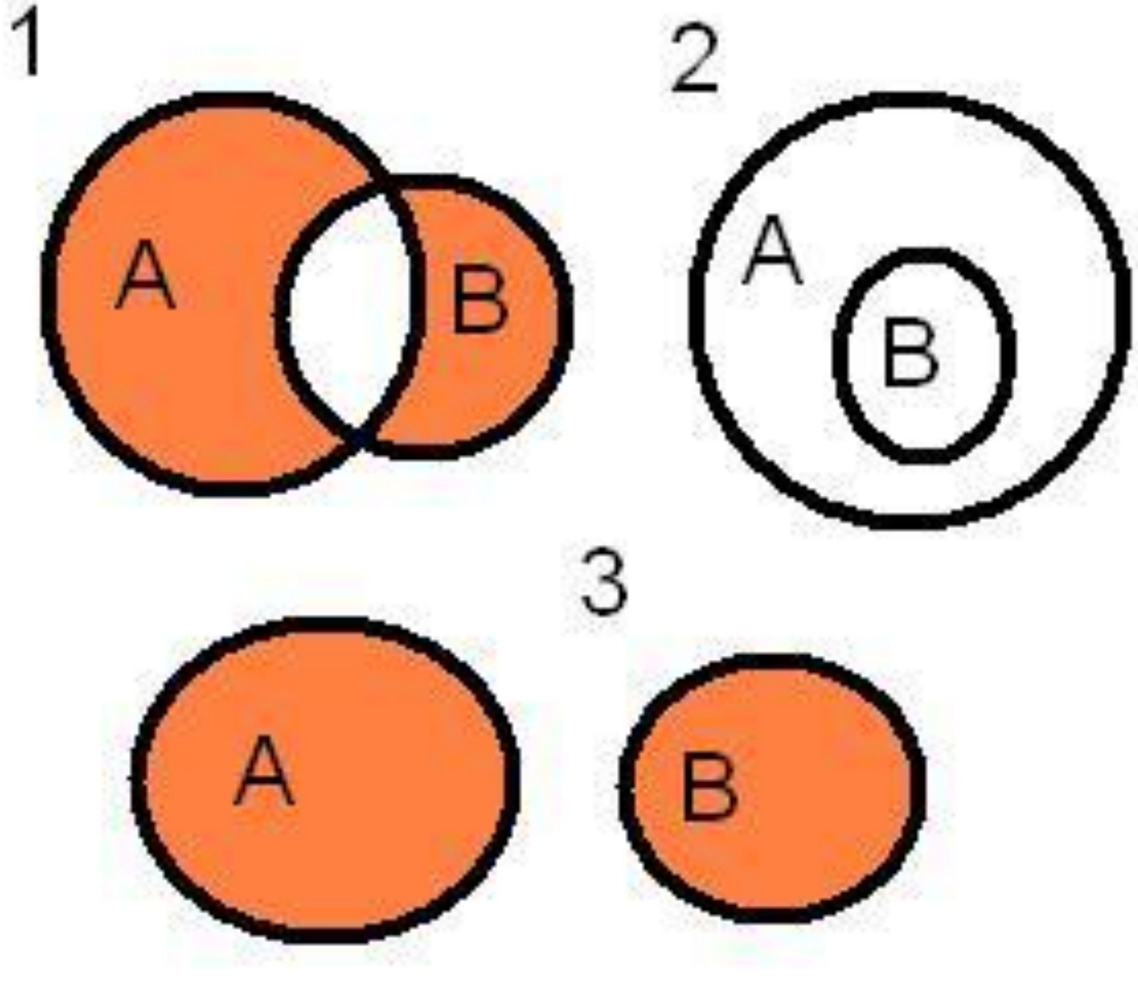
Строгая дизъюнкция истинна только тогда, когда одно высказывание истинно, а другое ложно.

Определение через основные функции:

$$\mathbf{A \oplus B = A \wedge \overline{B} \vee \overline{A} \wedge B}$$

A	B	A ⊕ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Строгая или исключающая дизъюнкция соответствует симметрической разности



Линия сравнения	*Инверсия*	*Конъюнкция*	*Дизъюнкция*	*Импликация*	*Эквивалентность*
Название	отрицание	логическое умножение	логическое сложение	логическое следование	логическое равенство
Обозначение	$\bar{A}$ или $\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
Союз	не	и	или	Если А, то В; Когда А, тогда В	А тогда и только тогда, когда В
Истинность результата операции	когда исходное высказывание ложно	когда истины одновременно высказывания А и В	когда истинно А, либо В, либо А и В одновременно	всегда, кроме случая, когда А истинно, а В ложно.	когда А и В одновременно истины или одновременно ложны
Таблица истинности					

A	$\neg A$
1	0
0	1

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
0	0	0
0	1	0
1	0	0

A	B	$A \vee B$
1	1	1
0	0	0
0	1	1
1	0	1

A	B	$A \rightarrow B$
1	1	1
0	0	1
0	1	1
1	0	0

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
0	0	1
0	1	0
1	0	0

Основные законы логики

- 1. Закон тождества
- 2. Закон непротиворечия
- 3. Закон исключения третьего
- 4. Закон отрицания отрицания

Закон тождества

- Всякое высказывание тождественно са мому себе:

$$A = A$$

Закон непротиворечия

- Высказывание не может быть одновременно истинным и ложным. Если высказывание А — истинно, то его отрицание не А должно быть ложным. Следовательно, логическое произведение высказывания и его отрицания должно быть ложно:

$$\alpha(A \wedge \neg A) = 0$$

$$\alpha\ (A \wedge \overline{A}) = 0$$

Закон исключения третьего

- Высказывание может быть либо истинным, либо ложным, третьего не дано. Это означает, что результат логического сложения высказывания и его отрицания всегда принимает значение истина:

$$\alpha\ (A \vee \neg A) = 1$$

$$\alpha\ (A \vee \overline{A}) = 1$$

Закон отрицания отрицания

- Если дважды отрицать некоторое высказывание, то в результате мы получим исходное высказывание:

$$\neg\neg A = A$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Пример задачи

- Трое подозреваемых в преступлении Иванов, Петров и Сидоров дали следующие показания:
- Иванов сказал: «Если виновен Сидоров, то и Петров тоже виновен».
- Петров сказал: «Виновен либо Иванов, либо Сидоров, но не оба».
- Сидоров сказал: «Я не виновен, а виновен Петров».

- Построить таблицу истинности каждого высказывания и по ней определить:
- а) Кто виновен, если все говорят правду?
- б) Кто виновен, если все лгут? в) Кто лжет, если все виновны?
- г) Кто лжет, если все невиновны?
- д) Кто виновен, если виновные лгут, а невиновные говорят правду?

- Введем простые высказывания: A={виновен Иванов};
- B={виновен Петров};
- C={виновен Сидоров}.

- Иванов : «Если виновен Сидоров, то и Петров тоже виновен». $C \Rightarrow B$
- Петров : «Виновен либо Иванов, либо Сидоров, но не оба». $A \oplus C$
- Сидоров: «Я не виновен, а виновен Петров». $\overline{C} \wedge B$

Составляем таблицу истинности каждого высказывания:

A	B	C	$\overline{C}$	*Показания Иванова* $C \Rightarrow B$	*Показания Петрова* $A \oplus C$	*Показания Сидорова* $\overline{C} \wedge B$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0

- а) Если все говорят правду, то в показаниях (последние три столбца) должны быть три единицы. Такому условию соответствует предпоследняя строка, из которой по значениям в первых трех столбцах (1,1,0) делаем вывод, что Иванов и Петров виновны, а Сидоров нет.

- б) Если все лгут, то в показаниях должны быть три нуля. Такому условию соответствует шестая строка, из которой по значениям в первых трех столбцах делаем вывод, что Иванов и Сидоров виновны, а Петров нет.

- в) Условию того, что все виновны, соответствует последняя строка, у которой в первых трех столбцах все единицы. По значениям показаний (последние три столбца) видно, что Иванов говорит правду, а Петров и Сидоров лгут

- г) Условию того, что все невиновны, соответствует первая строка, у которой в первых трех столбцах все нули. По значениям показаний видно, что Иванов говорит правду, а Петров и Сидоров лгут.

- д) Если виновные лгут, а невиновные говорят правду, то в каждой паре значений столбцов виновности (первые три) и показаний (последние три) для каждого подозреваемого должны стоять разные значения. Этому условию соответствует третья строка у которой значения первых трех столбцов (0,1,0), а последних трех (1,0,1). Это означает, что Иванов невиновен и говорит правду, Петров виновен и лжет, а Сидоров невиновен и говорит правду.