

Тема 2

Элементы математической ЛОГИКИ

Высказывания

- Предложение, о котором имеет смысл говорить, что оно является истинным или ложным, называют **высказыванием**.

Являются ли высказываниями предложения?

- «Волга впадает в Черное море»
- « $2+2=4$ »
- «Который час?»
- «Мойте руки перед едой!»
- «Земля – единственная обитаемая планета во Вселенной»
- «Это высказывание – ложное»

Значение истинности высказывания

- Введем функцию $\alpha(P)$, значение которой равно 1, если высказывание P истинно и 0, если высказывание P ложное. Число $\alpha(P)$ будем называть значением истинности высказывания.

$$\alpha(P) = \begin{cases} 1, & \text{если высказывание } P \text{ истинно} \\ 0, & \text{если высказывание } P \text{ ложно} \end{cases}$$

Элементарные и сложные высказывания

- Если никакая часть высказывания сама по себе не является высказыванием, то высказывание называют **элементарным** или **исходным**.
- **Сложным** называют высказывание, допускающее разделение его на другие высказывания.

Операции над высказываниями

- 1. Инверсия или негация (логическое отрицание)
- 2. Дизъюнкция (логическое сложение)
- 3. Конъюнкция (логическое умножение)
- 4. Импликация (логическое следствие)
- 5. Эквивалентность или эквиваленция (логическое равенство)

Обозначения и значение

- Инверсия или негация: $\neg A$, \bar{A} , «Не»
- Дизъюнкция: \vee , «Или»
- Конъюнкция: \wedge , «И»
- Импликация: \Rightarrow , \rightarrow «Если, то»
- Эквивалентность, эквиваленция \leftrightarrow , \Leftrightarrow
«тогда, и только тогда»

инверсия или негация - логическое отрицание

$\neg A$, \bar{A} , «не A » или «неверно, что A »

Таблица истинности

A	$\neg A$
1	0
0	1

Отрицание высказывания истинно, когда высказывание ложно, и ложно, когда высказывание истинно.

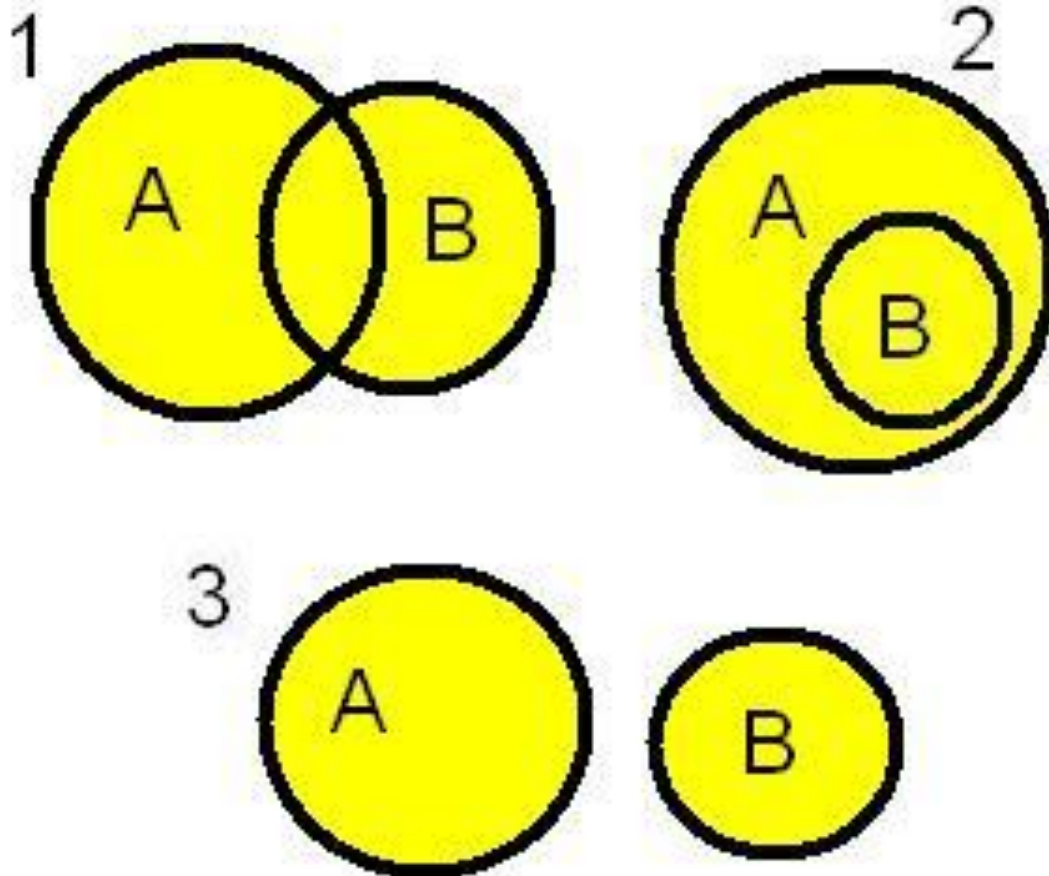
Дизъюнкция

Дизъюнкцией высказываний A и B называется высказывание $A \vee B$ (читается « A или B »), которое истинно тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из этих высказываний.

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Дизъюнкцию называют *логической суммой* и обозначают иногда « $A + B$ ». Из приведенного определения видно, что союз «или» употреблен в неразделительном смысле – « A или B , или оба».

В алгебре множеств
ДИЗЪЮНКЦИИ СООТВЕТСТВУЕТ
объединение



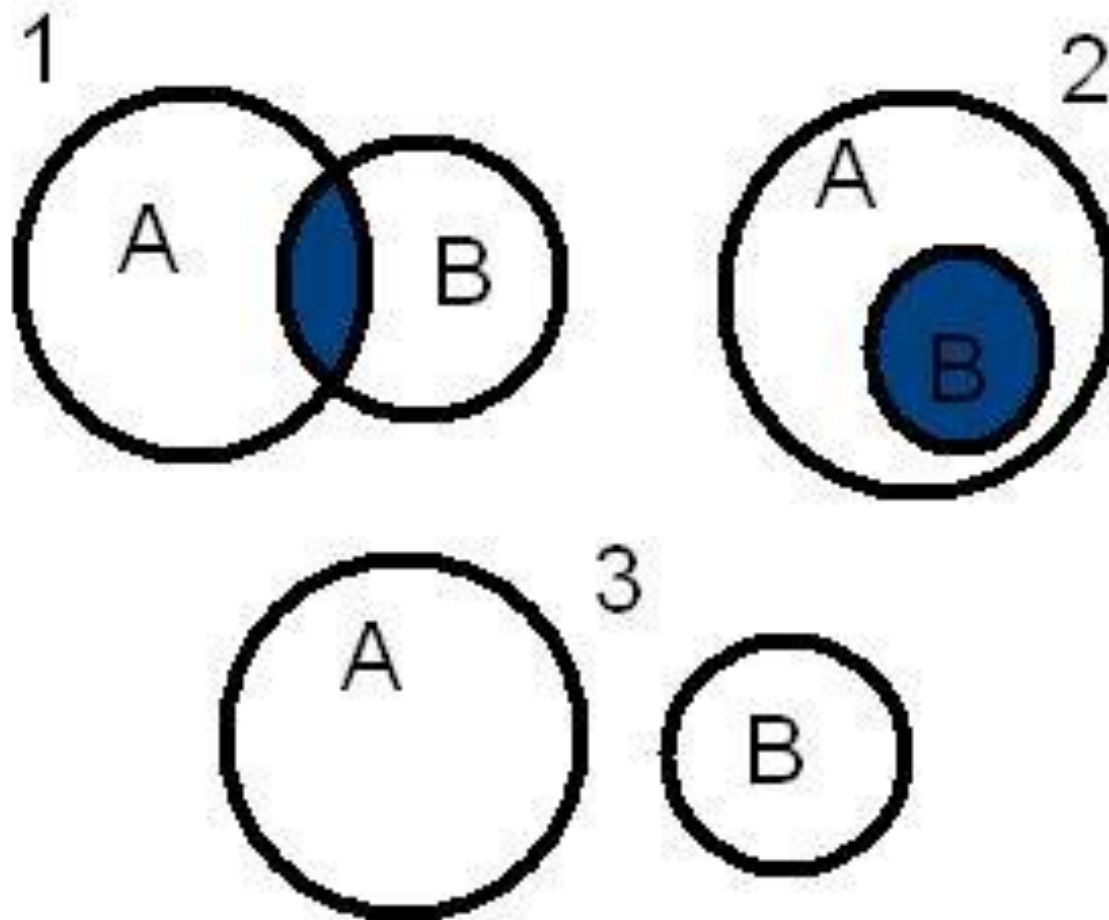
Конъюнкция

Конъюнкцией высказываний A и B называется высказывание $A \wedge B$ (читается *A и B*), которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба эти высказывания.

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Конъюнкцию называют также логическим произведением и часто обозначают $A \bullet B$ (или AB). Вместо знака \wedge используется знак $\&$.

В алгебре множеств
конъюнкции соответствует
пересечение



Импликация

Импликацией высказываний A и B называется высказывание $A \rightarrow B$ (читается – “если A , то B ”), которое ложно тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно.

A	B	$A \rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Вместо знака \rightarrow употребляются также знаки: \Rightarrow , \supset . В импликации $A \rightarrow B$ первый элемент A называется *антецендентом* (лат. *antecedens* – «предшествующий»), а второй элемент B – *консеквентом* (*consequens* – «последующий»).

Импликация $A \rightarrow B$ эквивалентна формуле $\sim A \vee B$.

Эквиваленция

(логическая равносильность)

Эквиваленцией двух высказываний называется новое высказывание, которое истинно тогда и только тогда когда оба высказывания одновременно истинны либо ложны

$$A \leftrightarrow B \quad A \Leftrightarrow B$$

Читается «А тогда и только тогда, когда В».

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Исключающее ИЛИ (строгая дизъюнкция)

Обозначение: $A \oplus B$ Логическая связка «ЛИБО..., ЛИБО»

Высказывание, соответствующее **исключающему или**, похоже на дизъюнкцию, но исключает одновременную истинность **обоих высказываний**

Строгая дизъюнкция истинна только тогда, когда одно высказывание истинно, а другое ложно.

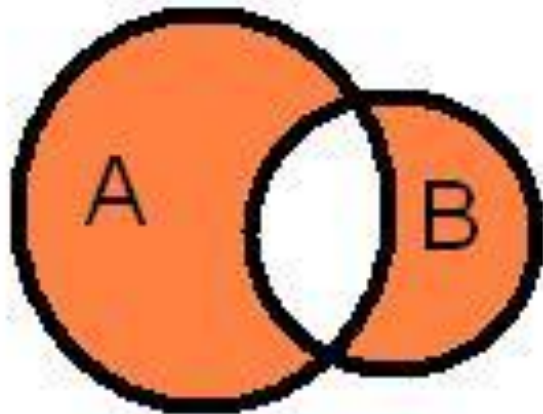
Определение через основные функции:

$$A \oplus B = A \wedge \bar{B} \vee \bar{A} \wedge B$$

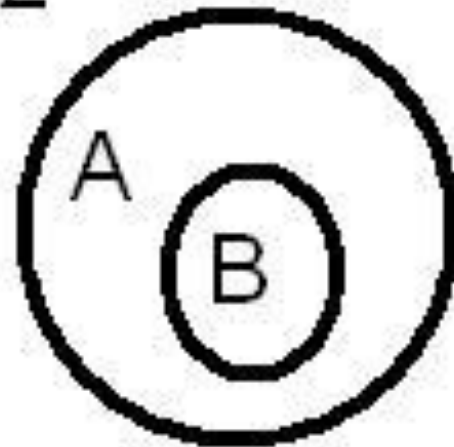
A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Строгая или исключаящая
дизъюнкция соответствует
симметрической разности

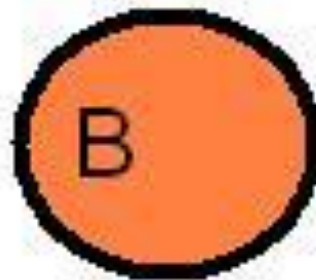
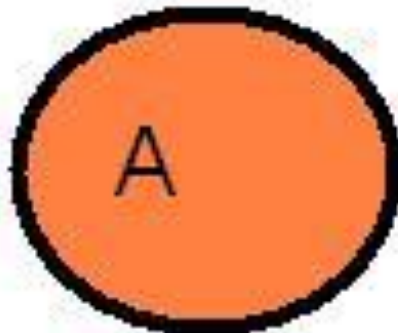
1



2



3



Линия сравнения	Инверсия	Конъюнкция	Дизъюнкция	Импликация	Эквивалентность																																																																		
Название	отрицание	логическое умножение	логическое сложение	логическое следование	логическое равенство																																																																		
Обозначение	A или $\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$																																																																		
Союз	не	и	или	Если A , то B ; Когда A , тогда B	A тогда и только тогда, когда B																																																																		
Истинность результата операции	когда исходное высказывание ложно	когда истинны одновременно высказывания A и B	когда истинно A , либо B , либо A и B одновременно	всегда, кроме случая, когда A истинно, а B ложно.	когда A и B одновременно истинны или одновременно ложны																																																																		
Таблица истинности	<table border="1"> <tr><td>A</td><td>$\neg A$</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td></tr> </table>	A	$\neg A$	1	0	0	1	<table border="1"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>$A \wedge B$</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	A	B	$A \wedge B$	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	<table border="1"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>$A \vee B$</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table>	A	B	$A \vee B$	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	<table border="1"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>$A \rightarrow B$</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	A	B	$A \rightarrow B$	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	<table border="1"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>$A \leftrightarrow B$</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	A	B	$A \leftrightarrow B$	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
A	$\neg A$																																																																						
1	0																																																																						
0	1																																																																						
A	B	$A \wedge B$																																																																					
1	1	1																																																																					
0	0	0																																																																					
0	1	0																																																																					
1	0	0																																																																					
A	B	$A \vee B$																																																																					
1	1	1																																																																					
0	0	0																																																																					
0	1	1																																																																					
1	0	1																																																																					
A	B	$A \rightarrow B$																																																																					
1	1	1																																																																					
0	0	1																																																																					
0	1	1																																																																					
1	0	0																																																																					
A	B	$A \leftrightarrow B$																																																																					
1	1	1																																																																					
0	0	1																																																																					
0	1	0																																																																					
1	0	0																																																																					

Основные законы логики

- 1. Закон тождества
- 2. Закон непротиворечия
- 3. Закон исключения третьего
- 4. Закон отрицания отрицания

Закон тождества

- Всякое высказывание тождественно самому себе:

$$A = A$$

Закон непротиворечия

- Высказывание не может быть одновременно истинным и ложным. Если высказывание A — истинно, то его отрицание $\neg A$ должно быть ложным. Следовательно, логическое произведение высказывания и его отрицания должно быть ложно:

$$\alpha(A \wedge \neg A) = 0$$

$$\alpha(A \wedge \bar{A}) = 0$$

Закон исключения третьего

- Высказывание может быть либо истинным, либо ложным, третьего не дано. Это означает, что результат логического сложения высказывания и его отрицания всегда принимает значение истина:

$$\alpha (A \vee \neg A) = 1$$

$$\alpha (A \vee \bar{A}) = 1$$

Закон отрицания отрицания

- Если дважды отрицать некоторое высказывание, то в результате мы получим исходное высказывание:

$$\neg \neg A = A$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Пример задачи

- Трое подозреваемых в преступлении Иванов, Петров и Сидоров дали следующие показания:
- Иванов сказал: «Если виновен Сидоров, то и Петров тоже виновен».
- Петров сказал: «Виновен либо Иванов, либо Сидоров, но не оба».
- Сидоров сказал: «Я не виновен, а виновен Петров».

- Построить таблицу истинности каждого высказывания и по ней определить:
- а) Кто виновен, если все говорят правду?
- б) Кто виновен, если все лгут? в) Кто лжет, если все виновны?
- г) Кто лжет, если все невиновны?
- д) Кто виновен, если виновные лгут, а невиновные говорят правду?

- Введем простые высказывания:
A={виновен Иванов};
- B={виновен Петров};
- C={виновен Сидоров}.

- Иванов : «Если виновен Сидоров, то и Петров тоже виновен». $C \Rightarrow B$
- Петров : «Виновен либо Иванов, либо Сидоров, но не оба». $A \oplus C$
- Сидоров: «Я не виновен, а виновен Петров». $\bar{C} \wedge B$

Составляем таблицу истинности каждого высказывания:

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	\bar{C}	Показания Иванова $C \Rightarrow B$	Показания Петрова $A \oplus C$	Показания Си- дорова $\bar{C} \wedge B$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0

- а) Если все говорят правду, то в показаниях (последние три столбца) должны быть три единицы. Такому условию соответствует предпоследняя строка, из которой по значениям в первых трех столбцах $(1, 1, 0)$ делаем вывод, что Иванов и Петров виновны, а Сидоров нет.

- б) Если все лгут, то в показаниях должны быть три нуля. Такому условию соответствует шестая строка, из которой по значениям в первых трех столбцах делаем вывод, что Иванов и Сидоров виновны, а Петров нет.

- в) Условию того, что все виновны, соответствует последняя строка, у которой в первых трех столбцах все единицы. По значениям показаний (последние три столбца) видно, что Иванов говорит правду, а Петров и Сидоров лгут

- г) Условию того, что все невиновны, соответствует первая строка, у которой в первых трех столбцах все нули. По значениям показаний видно, что Иванов говорит правду, а Петров и Сидоров лгут.

- д) Если виновные лгут, а невинные говорят правду, то в каждой паре значений столбцов виновности (первые три) и показаний (последние три) для каждого подозреваемого должны стоять разные значения. Этому условию соответствует третья строка у которой значения первых трех столбцов $(0, 1, 0)$, а последних трех $(1, 0, 1)$. Это означает, что Иванов невиновен и говорит правду, Петров виновен и лжет, а Сидоров невиновен и говорит правду.