

# Элементы теории обобщенных функций

---

Деревич И.В.

Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021

# Преобразование Фурье

## Прямое и обратное преобразование Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} F(k) dk$$

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx'} f(x') dx'$$

## Введение дельта – функции Дирака

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk}_{\delta(x-x')} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x-x') dx'$$



## Свойства дельта-функции Дирака

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \quad \text{разложение в интеграл Фурье} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad \text{условие нормировки}$$

---

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(a - x') dx' = f(a) \quad \text{дельта-функция как ядро линейного функционала}$$

### Обобщенная функция

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq 0 \\ \infty & \text{при } x = 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

# Функция Хэвисайда

## Обобщенная функция

---

Определение функции  
Хэвисайда

$$\Delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0x < \\ 1/2 & \text{при } 0x = \\ 1 & \text{при } 0x \geq \end{cases}$$

Связь с дельта-функцией  
Дирака

$$\frac{d\Delta(x)}{dx} = \delta(x)$$

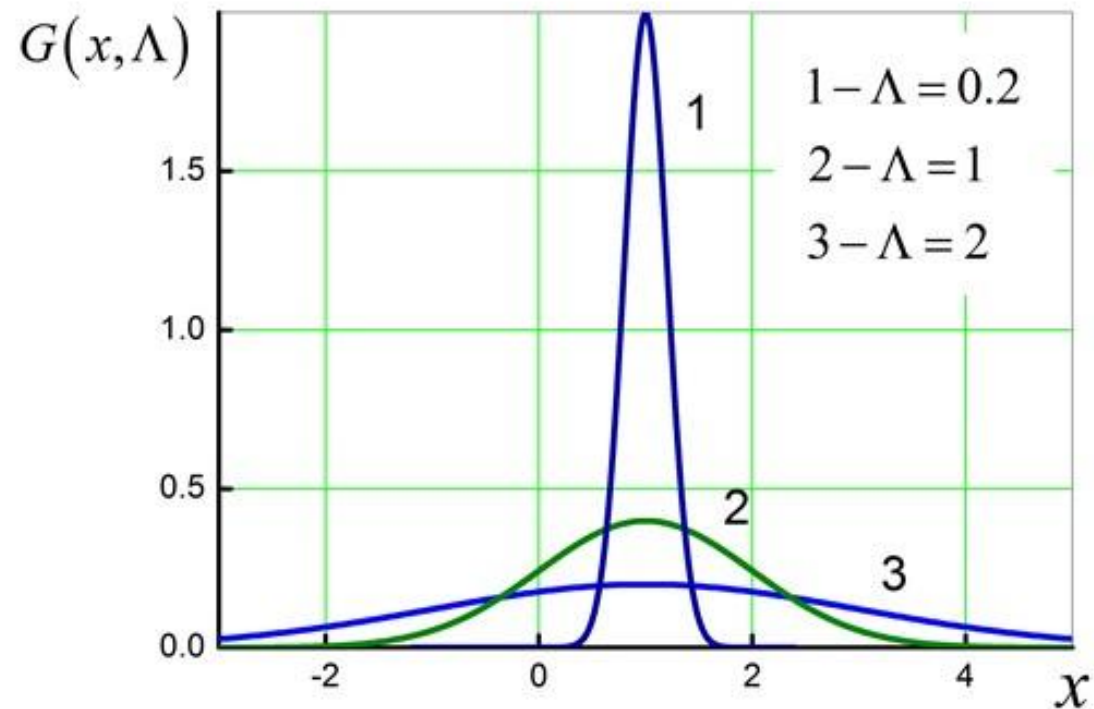
# Аппроксимация дельта-функции Дирака

## Распределение Гаусса

$$G(x, \Lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\Lambda^2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x, \Lambda) dx = 1$$

$$\delta(x) = \lim_{\Lambda \rightarrow 0} G(x, \Lambda)$$





# Функция ошибок (erf(x))

## Определение функции ошибок

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

## Свойства

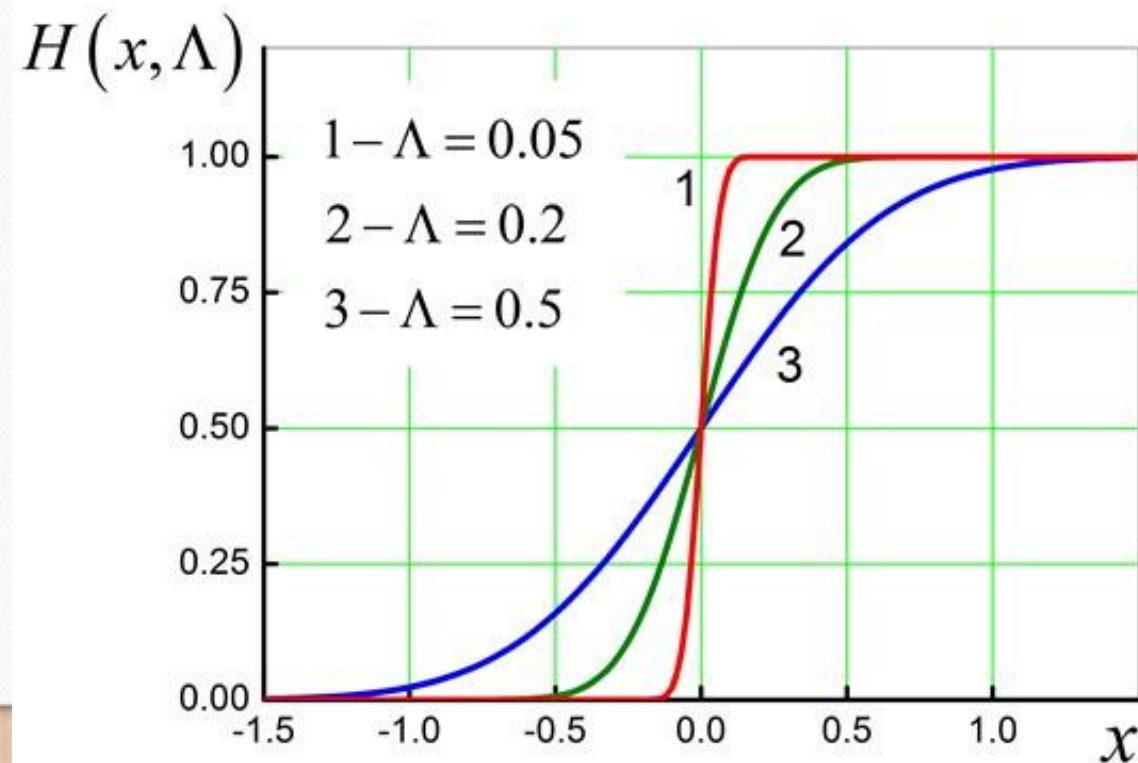
$$\operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf}(z) \quad \operatorname{erf}(0) = 0 \quad \operatorname{erf}(\infty) = 1 \quad \operatorname{erf}(-\infty) = -1$$

# Аппроксимация функции Хэвисайда

$$H(x, \Lambda) = \int_{-\infty}^x G(y, \Lambda) dy = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{2\Lambda^2}} \right) \right\}$$

первообразная от  
дельта-функции  
Дирака

$$\Delta(x) = \lim_{\Lambda \rightarrow 0} H(x, \Lambda)$$



# Resume

---

В курсе уравнений математической физики используются две обобщенные функции

- ✓ Дельта-функция Дирака
- ✓ Функция Хэвисайда
- ✓ Аппроксимации обобщенных функций используются при решении задач