Элементы теории обобщенных функций

Деревич И.В.

Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021

Преобразование Фурье

Прямое и обратное преобразование Фурье

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{ikx}F(k)\,\mathrm{d}k \qquad F(k)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ikx'}f(x')\,\mathrm{d}x'$$

Ведение дельта – функции Дирака

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x' f(x')\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{ik(x-x')}\mathrm{d}k}_{\delta(x-x')}=\int_{-\infty}^{\infty}f(x')\delta(x-x')\,\mathrm{d}x'$$

Свойства дельта-функции Дирака

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,dk$$ разложение в интеграл Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx = 1$$ условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\,\delta(a-x')\,dx' = f(a)$$ дельта-функция как ядро линейного функционала

<u>Обобщенная функция</u>

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq 0 \\ \infty & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx = 1$$

Функция Хэвисайда

Обобщенная функция

Определение функции Хэвисайда

$$\Delta(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0 \\ 1/2 \text{ при } x = 0 \\ 1 \text{ при } x \geq 0 \end{cases}$$

Связь с дельта-функцией Дирака

$$\frac{\mathrm{d}\Delta(x)}{\mathrm{d}x} = \delta(x)$$

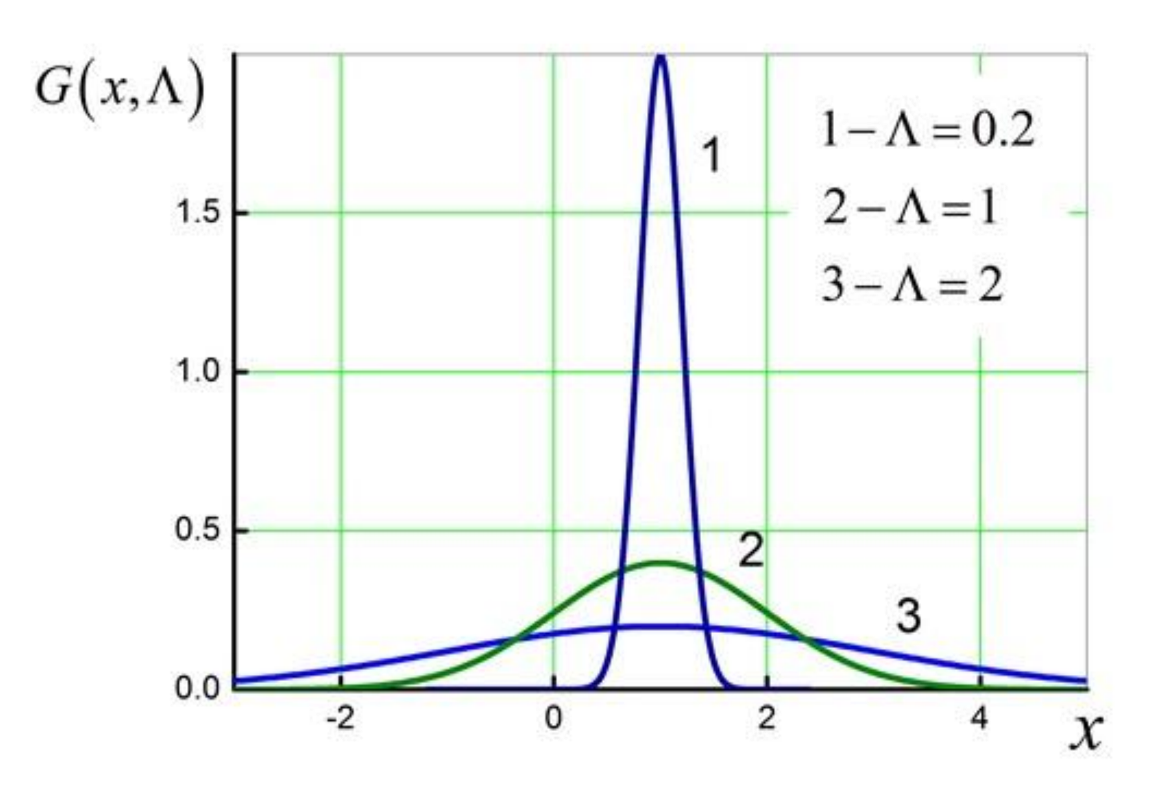
Аппроксимация дельта-функции Дирака

Распределение Гаусса

$$G(x,\Lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\Lambda^2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\Lambda)\,\mathrm{d}x=1$$

$$\boxed{\delta(x)=\lim_{\Lambda\to 0} G(x,\Lambda)}$$



Функция ошибок (erf(x))

Определение функции ошибок

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

Свойства

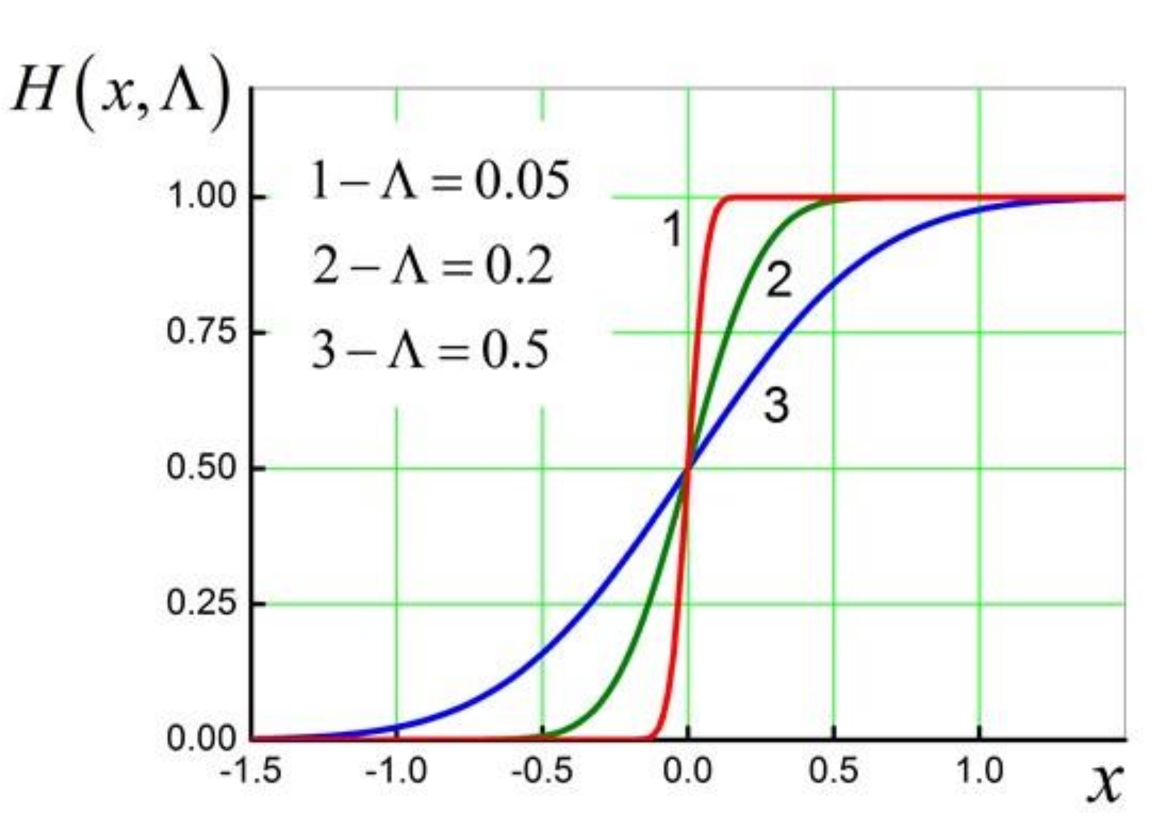
$$\operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf}(z) \qquad \operatorname{erf}(0) = 0 \qquad \operatorname{erf}(\infty) = 1 \qquad \operatorname{erf}(-\infty) = -1$$

Аппроксимация функции Хэвисайда

$$H(x,\Lambda)=\int\limits_{-\infty}^{x} G(y,\Lambda)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left\{1+\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2\Lambda^2}}\right)\right\}$$

первообразная от дельта-функции Дирака

$$\boxed{\Delta(x)=\lim_{\Lambda\to 0} H(x,\Lambda)}$$



Resume

В курсе уравнений математической физики используются две обобщенные функции

- ✔ Дельта-функция Дирака
- ✔ Функция Хэвисайда
- ✔ Аппроксимации обобщенных функций используются при решении задач