

Брычкина Мария Сергеевна,
к.ф.-м.н., доцент

brychkina.mariia@yandex.ru

с.т. 8-912-003-31-41

Viber, WhatsApp, Telegram

Неклассические логики

- 1. Нечеткая логика**
- 2. Временная логика**
- 3. Алгоритмическая логика**
- 4. Модальная логика**

Нечёткая логика

Предпосылки

Возникла необходимость в аппарате, способном моделировать рассуждения на основе сложных причинно-следственных связей.

«Почти всегда можно сделать такой же самый продукт без нечеткой логики, но с нечеткой будет быстрее и дешевле»

Лотфи Заде

«Бинарная логика – не более чем роковая ошибка античной цивилизации»

Барт Коско

Нечеткие множества

В классической теории множеств принадлежность объекта x множеству C определяется характеристической функцией вида:

$$\mu_C = \begin{cases} 1 & | \quad x \in C \\ 0 & | \quad x \notin C \end{cases}$$

Характеристикой **нечеткого множества** выступает функция принадлежности.

$\mu_A(x) \in [0; 1]$ – степень принадлежности к нечеткому множеству F , представляющая собой обобщение понятия характеристической функции обычного множества.

Zadeh L.A. Fuzzy Sets // Information and control. – 1965. Vol.8. – P.338-353.



Лотфи Заде (Lotfi Zadeh)

Нечеткое множество – это подмножество A некоторого четкого множества-носителя, каждому элементу которого сопоставлена степень его принадлежности множеству A .

Нечеткое множество полностью определяется заданием **функции принадлежности** $\mu_A(x)$, $\mu_A(x) \in [0,1]$.

Пусть $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $M = [0, 1]$; A – нечёткое множество, для которого

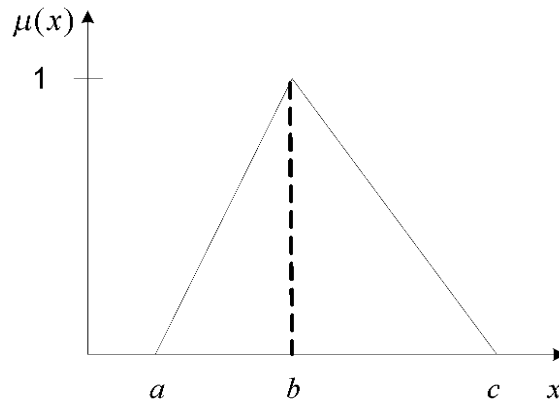
$$\mu_A(x_1) = 0,3; \mu_A(x_2) = 0; \mu_A(x_3) = 1; \mu_A(x_4) = 0,5; \mu_A(x_5) = 0,9.$$

$$A = \{0,3 / x_1; 0 / x_2; 1 / x_3; 0,5 / x_4; 0,9 / x_5\},$$

$$A = \{0,3 / x_1 + 0 / x_2 + 1 / x_3 + 0,5 / x_4 + 0,9 / x_5\}$$

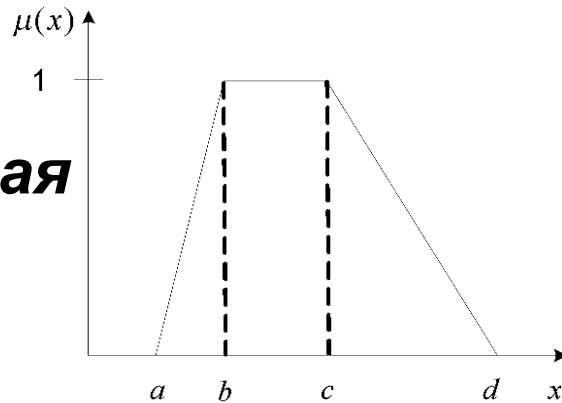
Типовые формы функций принадлежности

Треугольная



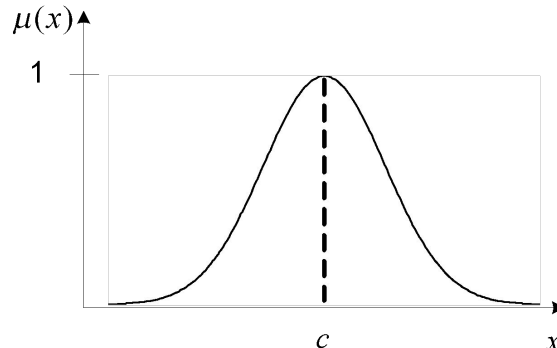
$$\mu(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ 1 - \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Трапецеидальная



$$\mu(x) = \begin{cases} 1 - \frac{b-x}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ 1 - \frac{x-c}{c-b}, & c \leq x \leq d \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Гауссова



$$\mu(x) = \exp\left[-\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2\right]$$

Операции над нечеткими множествами

Объединением нечетких множеств A и B называется нечеткое множество $A \cup B$ с функцией принадлежности:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Пересечением нечетких множеств A и B в X называется нечеткое множество $A \cap B$ с функцией принадлежности:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Дополнением нечеткого множества A называется нечеткое множество \bar{A} с функцией

принадлежности:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Разность. $A - B = A \cap \bar{B}$ с функцией принадлежности:

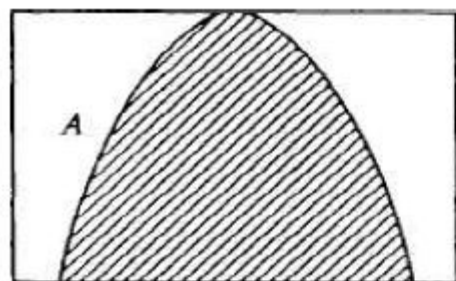
$$\mu_{A-B}(x) = \mu_{A \cap \bar{B}}(x) = \min(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)).$$

Дизъюнктивная сумма

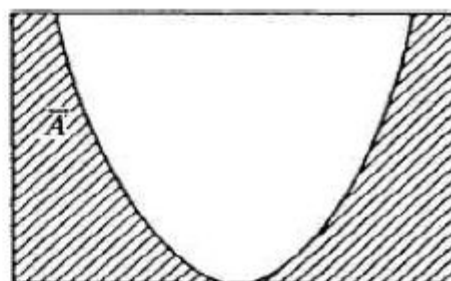
$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$$

с функцией принадлежности:

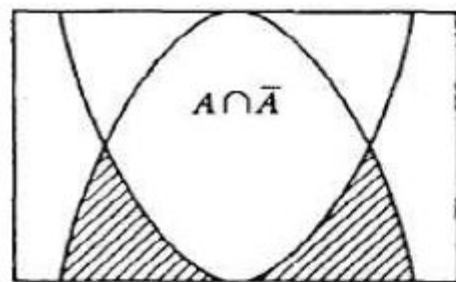
$$\mu_{A \oplus B}(x) = \max(\min(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)); \min(1 - \mu_A(x), \mu_B(x))).$$



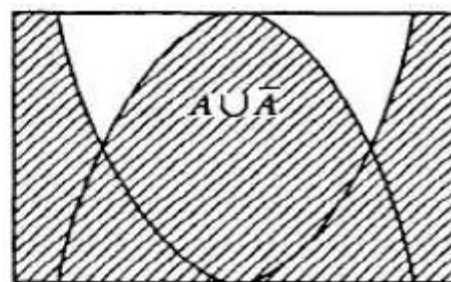
a



б

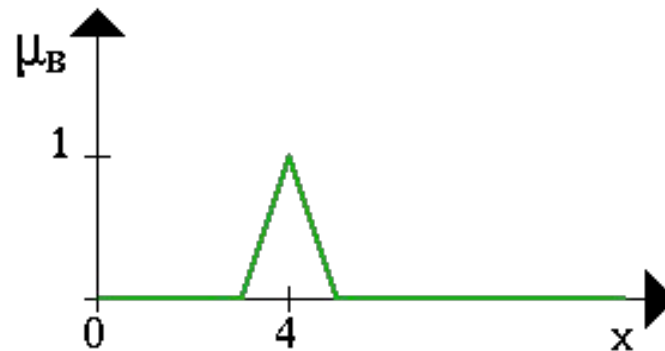
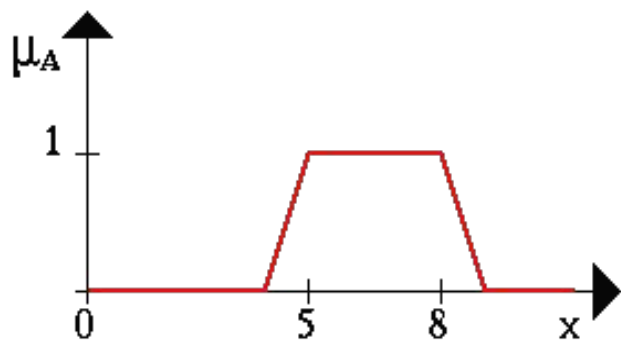


в

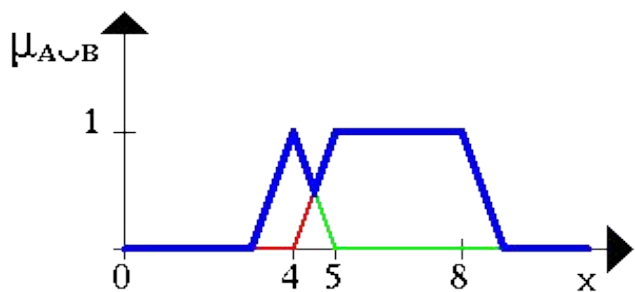


г

Операции над нечеткими множествами (пример)

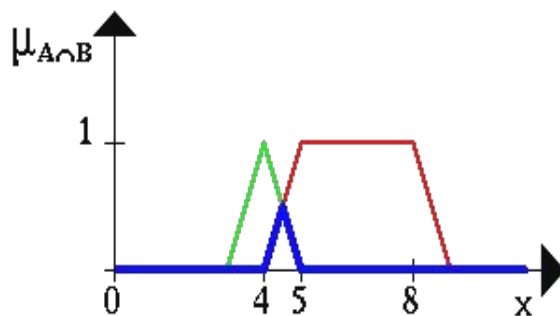


Исходные
множества



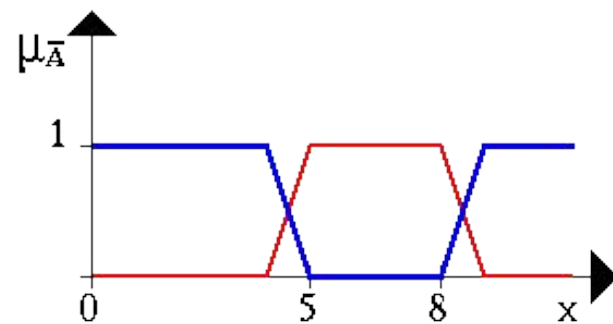
объединени

$$\mu_C(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$



пересечени

$$\mu_C(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$



отрицани

$$\mu_C(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Алгебраические операции

Алгебраическое произведение A и B обозначается $A \cdot B$

$$\forall x \in E \mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x) \mu_B(x).$$

Алгебраическая сумма этих множеств обозначается $A \hat{+} B$

$$\forall x \in E \mu_{A \hat{+} B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \mu_B(x).$$

На основе операции алгебраического произведения определяется операция *возведения в степень α* нечёткого множества A , где α – положительное число

$$\mu_A^\alpha = \mu_A^\alpha(x).$$

Частные случаи

$\text{CON}(A) = A^2$ – операция *концентрирования (уплотнения)*;

$\text{DIL}(A) = A^{0,5}$ – операция *растяжения*,

Нечёткая переменная

Нечёткая переменная = наименование переменной + область определения A + функция принадлежности μ .

Нечёткая переменная – именованное нечеткое множество: например, нечеткая переменная ***«высокий рост»***.

Нечеткая переменная описывается набором (N, X, F) , где N – это название переменной, X – универсальное множество, F – нечеткое множество на X , представляющее собой нечеткое ограничение на значения x нечеткой переменной N .

Лингвистическая переменная

Лингвистическая переменная (N, T, X, G, P) состоит из:

N – название переменной;

T – множество значений (базовое терм-множество), его элементы представляют собой названия нечетких переменных;

X – универсальное множество;

G – синтаксическое правило, по которому генерируются новые термы с применением слов естественного или формального языка;

P – семантическое правило каждому значению лингвистической переменной ставит в соответствие нечеткое подмножество множества X .

Примеры лингвистических переменных

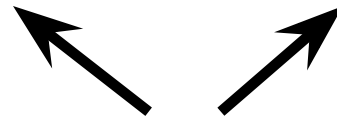
Бизнес = {«малый», «средний»}

Температура в комнате = {«холодно»,
«комфортно», «жарко»}

Процентная ставка = {«высокая», «низкая»}



***Лингвистическая
переменная***



***Термы –
наименования
нечетких
переменных***

Лингвистическая переменная «температура в комнате»

N = «температура в комнате» – это название

переменной;
 $T = \{ \text{«холодно»}, \text{«комфортно»}, \text{«жарко»} \}$ – базовое терм-множество;

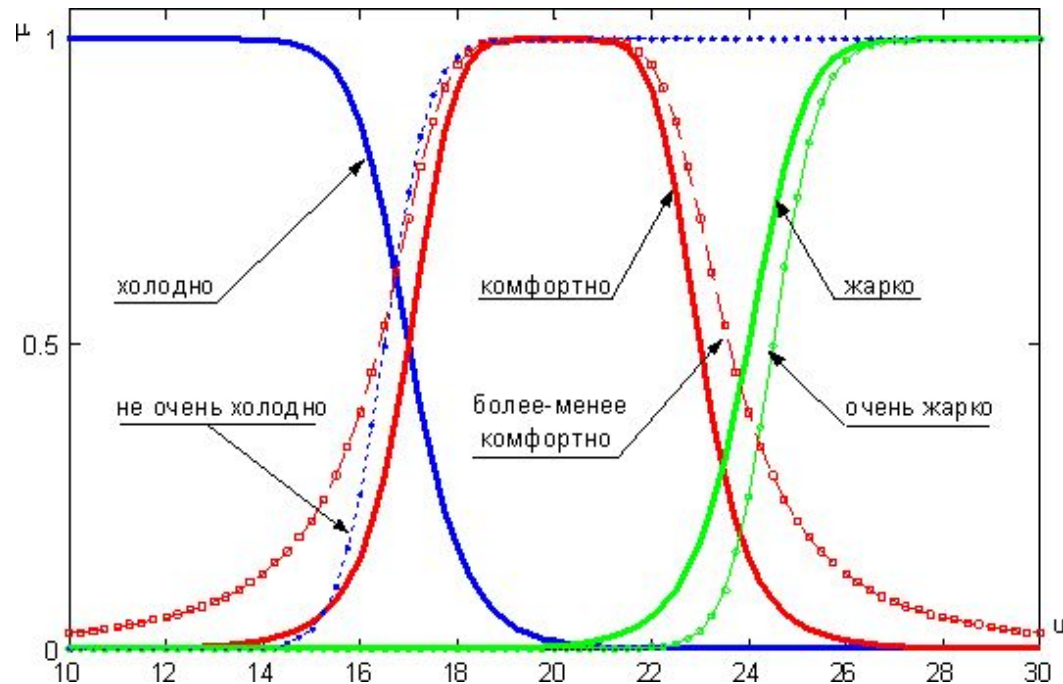
$X = [10, 35]$ – универсальное

множество;

G – синтаксическое правило, порождающее новые термы с использованием квантификаторов "и", "или", "не", "очень", "более-менее";

P – семантическое правило, ставящее в соответствие каждому новому терму функцию принадлежности (т.е. **нечеткое множество**) по правилам: если термы A и B имели функции принадлежности $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$ соответственно, то новые термы

квантификатор	иметь функцию принадлежности	функции
не t	функция принадлежности:	$1 - \mu_t(u)$
очень t		$(\mu_t(u))^2$
более-менее t		$\sqrt{\mu_t(u)}$
A и B		$\max(\mu_A(x), \mu_B(x))$
A или B		$\min(\mu_A(x), \mu_B(x))$



Нечёткие отношения

Пусть $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ – прямое произведение универсальных множеств и M – некоторое множество принадлежностей (например, $M=[0,1]$). Нечёткое n -арное отношение определяется как нечёткое подмножество R на E , принимающее свои значения в M . В случае $n=2$ и $M=[0,1]$ нечётким отношением R между множествами $X = E_1$ и $Y = E_2$ будет называться функция $R : (X, Y) \rightarrow [0,1]$, которая ставит в соответствие каждой паре элементов $(x, y) \in X \times Y$ величину $\mu_R(x, y) \in [0,1]$.

Операции над нечёткими отношениями

Объединение двух отношений R_1 и R_2 . Объединение двух отношений обозначается $R_1 \cup R_2$ и определяется выражением

$$\mu_{R_1 \cup R_2}(x, y) = \mu_{R_1}(x, y) \vee \mu_{R_2}(x, y).$$

Пересечение двух отношений. Пересечение двух отношений R_1 и R_2 обозначается $R_1 \cap R_2$ и определяется выражением

$$\mu_{R_1 \cap R_2}(x, y) = \mu_{R_1}(x, y) \wedge \mu_{R_2}(x, y).$$

Алгебраическое произведение двух отношений. Алгебраическое произведение двух отношений R_1 и R_2 обозначается $R_1 \cdot R_2$ и определяется выражением

$$\mu_{R_1 \cdot R_2}(x, y) = \mu_{R_1}(x, y) \cdot \mu_{R_2}(x, y).$$

Алгебраическая сумма двух отношений. Алгебраическая сумма двух отношений R_1 и R_2 обозначается $R_1 \hat{+} R_2$ и определяется выражением

$$\mu_{R_1 \hat{+} R_2}(x, y) = \mu_{R_1}(x, y) + \mu_{R_2}(x, y) - \mu_{R_1}(x, y) \cdot \mu_{R_2}(x, y).$$

Композиция (свёртка) двух нечётких отношений. Пусть R_1 – нечёткое отношение $R_1 : (X \times Y) \rightarrow [0,1]$ между X и Y , и R_2 – нечёткое отношение $R_2 : (Y \times Z) \rightarrow [0,1]$ между Y и Z . Нечёткое отношение между X и Z , обозначаемое $R_2 \circ R_1$, определённое через R_1 и R_2 выражением

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x, z) = \bigvee_y (\mu_{R_1}(x, y) \wedge \mu_{R_2}(y, z)),$$

называется (max-min)-композицией ((max-min)-свёрткой) отношений R_1 и R_2 .

Нечеткие правила

Нечеткие знания формулируются в виде **нечетких продукционных правил** вывода в форме «если-то» (*if-then rule*):

ЕСЛИ x это A , **ТО** y это

где A и B – это лингвистические переменные и соответствующие им функции принадлежности $\mu_A(x)$ и $\mu_B(y)$

Левая часть правила называется **условием**, или **предпосылкой**, правая часть – **следствием**, или **заключением**.

Для n переменных правило R_i примет вид нечеткого рассуждения:

R_i : **ЕСЛИ** (x_1 это A_{i1}) ... **И** ... (x_n это A_{in}), **ТО** (y это B_i).

Уровни представления нечетких правил:

- ✓ **уровень поверхностной структуры** – правила сформулированы только в лингвистической форме;
- ✓ **уровень глубинной структуры** – поверхностная структура правила вместе со значениями функций принадлежности для каждого термина лингвистической переменной.

Модели нечеткого вывода

База знаний
нечеткой
системы

= правила + термы + принадлежности
функции
термов

Пусть в базе правил системы нечеткого вывода, имеется m правил

вида: R_1 : ЕСЛИ $(x_1$ это A_{11}) ... И ... $(x_n$ это A_{1n}), ТО $(y$ это
... $B_1)$...

R_i : ЕСЛИ $(x_1$ это A_{i1}) ... И ... $(x_n$ это A_{in}), ТО $(y$ это
... $B_i)$...

R_m : ЕСЛИ $(x_1$ это A_{m1}) ... И ... $(x_n$ это A_{mn}), ТО $(y$ это
 $B_m)$

где

$x_j, j = \overline{1, n}$ – имена входных

y переменная выводной

$A_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ предопределенные функции

принадлежности.

Результатом нечеткого вывода является четкое значение

переменной $y \in Y$ на основе заданных четких значений $\tilde{x}_j \in X, j = \overline{1, n}$.

Этапы нечёткого логического вывода

1. *Формирование базы правил*
2. *Фаззификация входных параметров* – введение нечеткости – процесс нахождения функции принадлежности нечетких множеств. Устанавливается соответствие между численным значением входной переменной системы нечеткого вывода и значением функции принадлежности соответствующей ей лингвистической переменной.
3. *Агрегирование* – определение степени истинности каждого из подзаключений по каждому из правил
4. *Активизация подусловий в нечетких правилах* – Нечеткие подмножества, назначенные для каждой выходной переменной, объединяются вместе
5. *Дефаззификация* – определение четких значений выходных переменных

Правило Мамдани (Mamdani)

Импликаци

и

$$A \rightarrow B$$

соответствует нечёткое отношение с
функцией

принадлежности:

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

Нечеткий вывод по способу Мамдани (Mamdani)

1. Определяются степени истинности, т.е. значения функций принадлежности для левых частей каждого правила (предпосылок):

$$A_{ij}(\tilde{x}_j), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$$

2. Определяются уровни «отсечения» для левой части каждого из правил:

$$\alpha_i = \min_j(A_{ij}(\tilde{x}_j)), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$$

Находятся «усеченные» функции принадлежности

$$B'_i(y) = \min_i(\alpha_i, B_i(y)), i = \overline{1, m}$$

3. Композиция полученных усеченных функций

$$\mu(y) = \max_i(B'_i(y)), i = \overline{1, m}$$

4. Приведение к четкости, центроидный метод:
$$\tilde{y} = \frac{\int y B(y)}{\int_y B(y)}$$

Первый нечеткий контроллер для управления паровым двигателем

Е.Н. Mamdani, S. Assilian. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. 1975.

$$c = \frac{\int_{\underline{x}}^{\bar{x}} x \mu_A(x) dx}{\int_{\underline{x}}^{\bar{x}} \mu_A(x) dx}$$

Метод центра тяжести

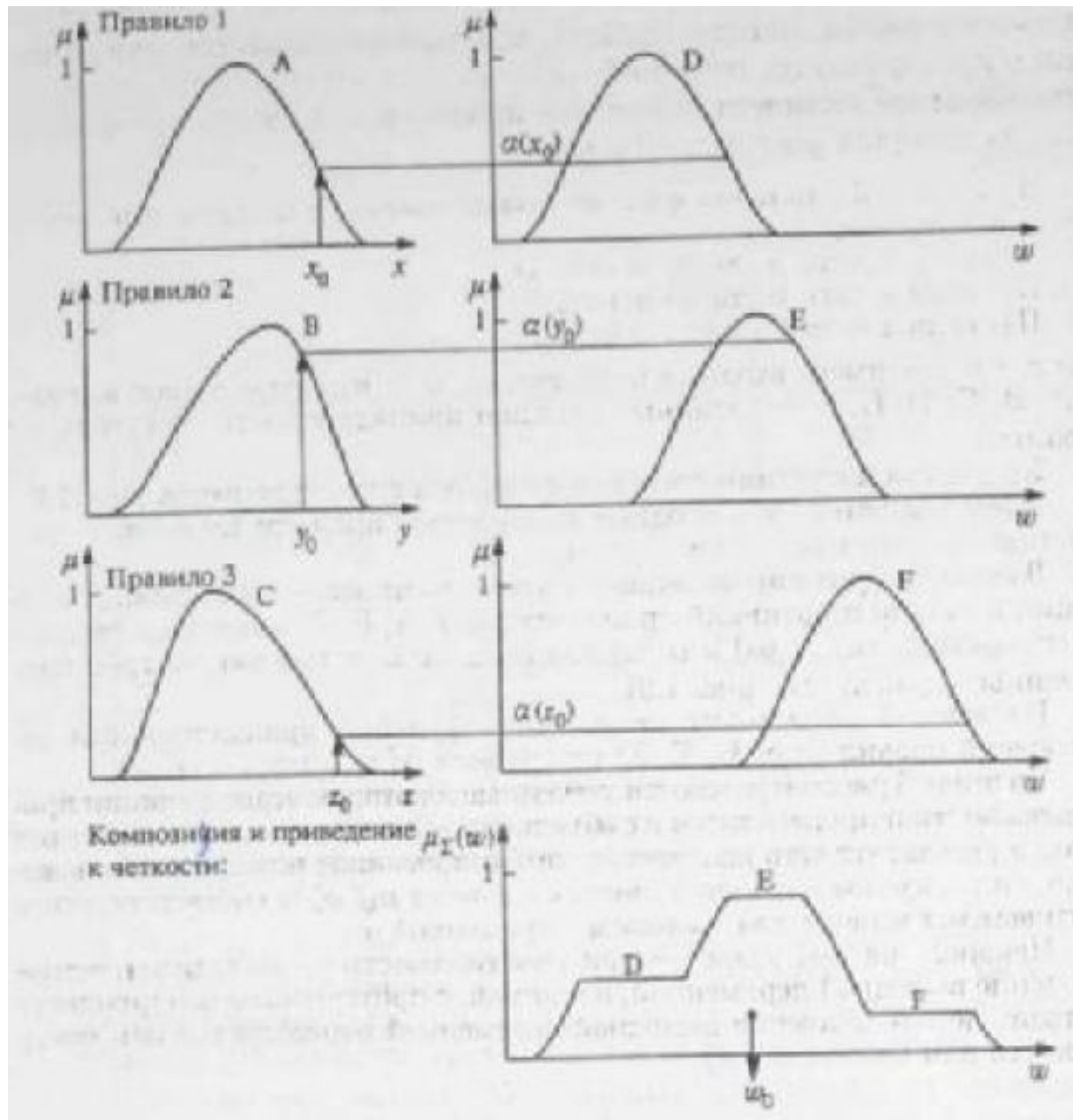
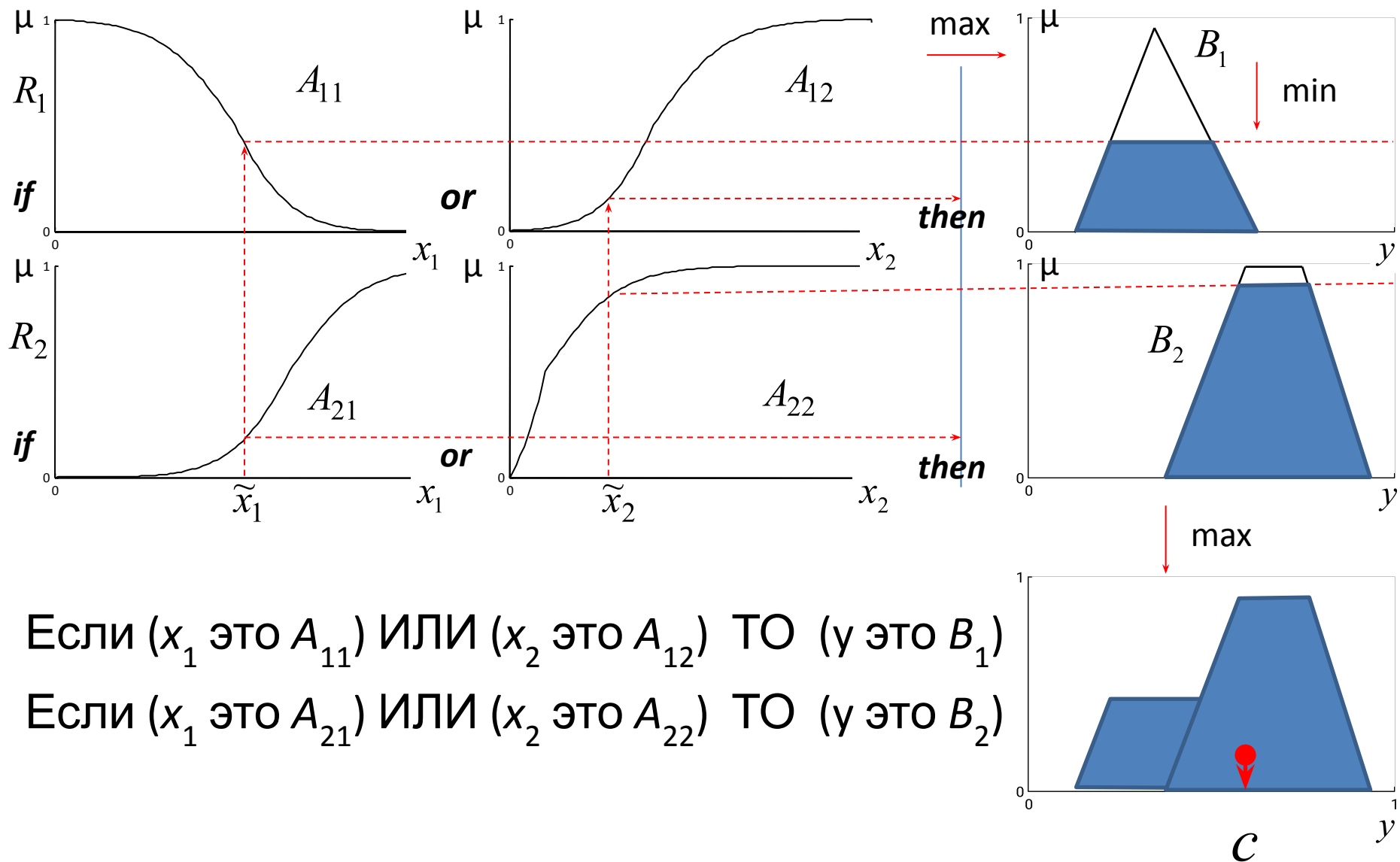


Схема нечёткого вывода по Мамдани



Если (x_1 это A_{11}) ИЛИ (x_2 это A_{12}) ТО (y это B_1)

Если (x_1 это A_{21}) ИЛИ (x_2 это A_{22}) ТО (y это B_2)

Нечеткий вывод по Сугено (Sugeno)

Набор правил следующего вида:

R_i : ЕСЛИ $(x_1$ это A_{i1}) ... И ... $(x_n$ это $A_{in})$, ТО $y = f$

$f(\mathbf{X})$ – некоторая четкая функция, полином первого порядка:

$$y = f(\mathbf{X}) = p_0 + \sum_{j=1}^n p_j x_j$$

1. Определяются степени истинности.
2. Определяются уровни «отсечения» предпосылок правил α_i и рассчитываются индивидуальные выходы правил y_i , $i = \overline{1, m}$

$$y_i^* = p_{i0} + \sum_{j=1}^n p_{ij} x_j$$

где p_{i0} , $[p_{ij}]$ – коэффициенты полинома или цифровые веса. В адаптивных системах подбираются в процессе обучения.

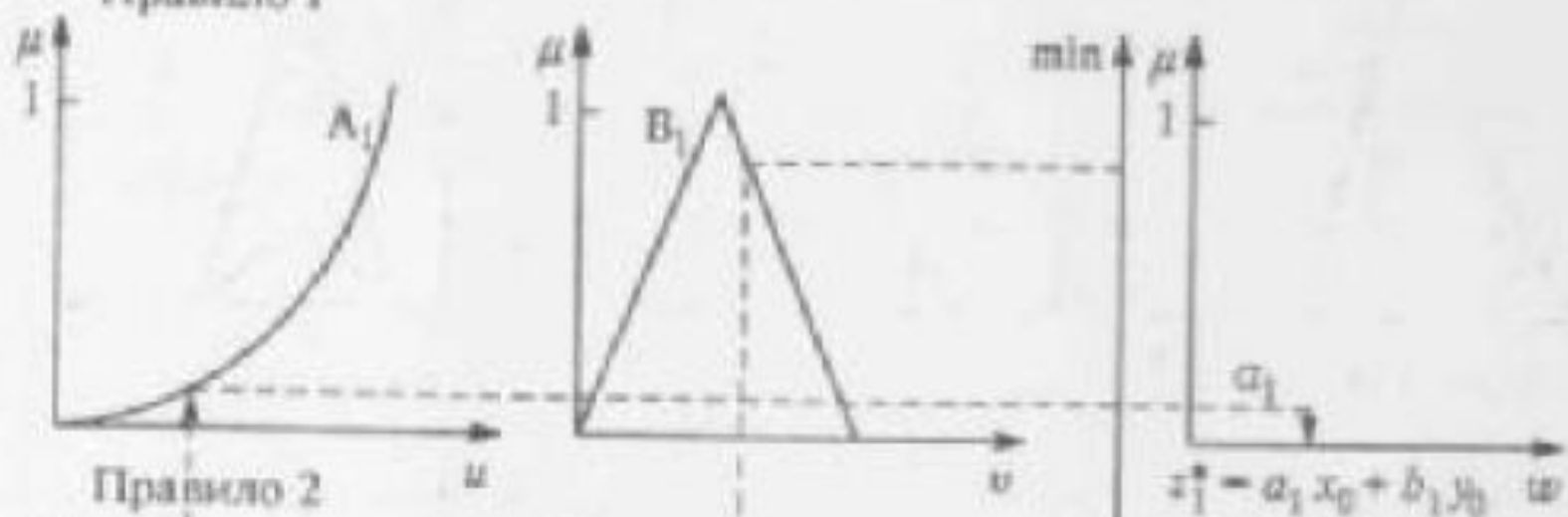
3. Итоговая четкая величина вычисляется как средневзвешенное:

$$\tilde{y} = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_i y_i^*}{\sum_{i=1}^m \alpha_i}$$

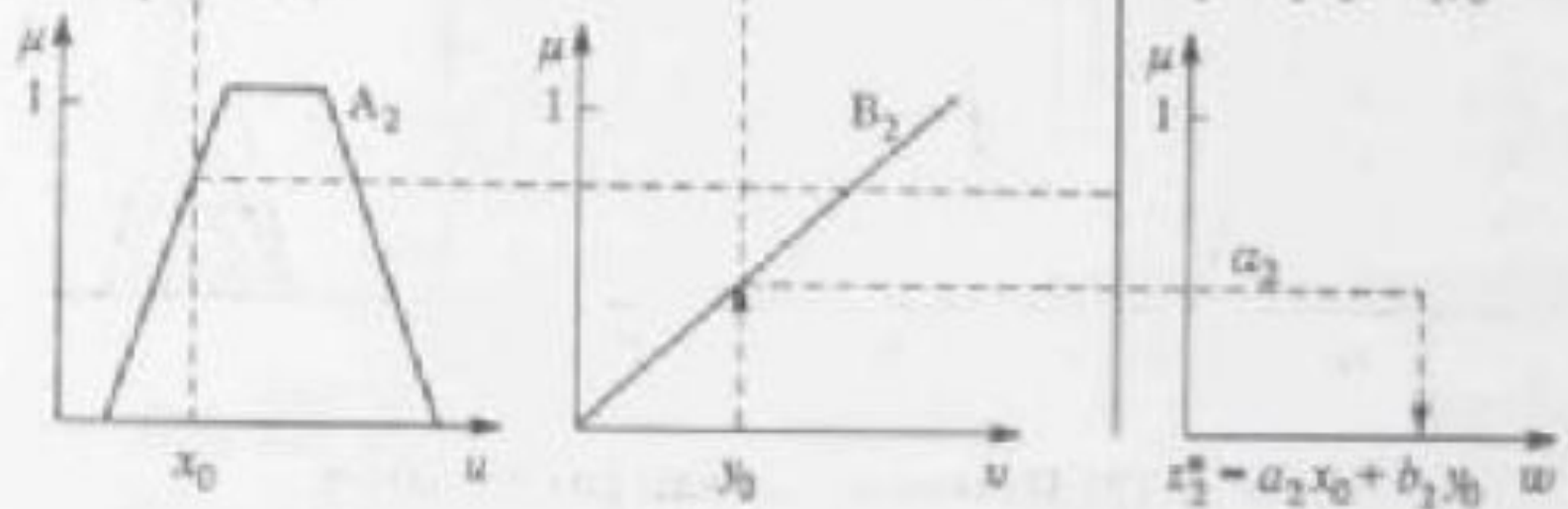
Первый нечеткий контроллер в Японии для очистки воды

M.Sugeno and T. Takagi . A new approach to design of fuzzy controller. 1983.

Правило 1



Правило 2



Нечеткий вывод по способу Tsukamoto

1. Определяются степени истинности, т.е. значения функций принадлежности для левых частей каждого правила (предпосылок):

$$A_{ij}(\tilde{x}_j), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$$

2. Определяются уровни «отсечения» для левой части каждого из правил:

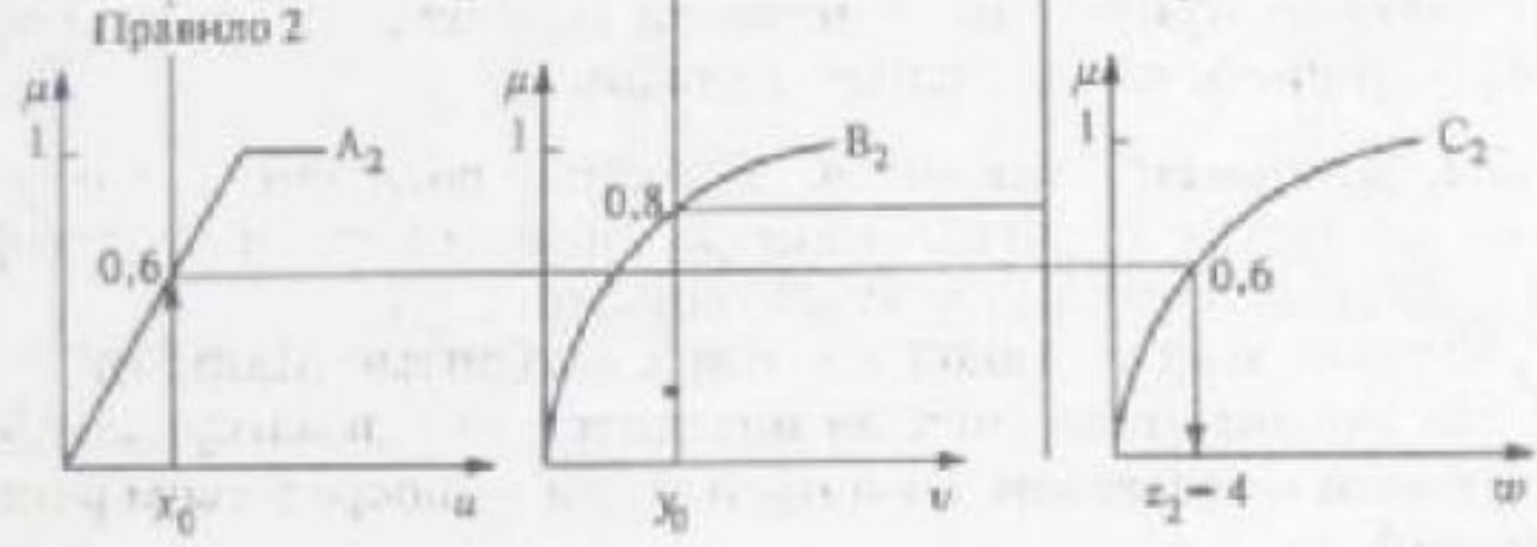
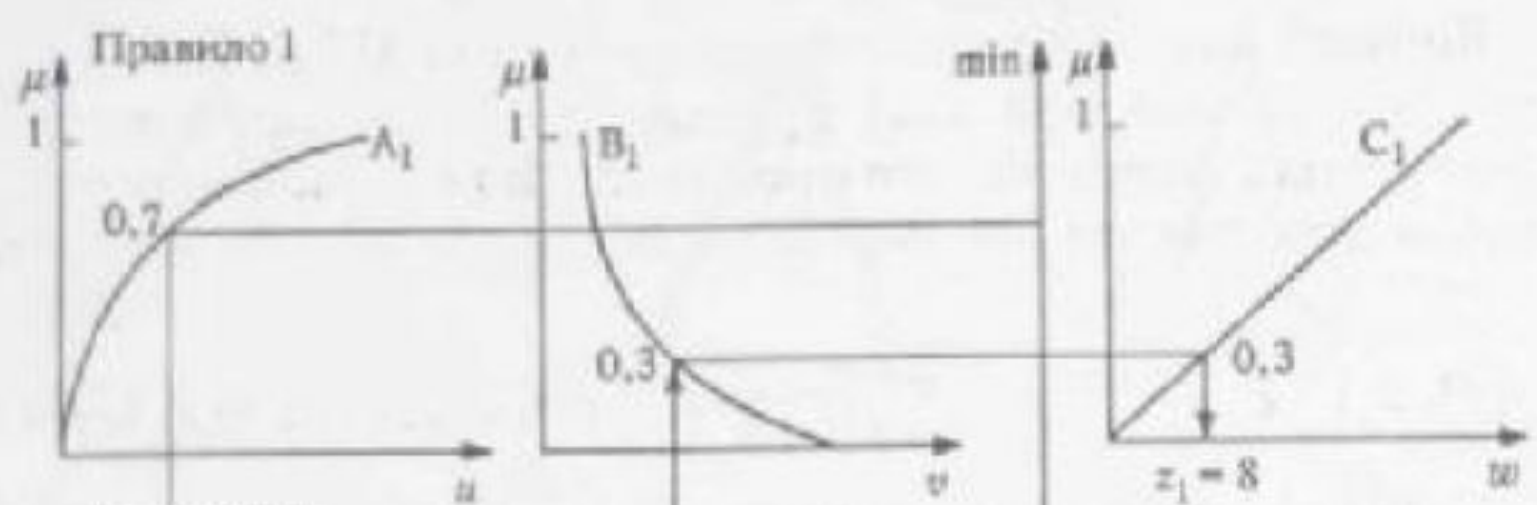
$$\alpha_i = \min_j(A_{ij}(\tilde{x}_j)), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$$

Находятся чёткие значения для каждого из исходных правил

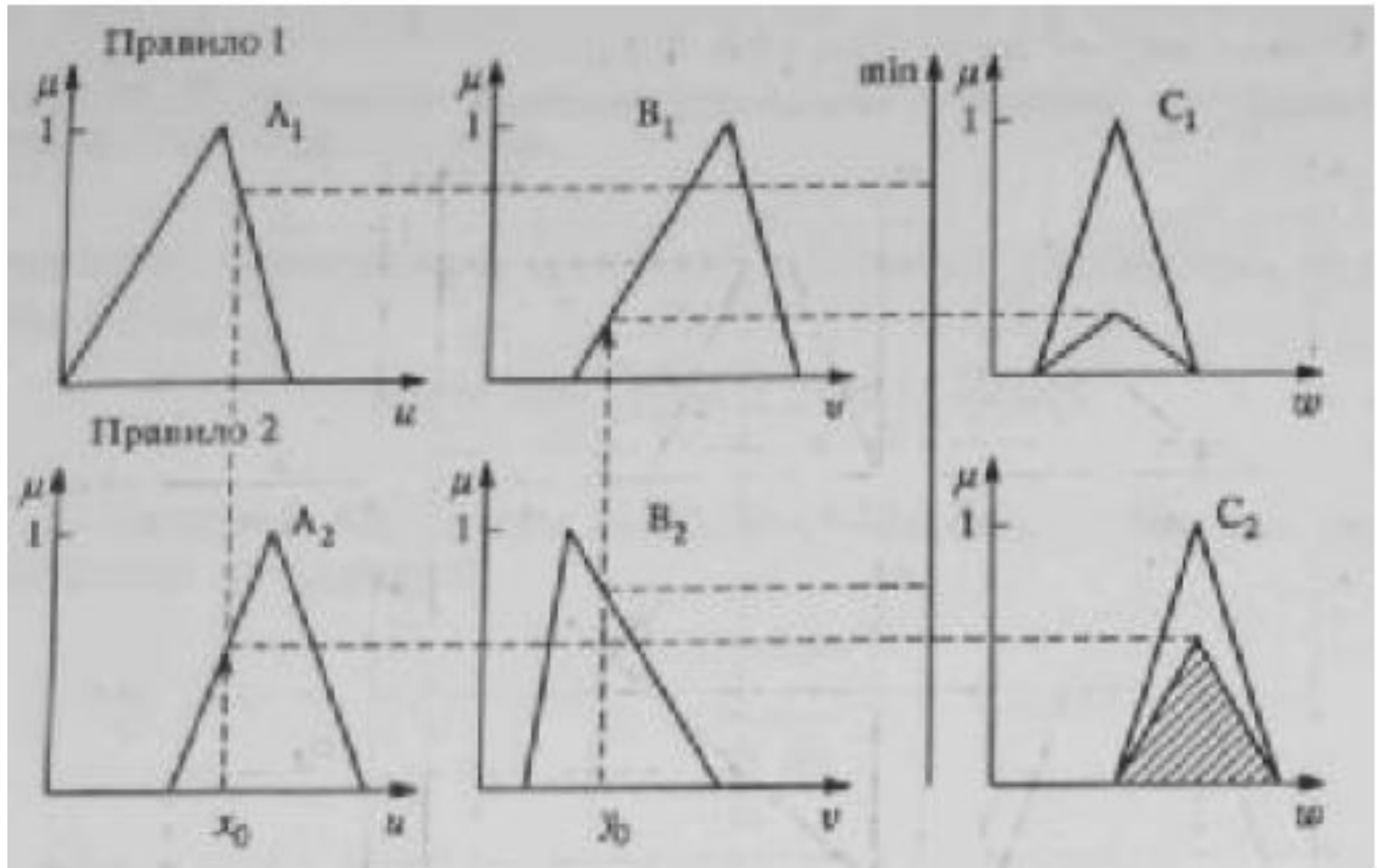
$$\alpha_1 = C_1(z_1), \quad \alpha_2 = C_2(z_2)$$

3. Определяется чёткое значение переменной вывода

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}.$$



Алгоритм Larsen



Fuzzy Approximation Theorem

FAT- Теорема:

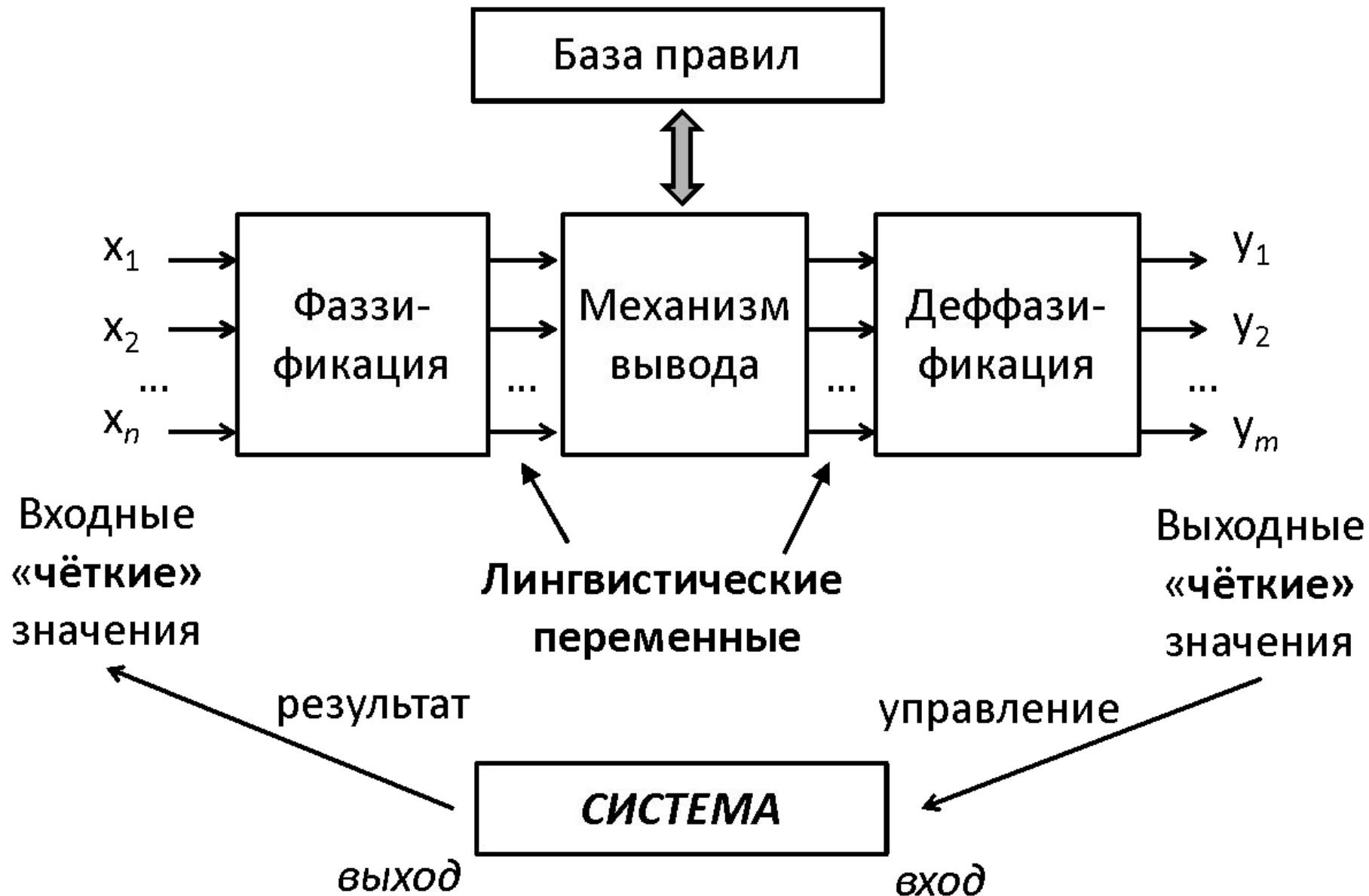
Любая математическая система может быть с необходимой точностью аппроксимирована системой на нечеткой логике.

*Kosko B. Fuzzy systems as universal approximators
// IEEE Transactions on Computers, vol. 43, No. 11,
November 1994. – P. 1329-1333.*



*Бартоломей Коско
(Bart Kosko)*

Схема нечёткого управления



Практическое применение

1970-е – Мамдани и Ассилиан построили первый нечеткий контроллер для лабораторной модели парового двигателя

1982 – в Дании Холмблад и Остергард внедрили нечеткую логику в управление процессом обжига цемента

1987 – фирма Hitachi разработала нечеткую систему управления движением электропоезда в метро города Сендай

1990 – в Японии зарегистрировано около 30 патентов. Серийное производство бытовых приборов с нечетким управлением:

- ✓ камеры с автоматической фокусировкой (Canon)
- ✓ кондиционеры воздуха (Mitsubishi)
- ✓ стиральные машины (Panasonic и Matshushita)
- ✓ автоматическая трансмиссия (Honda и Nissan)
- ✓ нечеткий контроллер лифта (Toshiba)

Практическое применение (продолжение)

1993 – Барт Коско доказал теорему о нечеткой аппроксимации (Fuzzy Approximation Theorem)

1997 – язык нечеткого управления Fuzzy Control Language внесен в Международный стандарт программируемых контроллеров IEC 1131-7

Наши дни – Области применения: медицинская диагностика, техническая диагностика, финансовый менеджмент, управление персоналом, биржевое прогнозирование, распознавание образов, разведка ископаемых, выявление мошенничества, управление компьютерными сетями, управление технологическими процессами, управление транспортом, поиск информации в Интернете, радиосвязь и телевидение. Спектр приложений от бытовых видеокамер, пылесосов и стиральных машин до средств наведения ракет ПВО и управления боевыми вертолетами

Пример

После рабочего дня Вы проголодались и решили зайти поужинать в незнакомое кафе. Предположим, что степень своей удовлетворенности от кафе Вы будете выражать в размере чаевых, которые колеблются в интервале от 0 до 25% от счета заказа. Щедрость чаевых будет зависеть от двух факторов:

□ **качество еды**, которое будет оцениваться, как:

✓ вкусно

✓ невкусно

□ **качество обслуживания**, оцениваемое по шкале:

✓ отличное

✓ среднее

✓ плохое

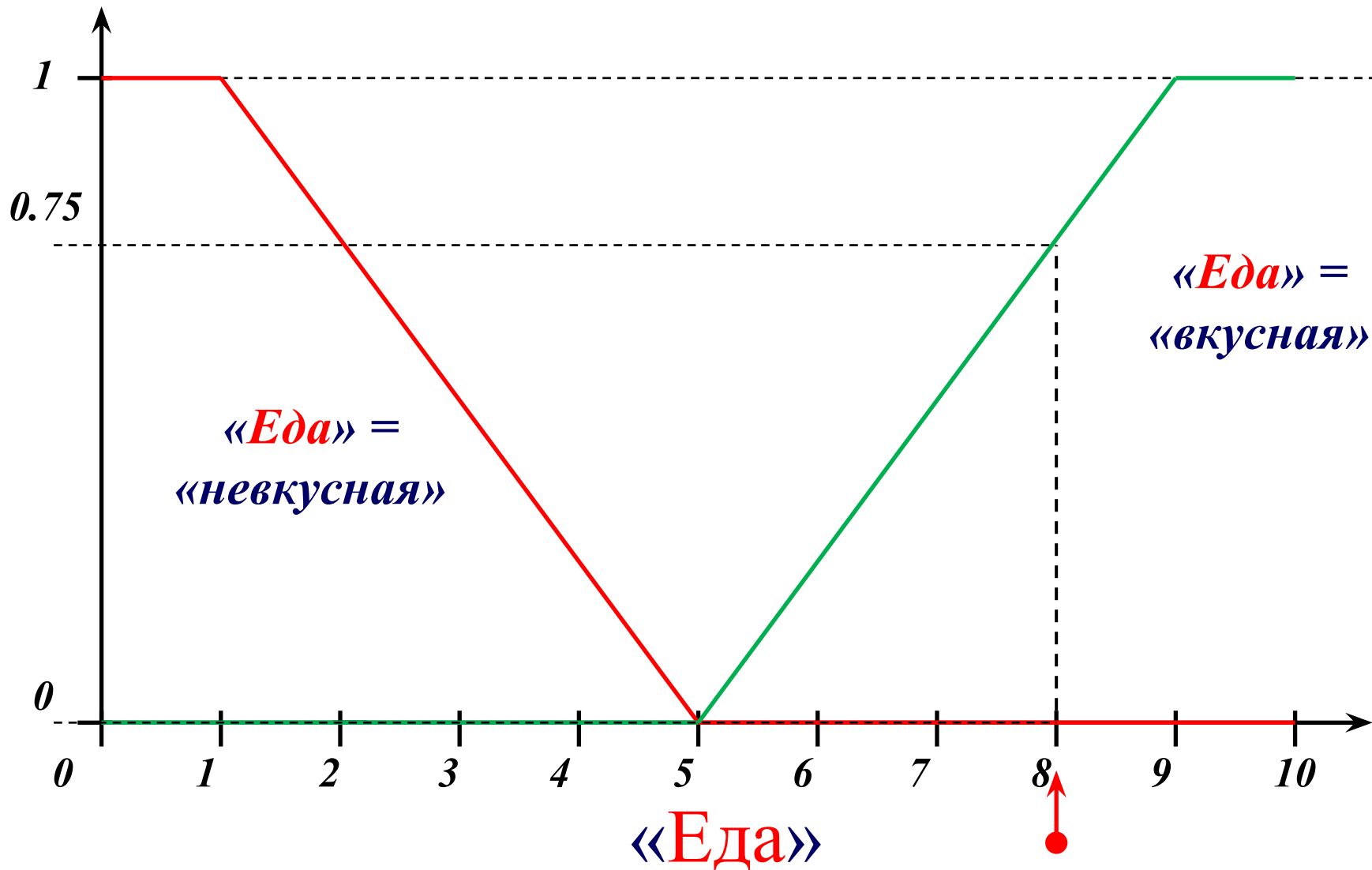
Еда была достаточно хорошей, а вот **сервис** был на низком уровне

База правил

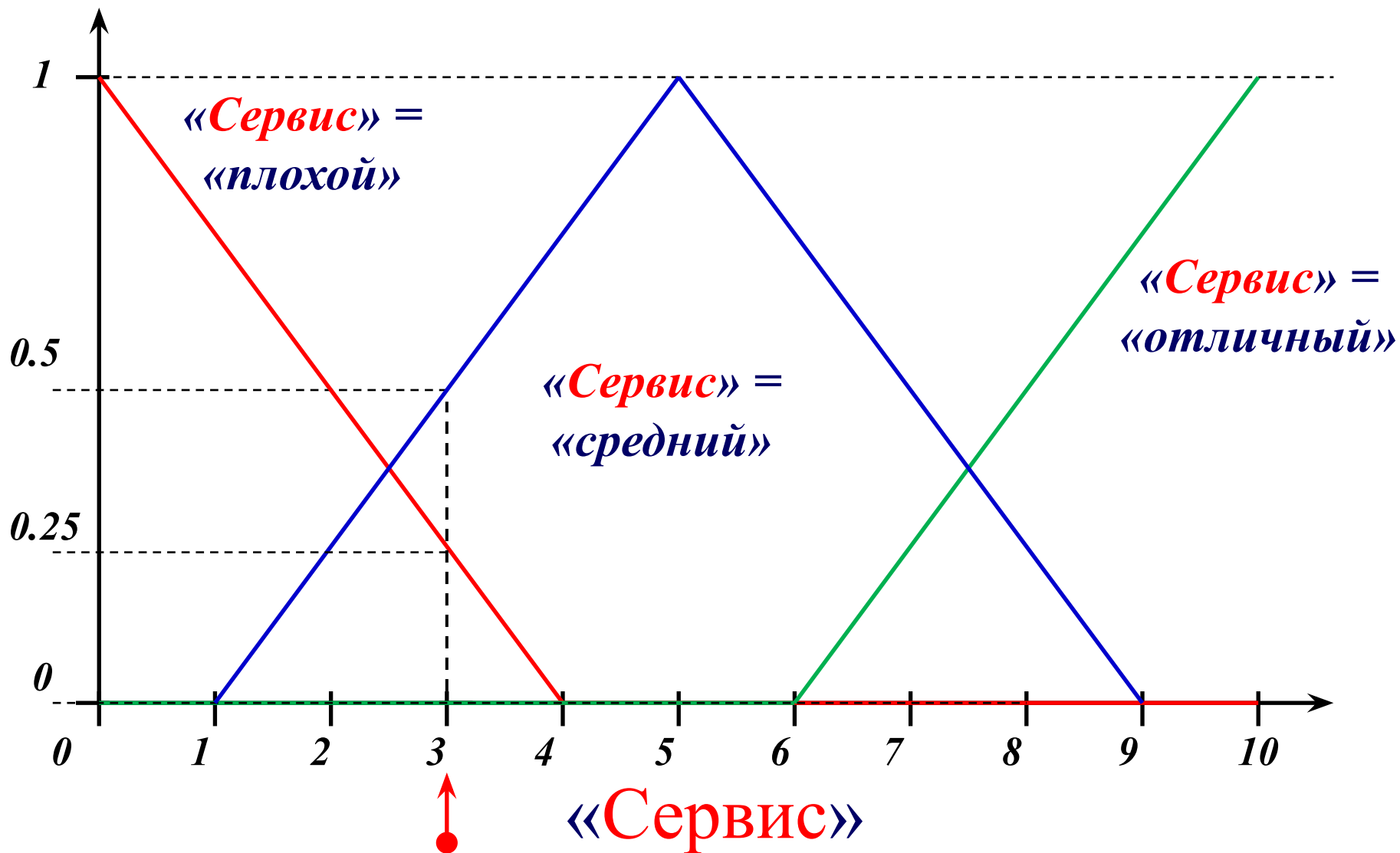
1. Если «Сервис» = «плохой» или «Еда» = «невкусная», то «Чаевые» = «маленькие»
2. Если «Сервис» = «средний», то «Чаевые» = «средние»
3. Если «Сервис» = «отличный» и «Еда» = «вкусная», то «Чаевые» = «высокие»

«Сервис» и «Еда» – входные переменные,
«Чаевые» – выходная переменная

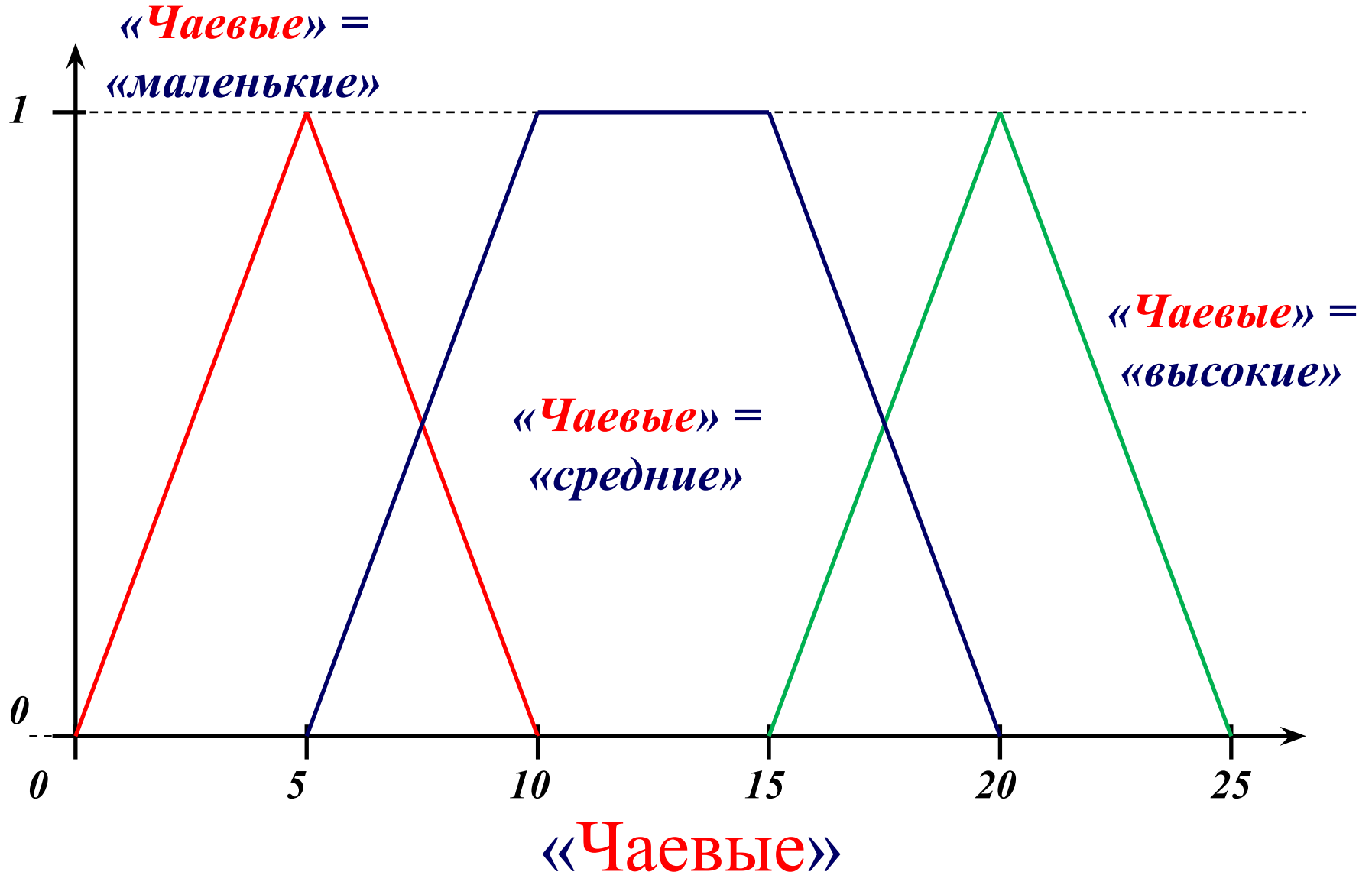
Лингвистическая переменная «Еда»



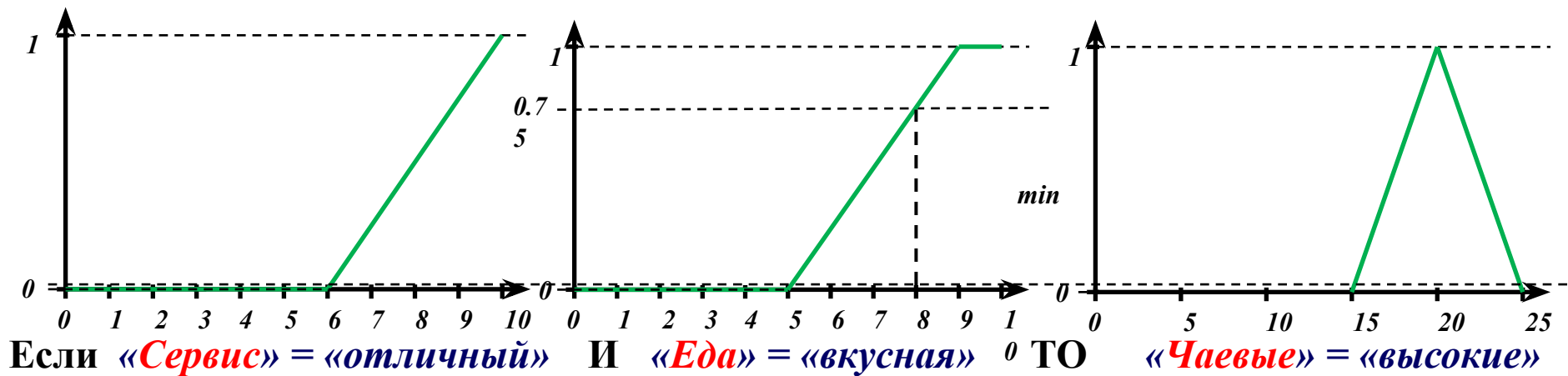
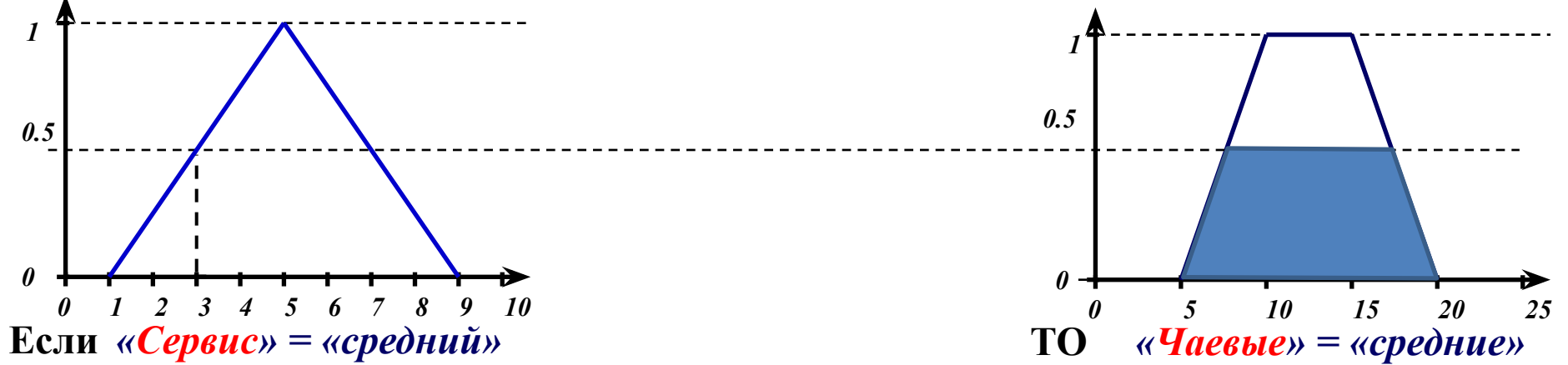
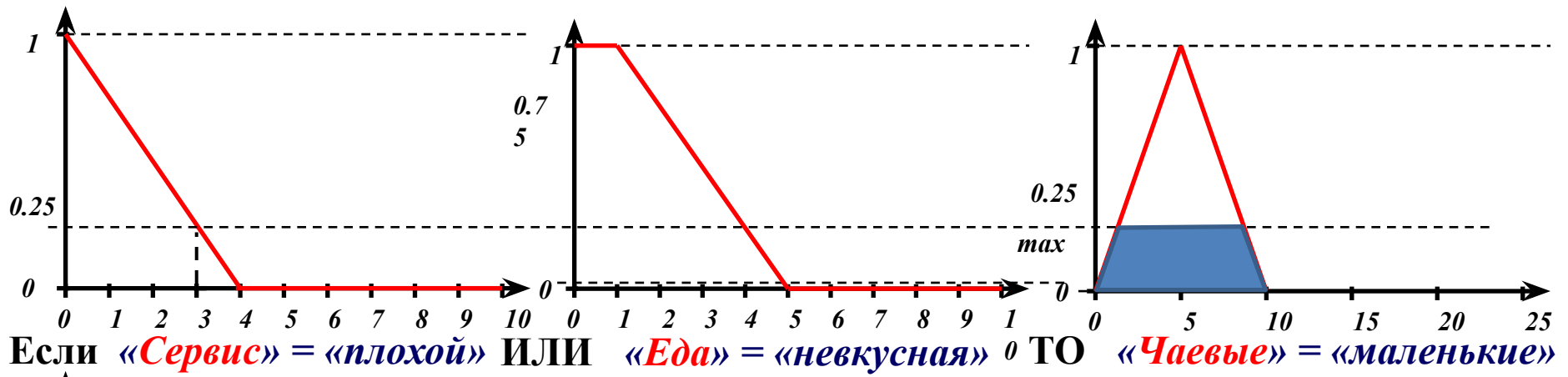
Лингвистическая переменная «Сервис»



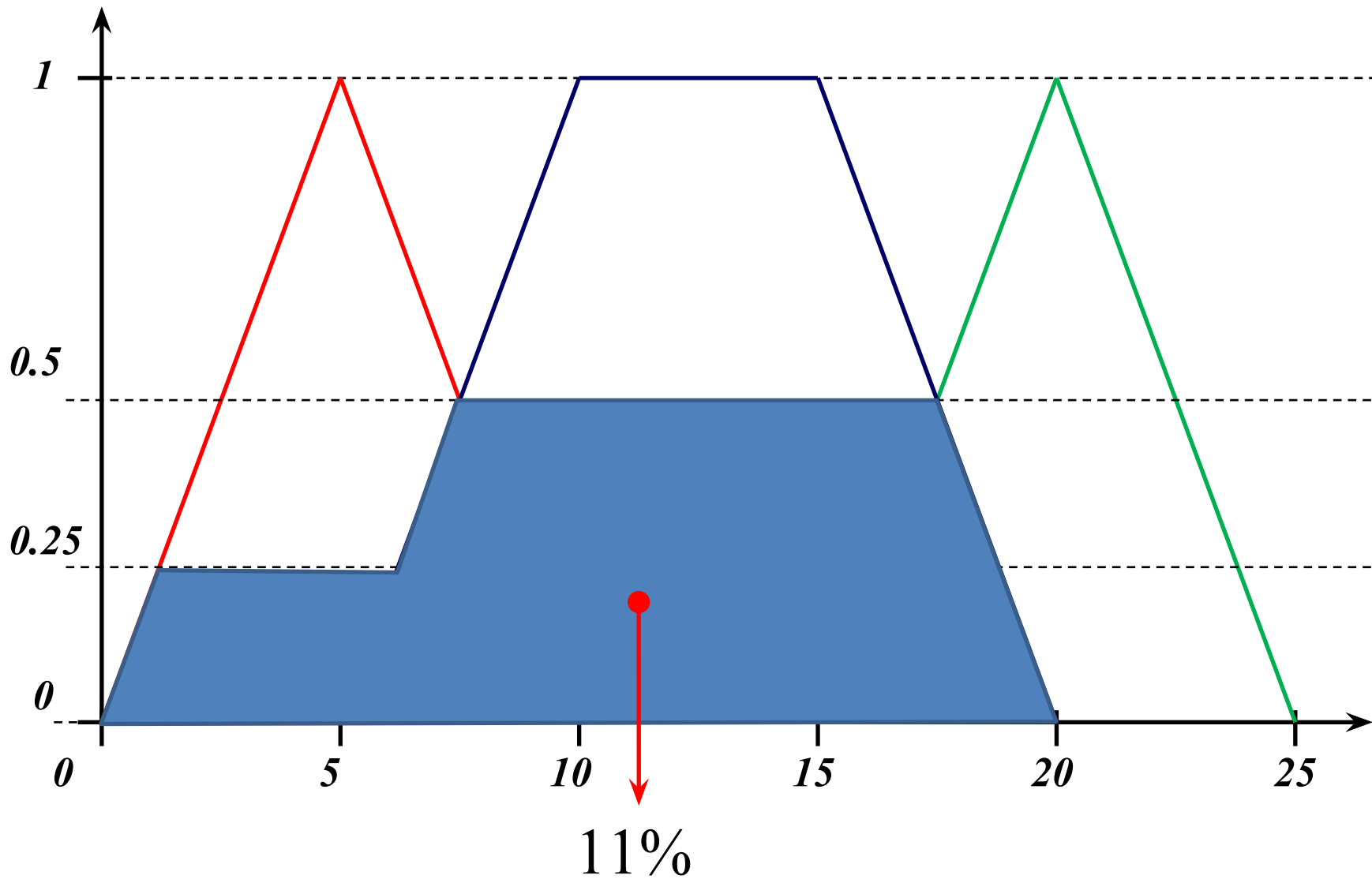
Лингвистическая переменная «Чаевые»



Логический вывод



Дефаззификация



Благодарю за внимание!