Брычкина Мария Сергеевна, к.ф.-м.н., доцент

brychkina.mariia@yandex.ru

с.т. 8-912-003-31-41

Viber, WhatsApp, Telegram

Неклассические логики

1. Нечеткая логика
2. Временная логика
3. Алгоритмическая логика
4. Модальная логика

Нечёткая логика

Предпосылки

Возникла необходимость в аппарате, способном моделировать рассуждения на основе сложных причинно-следственных связей.

«*Почти всегда можно сделать такой же самый продукт без нечеткой логики, но с нечеткой будет быстрее и дешевле*»

Лотфи Заде

«*Бинарная логика – не более чем роковая ошибка античной цивилизации*»

Барт Коско

Нечеткие множества

*В **классической теории множеств** принадлежность объекта x множеству C определяется характеристической функцией вида:*

$$\mu_C = \begin{cases} 1 & | \quad x \in C \\ 0 & | \quad x \notin C \end{cases}$$

*Характеристикой **нечеткого множества** выступает функция принадлежности.*

$\mu_F(x) \in [0;\ 1]$ *– степень принадлежности к нечеткому множеству F, представляющая собой обобщение понятия характеристической функции обычного множества.*

Лотфи Заде (*Lotfi Zadeh*)

Zadeh L.A. *Fuzzy Sets // Information and control. – 1965. Vol.8. – P.338-353.*

Нечеткое множество – это подмножество *A* некоторого четкого множества-носителя, каждому элементу которого сопоставлена степень его принадлежности множеству *A.*

Нечеткое множество полностью определяется заданием ***функции принадлежности*** $\mu_A(x)$, $\mu_A(x) \in [0,1]$.

Пусть $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $M = [0, 1]$; A – нечёткое множество, для которого

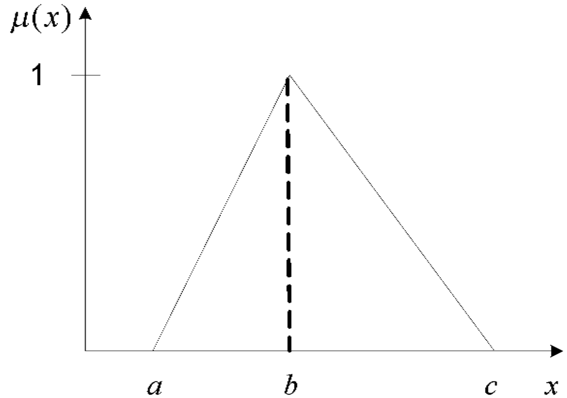
$$\mu_A(x_1) = 0{,}3; \mu_A(x_2) = 0; \mu_A(x_3) = 1; \mu_A(x_4) = 0{,}5; \mu_A(x_5) = 0{,}9.$$

$$A = \{0{,}3 / x_1; 0 / x_2; 1 / x_3; 0{,}5 / x_4; 0{,}9 / x_5\},$$

$$A = \{0{,}3 / x_1 + 0 / x_2 + 1 / x_3 + 0{,}5 / x_4 + 0{,}9 / x_5\}$$

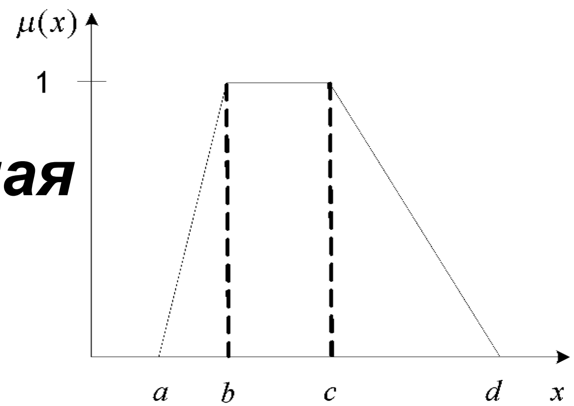
Типовые формы функций принадлежности

Треугольная



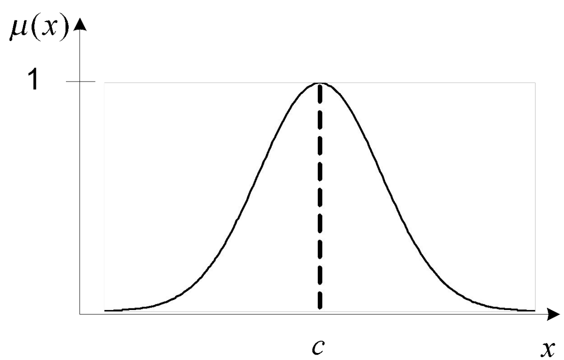
$$\mu(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\\ 1, & b\le x\le c\\ 1-\dfrac{d-x}{d-c}, & c\le x\le d\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Трапецеидальная



$$\mu(x)=\begin{cases}1-\dfrac{b-x}{b-a}, & a\le x\le b\\ 1-\dfrac{x-c}{c-b}, & b\le x\le c\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Гауссова



$$\mu(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2\right]$$

Операции над нечеткими множествами

Объединением *нечетких множеств A и B называется нечеткое множество $A \cup B$ с функцией принадлежности:*

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x),\ \mu_B(x))$$

Пересечением *нечетких множеств A и B в X называется нечеткое множество $A \cap B$ с функцией принадлежности:*

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x),\ \mu_B(x))$$

Дополнением *нечеткого множества A называется нечеткое множество $\overline{A}$ с функцией принадлежности:*

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Разность. $A - B = A \cap \overline{B}$ с функцией принадлежности:

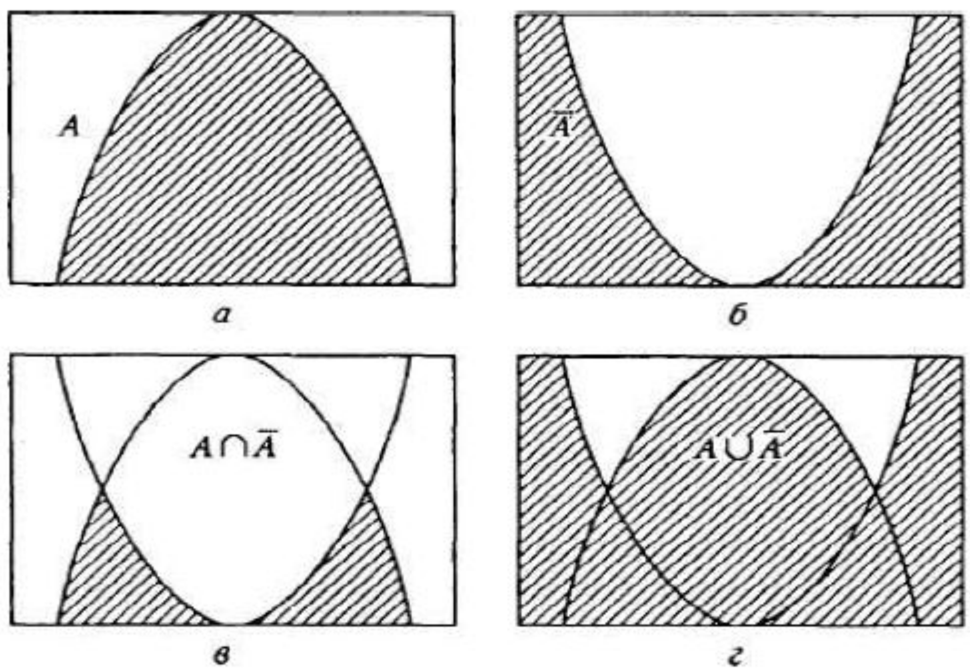
$$\mu_{A-B}(x) = \mu_{A \cap \overline{B}}(x) = \min(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)).$$

Дизъюнктивная сумма

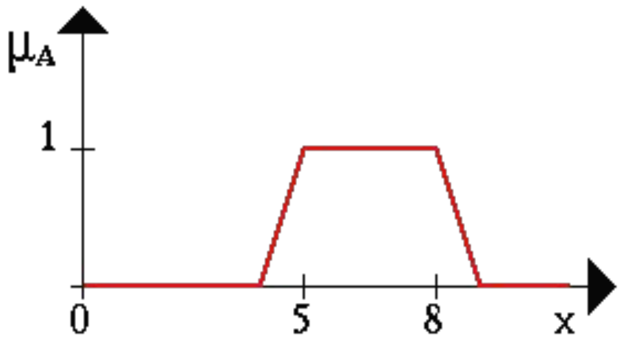
$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

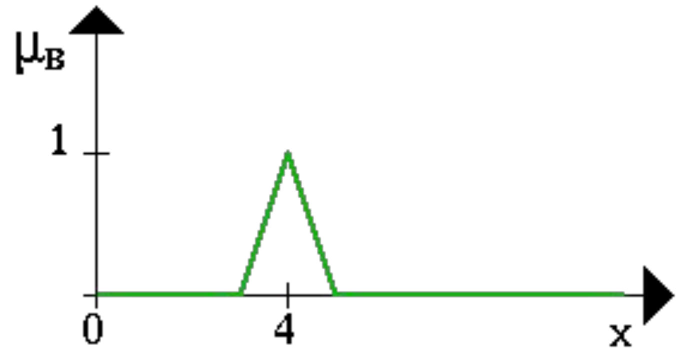
с функцией принадлежности:

$$\mu_{A-B}(x) = \max(\min(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)); \min(1 - \mu_A(x), \mu_B(x))).$$

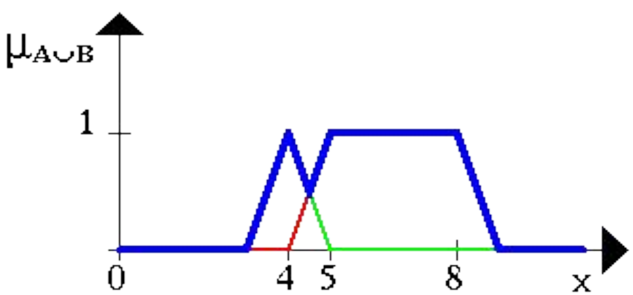


Операции над нечеткими множествами (пример)



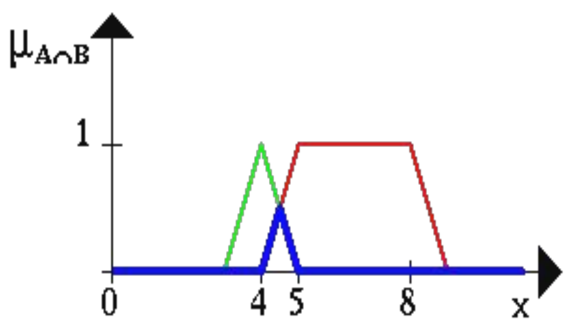


Исходные множества



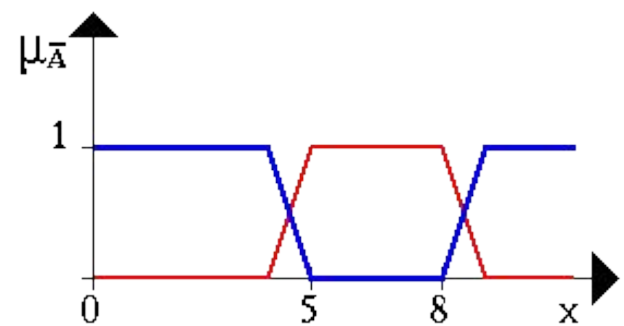
объединение

$\mu_C(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$



пересечение

$\mu_C(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$



отрицание

$\mu_C(x) = 1 - \mu_A(x)$

Алгебраические операции

Алгебраическое произведение A и B обозначается $A \cdot B$

$\forall x \in E \;\; \mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x)$.

Алгебраическая сумма этих множеств обозначается $A \hat{+} B$

$\forall x \in E \;\; \mu_{A \hat{+} B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)$.

На основе операции алгебраического произведения определяется операция *возведения в степень α* нечёткого множества *A,* где *α* – положительное число

$$\mu_A^\alpha = \mu_A^\alpha(x).$$

Частные случаи

$\mathrm{CON}(A) = A^2$ – операция *концентрирования (уплотнения);*

$\mathrm{DIL}(A) = A^{0.5}$ – операция *растяжения,*

Нечёткая переменная

Нечёткая переменная = наименование переменной + область определения *A* + функция принадлежности μ.

Нечёткая переменная – именованное нечеткое множество: например, нечеткая переменная «***высокий рост***».

Нечеткая переменная описывается набором (N, X, F), где

N – это название переменной,

X – универсальное множество,

F – нечеткое множество на X, представляющее собой нечеткое ограничение на значения x нечеткой переменной N.

Лингвистическая переменная

Лингвистическая переменная (N, T, X, G, P) состоит из:

N – название переменной;

T – множество значений (базовое терм-множество), его элементы представляют собой названия нечетких переменных;

X – универсальное множество;

G – синтаксическое правило, по которому генерируются новые термы с применением слов естественного или формального языка;

P – семантическое правило каждому значению лингвистической переменной ставит в соответствие нечеткое подмножество множества X.

Примеры лингвистических переменных

Бизнес = {«малый», «средний»}
Температура в комнате = {«холодно», «комфортно», «жарко»}
Процентная ставка = {«высокая», «низкая»}

Лингвистическая переменная

Термы – наименования нечетких переменных

Лингвистическая переменная «температура в комнате»

N = «температура в комнате» – это название переменной;

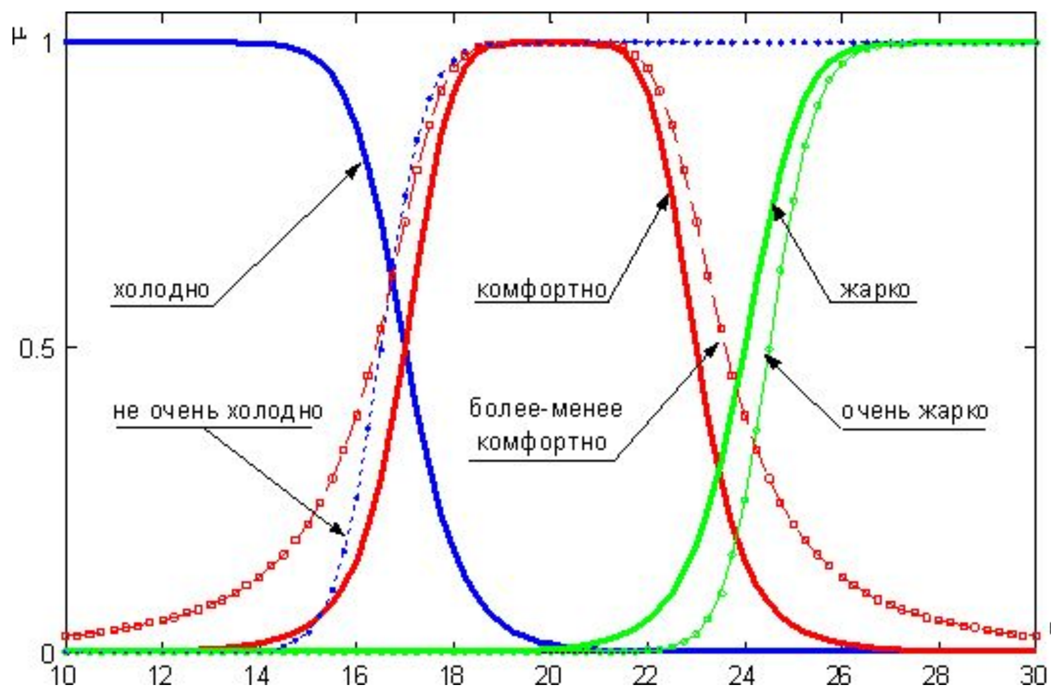
T = {«холодно», «комфортно», «жарко»} – базовое терм-множество;

X = [10, 35] – универсальное множество;

G – синтаксическое правило, порождающее новые термы с использованием квантификаторов "и","или", "не", "очень", "более-менее";

P – семантическое правило, ставящее в соответствие каждому новому терму функцию принадлежности (т.е. ***нечеткое множество***) по правилам: если термы А и В имели функции принадлежности $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$ соответственно, то новые термы будут иметь функции принадлежности:

Квантификатор	Функция принадлежности:
не t	$1 - \mu_t(u)$
очень t	$(\mu_t(u))^2$
более-менее t	$\sqrt{\mu_t(u)}$
А и В	max(?$_A$(*x*), ?$_B$(*x*))
А или В	min(?$_A$(*x*), ?$_B$(*x*))



Нечёткие отношения

Пусть $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ – прямое произведение универсальных множеств и M – некоторое множество принадлежностей (например, M=[0,1]). Нечёткое n-арное отношение определяется как нечёткое подмножество R на E, принимающее свои значения в M. В случае n=2 и M=[0,1] нечётким отношением R между множествами $X = E_1$ и $Y = E_2$ будет называться функция $R:(X,Y) \to [0,1]$, которая ставит в соответствие каждой паре элементов $(x,y) \in X \times Y$ величину $\mu_R(x,y) \in [0,1]$.

Операции над нечёткими отношениями

Объединение двух отношений R_1 *и* R_2. Объединение двух отношений обозначается $R_1 \cup R_2$ и определяется выражением

$$\mu_{R_1 \cup R_2}(x,y) = \mu_{R_1}(x,y) \vee \mu_{R_2}(x,y).$$

Пересечение двух отношений. Пересечение двух отношений R_1 и R_2 обозначается $R_1 \cap R_2$ и определяется выражением

$$\mu_{R_1 \cap R_2}(x,y) = \mu_{R_1}(x,y) \wedge \mu_{R_2}(x,y).$$

Алгебраическое произведение двух отношений. Алгебраическое произведение двух отношений R_1 и R_2 обозначается $R_1 \cdot R_2$ и определяется выражением

$$\mu_{R_1 \cdot R_2}(x,y) = \mu_{R_1}(x,y) \cdot \mu_{R_2}(x,y).$$

Алгебраическая сумма двух отношений. Алгебраическая сумма двух отношений R_1 и R_2 обозначается $R_1 \hat{+} R_2$ и определяется выражением

$$\mu_{R_1 \hat{+} R_2}(x,y) = \mu_{R_1}(x,y) + \mu_{R_2}(x,y) - \mu_{R_1}(x,y) \cdot \mu_{R_2}(x,y).$$

Композиция (свёртка) двух нечётких отношений. Пусть R_1 – нечёткое отношение $R_1:(X\times Y)\to[0,1]$ между X и Y, и R_2 – нечёткое отношение $R_2:(Y\times Z)\to[0,1]$ между Y и Z. Нечёткое отношение между X и Z, обозначаемое $R_2\circ R_1$, определённое через R_1 и R_2 выражением

$$\mu_{R_1\circ R_2}(x,z)=\bigvee_y(\mu_{R_1}(x,y)\wedge\mu_{R_2}(y,z)),$$

называется (max-min)-композицией ((max-min)-свёрткой) отношений R_1 и R_2.

Нечеткие правила

Нечеткие знания формулируются в виде ***нечетких продукционных правил*** вывода в форме *«если-то»* (***if-then rule***):

$$\textbf{ЕСЛИ } x \text{ это } A, \textbf{ ТО } y \text{ это } B$$

где A и B – это лингвистические переменные и соответствующие им функции принадлежности $\mu_A(x), \mu_B(x)$.

Левая часть правила называется ***условием***, или ***предпосылкой***, правая часть – ***следствием***, или ***заключением***.

Для n переменных правило R_i примет вид нечеткого рассуждения:

$$R_i\text{: } \textbf{ЕСЛИ } (x_1 \text{ это } A_{i1}) \ldots \textbf{ И } \ldots (x_n \text{ это } A_{in}), \textbf{ ТО } (y \text{ это } B_i).$$

Уровни представления нечетких правил:

- ✔*уровень поверхностной структуры* – правила сформулированы только в лингвистической форме;
- ✔*уровень глубинной структуры* – поверхностная структура правила вместе со значениями функций принадлежности для каждого терма лингвистической переменной.

Модели нечеткого вывода

База знаний нечеткой системы = **правила** + **термы** + **функции принадлежности термов**

Пусть в базе правил системы нечеткого вывода, имеется m правил вида:

R_1: **ЕСЛИ** (x_1 это A_{11}) … **И** … (x_n это A_{1n}), **ТО** (y это B_1)

$\cdots \qquad \cdots$

R_i: **ЕСЛИ** (x_1 это A_{i1}) … **И** … (x_n это A_{in}), **ТО** (y это B_i)

$\cdots \qquad \cdots$

R_m: **ЕСЛИ** (x_1 это A_{m1}) … **И** … (x_n это A_{mn}), **ТО** (y это B_m)

где

$x_j,\ j=\overline{1,n}$ – имена входных переменных;

y – имя выходной переменной;

$A_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$ – определенные функции принадлежности.

Результатом нечеткого вывода является четкое значение переменной $\tilde{y} \in Y$ на основе заданных четких значений $\tilde{x}_j \in X,\ j=\overline{1,n}$.

Этапы нечёткого логического вывода

1. *Формирование базы правил*

2. *Фаззификация входных параметров* – введение нечеткости – процесс нахождения функции принадлежности нечетких множеств. Устанавливается соответствие между численным значением входной переменной системы нечеткого вывода и значением функции принадлежности соответствующей ей лингвистической переменной.

3. *Агрегирование* – определение степени истинности каждого из подзаключений по каждому из правил

4. *Активизация подусловий в нечетких правилах* – Нечеткие подмножества, назначенные для каждой выходной переменной, объединяются вместе

5. *Дефаззификация* – определение четких значений выходных переменных

Правило Мамдани (Mamdani)

Импликаци
и

$$A \to B$$

соответствует нечёткое отношение с
функцией
принадлежности:

$$\mu_{A \to B}(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

Нечеткий вывод по способу Мамдани (Mamdani)

1. Определяются степени истинности, т.е. значения функций принадлежности для левых частей каждого правила (предпосылок):

$$A_{ij}(\tilde{x}_j),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$$

2. Определяются уровни «отсечения» для левой части каждого из правил: $$\alpha_i = \min_j(A_{ij}(\tilde{x}_j)),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$$

   Находятся «усеченные» функции принадлежности

$$B_i'(y) = \min_i(\alpha_i,\ B_i(y)),\ i=\overline{1,m}$$

3. Композиция полученных усеченных функций

$$\mu(y) = \max_i(B_i'(y)), i=\overline{1,m}$$

4. Приведение к четкости, центроидный метод: $$\tilde{y} = \frac{\int_y yB(y)}{\int_y B(y)}$$

Первый нечеткий контроллер для управления паровым двигателем

E.H. Mamdani, S. Assilian. *An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. 1975.*

$$c = \frac{\int\limits_{\underline{x}}^{\overline{x}} x\mu_A(x)dx}{\int\limits_{\underline{x}}^{\overline{x}} \mu_A(x)dx}$$

Метод центра тяжести

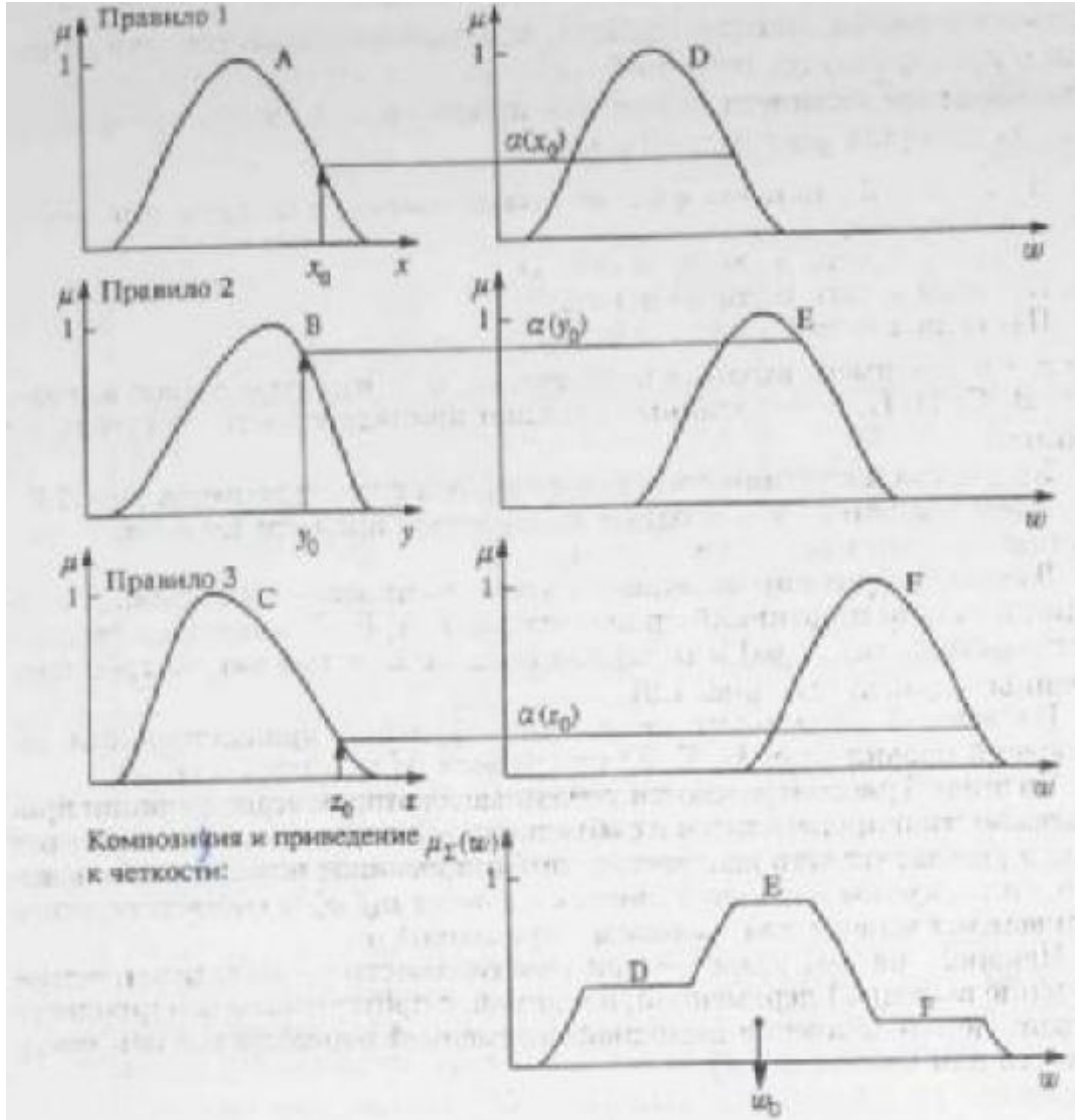
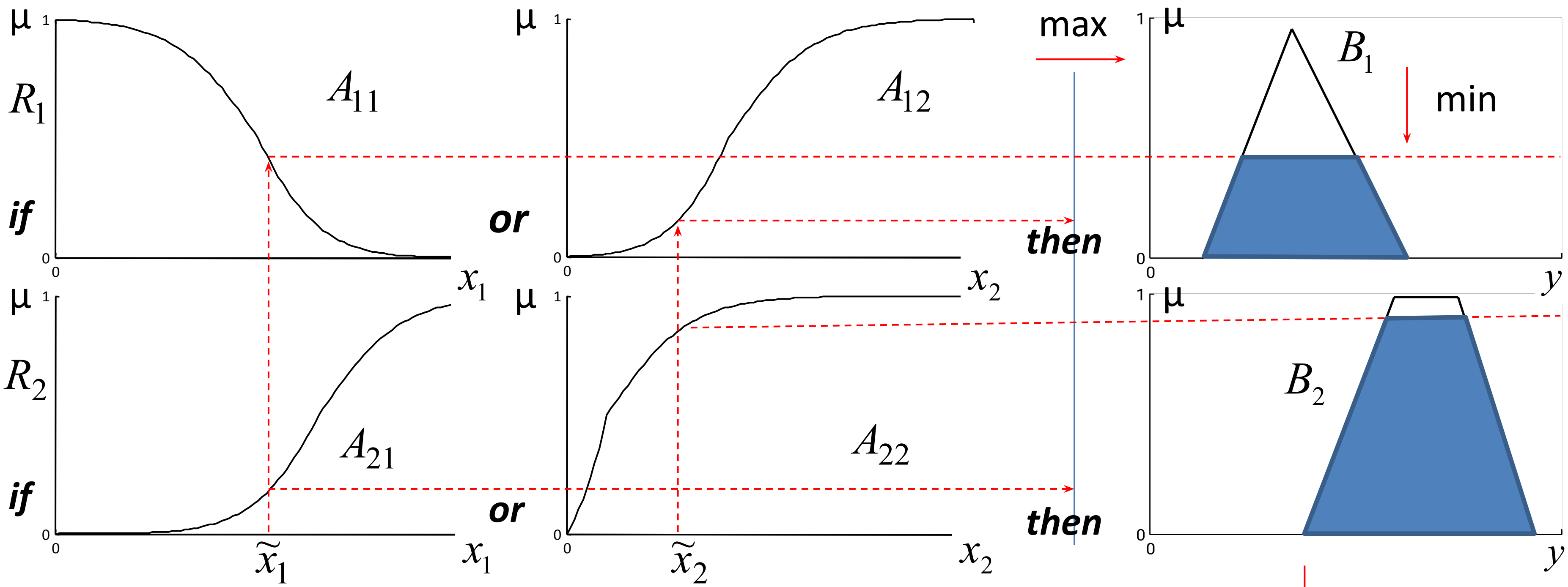
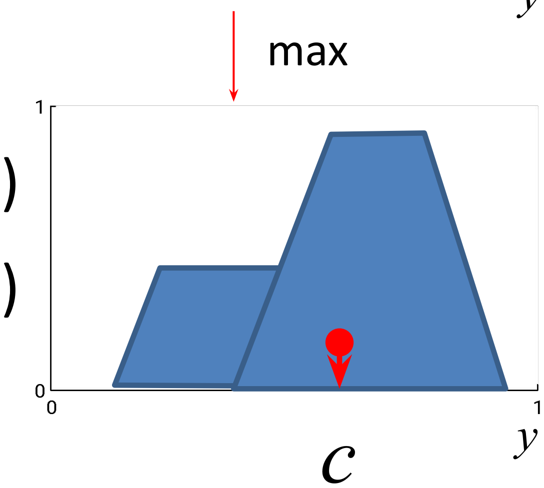


Схема нечёткого вывода по Мамдани





Если (x_1 это A_{11}) ИЛИ (x_2 это A_{12}) ТО (у это B_1)

Если (x_1 это A_{21}) ИЛИ (x_2 это A_{22}) ТО (у это B_2)

Нечеткий вывод по Сугено (Sugeno)

Набор правил следующего вида:

R_i: **ЕСЛИ** (x_1 это A_{i1}) … **И** … (x_n это A_{in}), **ТО** $y = f$ (**X**),

f(**X**) – некоторая четкая функция, полином первого порядка:

$$y = f(\mathbf{X}) = p_0 + \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

1. Определяются степени истинности.
2. Определяются уровни «отсечения» предпосылок правил α_i и рассчитываются индивидуальные выходы правил R_i, $i = \overline{1, m}$

$$y_i^* = p_{i0} + \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j$$

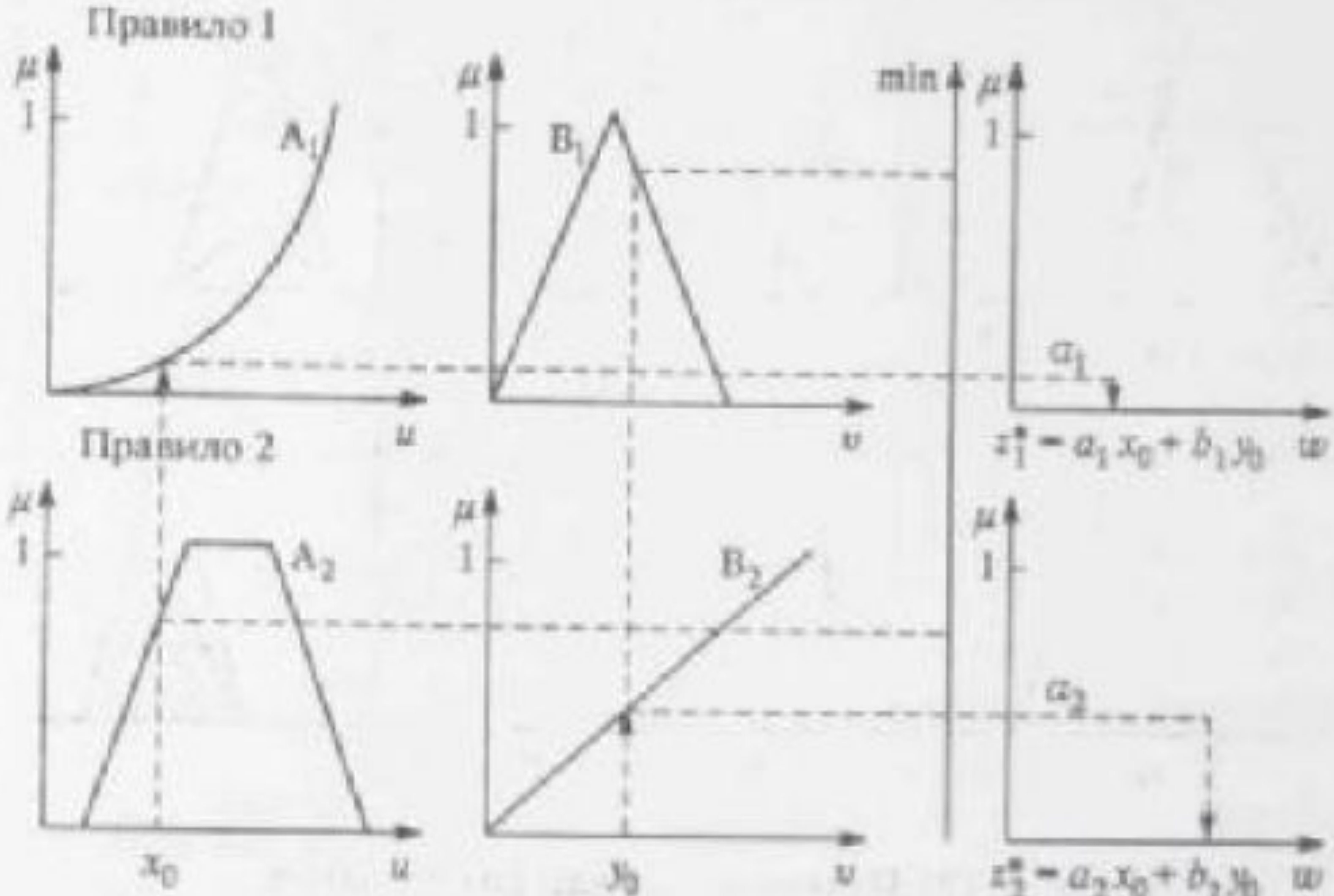
где p_{i0}, $[p_{ij}]$ – коэффициенты полинома или цифровые веса. В адаптивных системах подбираются в процессе обучения.

3. Итоговая четкая величина вычисляется как средневзвешенное:

$$\tilde{y} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i^*}{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i}$$

Первый нечеткий контроллер в Японии для очистки воды

M.Sugeno and T. Takagi . *A new approach to design of fuzzy controller. 1983.*



Правило 1
μ
1
A1
u
μ
1
B1
v
min
μ
1
α1
z*1 = a1x0 + b1y0
w
Правило 2
μ
1
A2
x0
u
μ
1
B2
y0
v
μ
1
α2
z*2 = a2x0 + b2y0
w

Нечеткий вывод по способу Tsukamoto

1. Определяются степени истинности, т.е. значения функций принадлежности для левых частей каждого правила (предпосылок):

$$A_{ij}(\tilde{x}_j),\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$$

2. Определяются уровни «отсечения» для левой части каждого из правил:

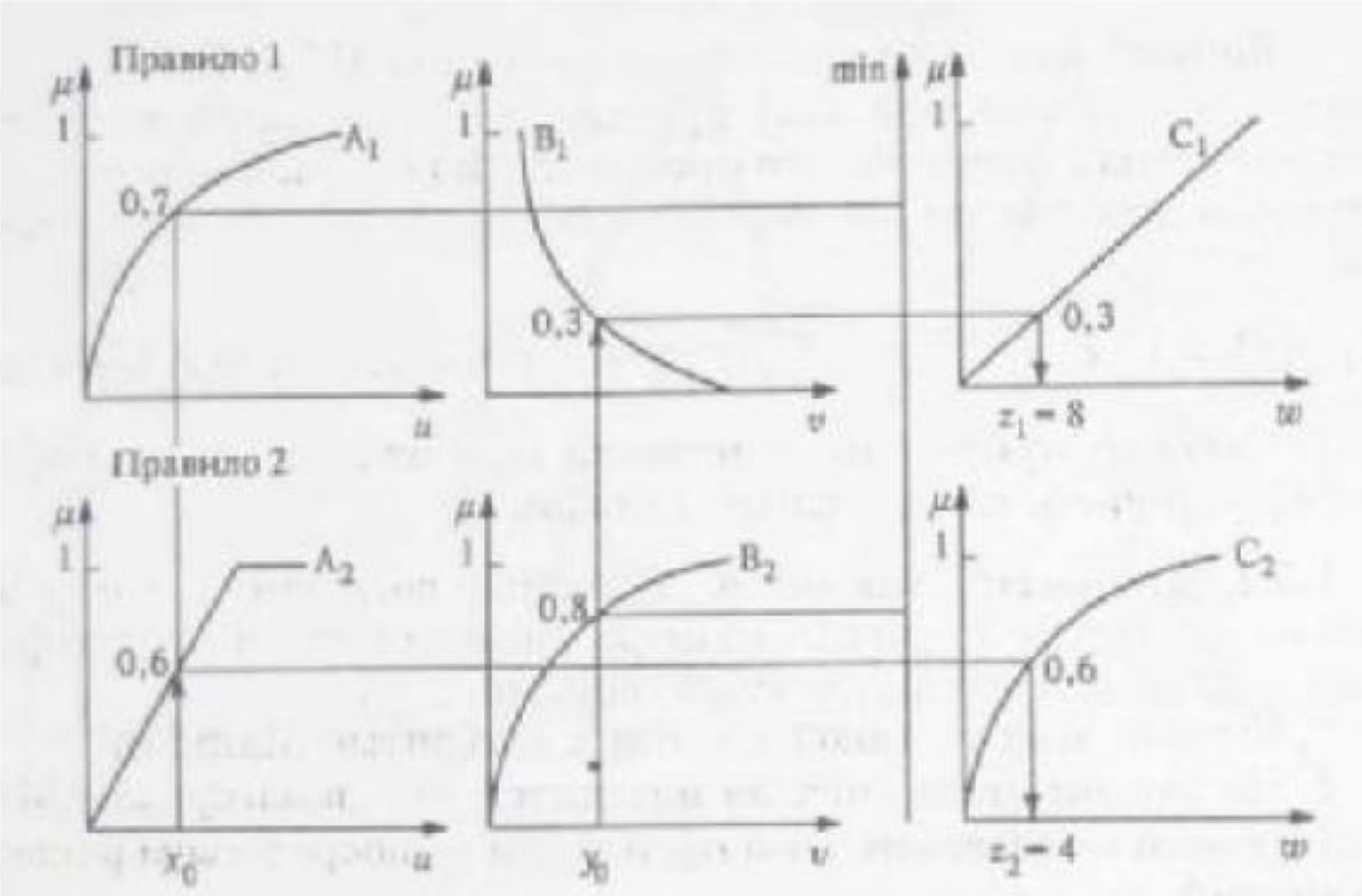
$$\alpha_i = \min_j (A_{ij}(\tilde{x}_j)),\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$$

Находятся чёткие значения для каждого из исходных правил

$$\alpha_1 = \mathrm{C}_1(z_1),\quad \alpha_2 = \mathrm{C}_2(z_2)$$

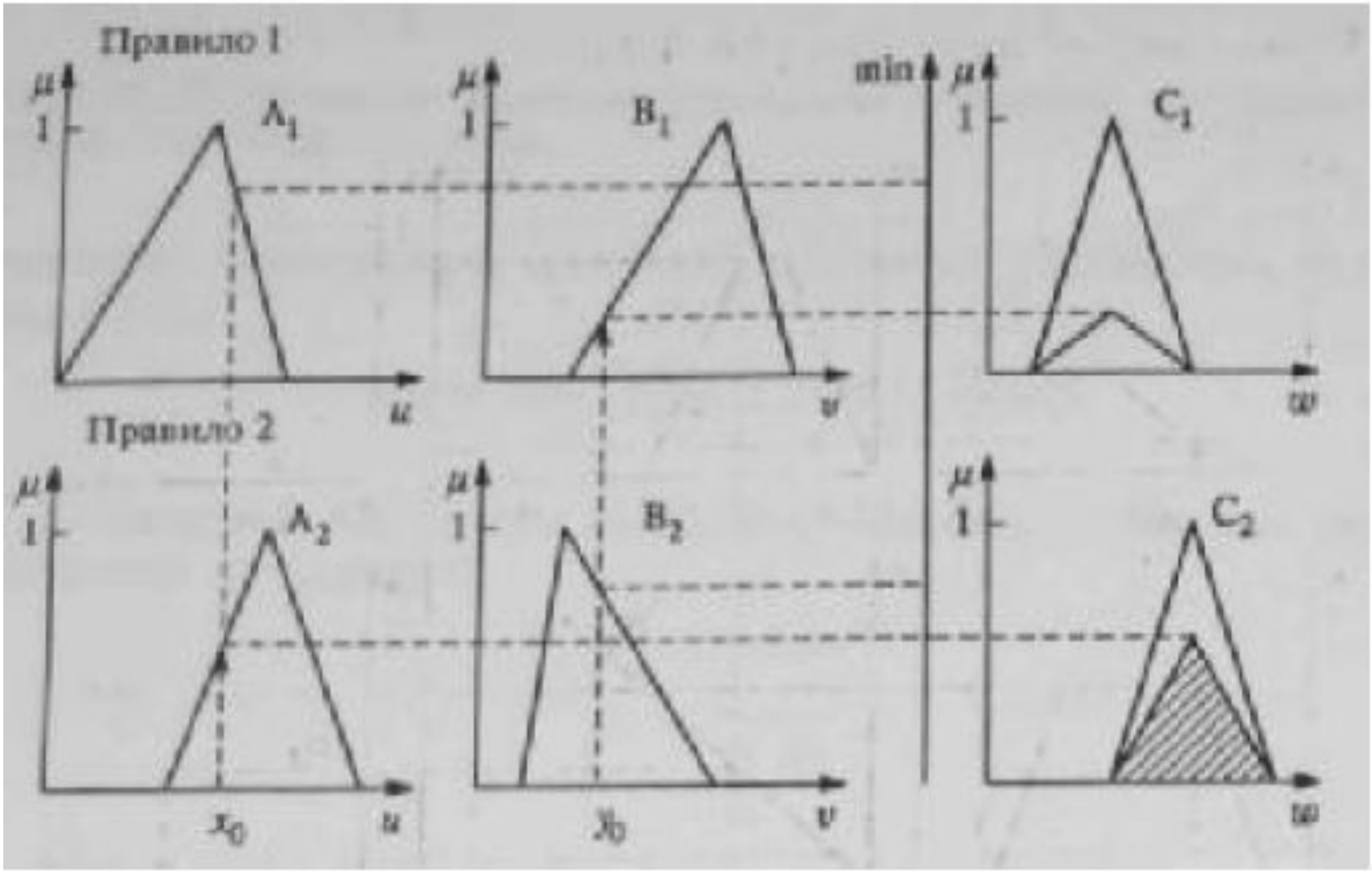
3. Определяется чёткое значение переменной вывода

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}.$$



Правило 1
Правило 2
min
A1
B1
C1
A2
B2
C2
0,7
0,3
0,3
0,8
0,6
0,6
z1 = 8
z2 = 4
x0
x0

Алгоритм Larsen



Fuzzy Approximation Theorem

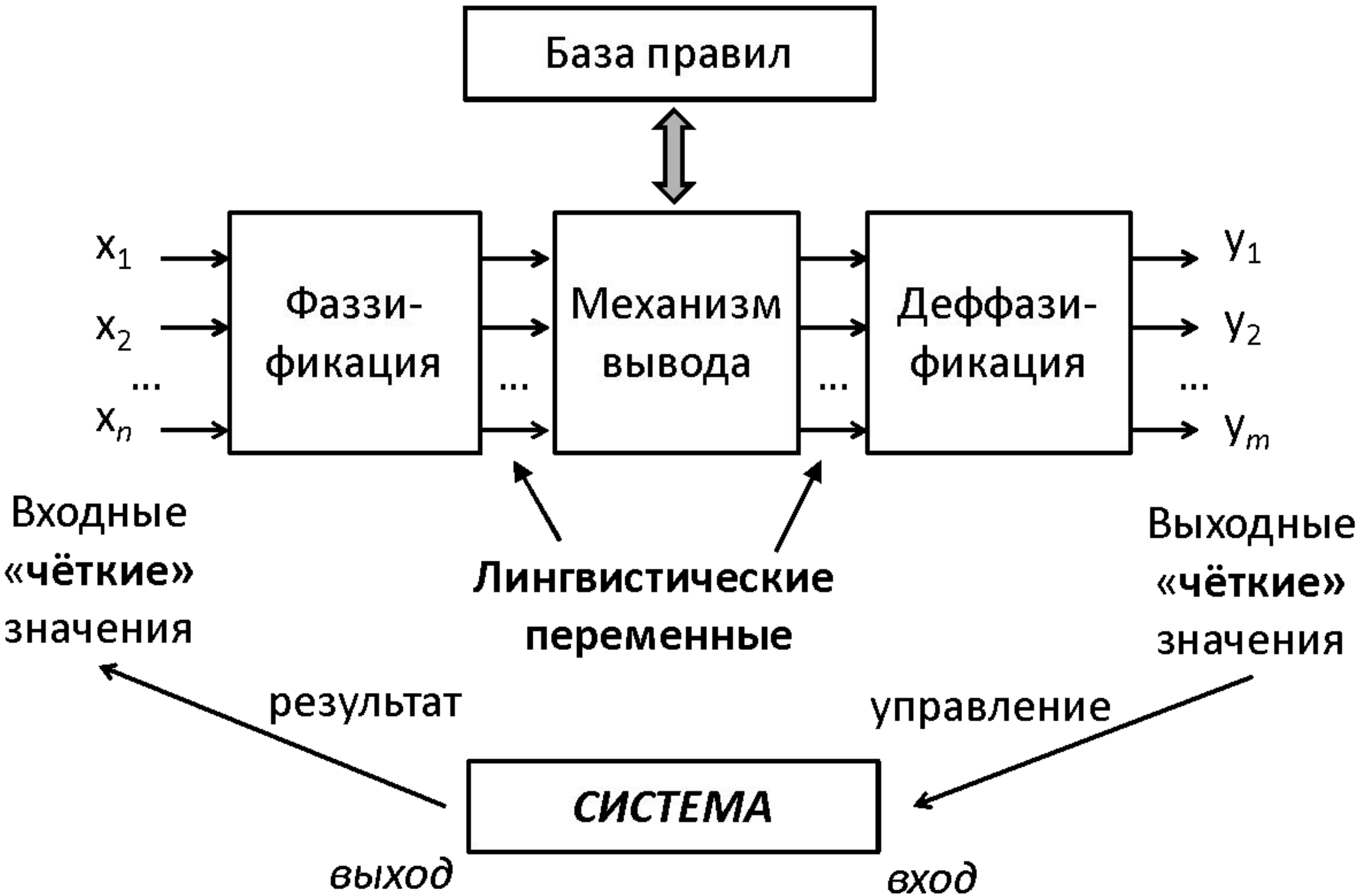
FAT- Теорема:

Любая математическая система может быть с необходимой точностью аппроксимирована системой на нечеткой логике.

Kosko B. *Fuzzy systems as universal approximators // IEEE Transactions on Computers, vol. 43, No. 11, November 1994. – P. 1329-1333.*

Бартоломей Коско
(Bart Kosko)

Схема нечёткого управления



Практическое применение

1970-е – Мамдани и Ассилиан построили первый нечеткий контроллер для лабораторной модели парового двигателя

1982 – в Дании Холмблад и Остергард внедрили нечеткую логику в управление процессом обжига цемента

1987 – фирма Hitachi разработала нечеткую систему управления движением электропоезда в метро города Сендай

1990 – в Японии зарегистрировано около 30 патентов. Серийное производство бытовых приборов с нечетким управлением:

- ✔ камеры с автоматической фокусировкой (Canon)
- ✔ кондиционеры воздуха (Mitsubishi)
- ✔ стиральные машины (Panasonic и Matshushita)
- ✔ автоматическая трансмиссия (Honda и Nissan)
- ✔ нечеткий контроллер лифта (Toshiba)

Практическое применение (продолжение)

1993 – Барт Коско доказал теорему о нечеткой аппроксимации (Fuzzy Approximation Theorem)

1997 – язык нечеткого управления Fuzzy Control Language внесен в Международный стандарт программируемых контроллеров IEC 1131-7

Наши дни – Области применения: медицинская диагностика, техническая диагностика, финансовый менеджмент, управление персоналом, биржевое прогнозирование, распознавание образов, разведка ископаемых, выявление мошенничества, управление компьютерными сетями, управление технологическими процессами, управление транспортом, поиск информации в Интернете, радиосвязь и телевидение. Спектр приложений от бытовых видеокамер, пылесосов и стиральных машин до средств наведения ракет ПВО и управления боевыми вертолетами

Пример

После рабочего дня Вы проголодались и решили зайти поужинать в незнакомое кафе. Предположим, что степень своей удовлетворенности от кафе Вы будете выражать в размере чаевых, которые колеблются в интервале от 0 до 25% от счета заказа. Щедрость чаевых будет зависеть от двух факторов:

- качество еды, которое будет оцениваться, как:
  - ✔ вкусно
  - ✔ невкусно
- качество обслуживания, оцениваемое по шкале:
  - ✔ отличное
  - ✔ среднее
  - ✔ плохое

Еда была достаточно хорошей, а вот сервис был на низком уровне

База правил

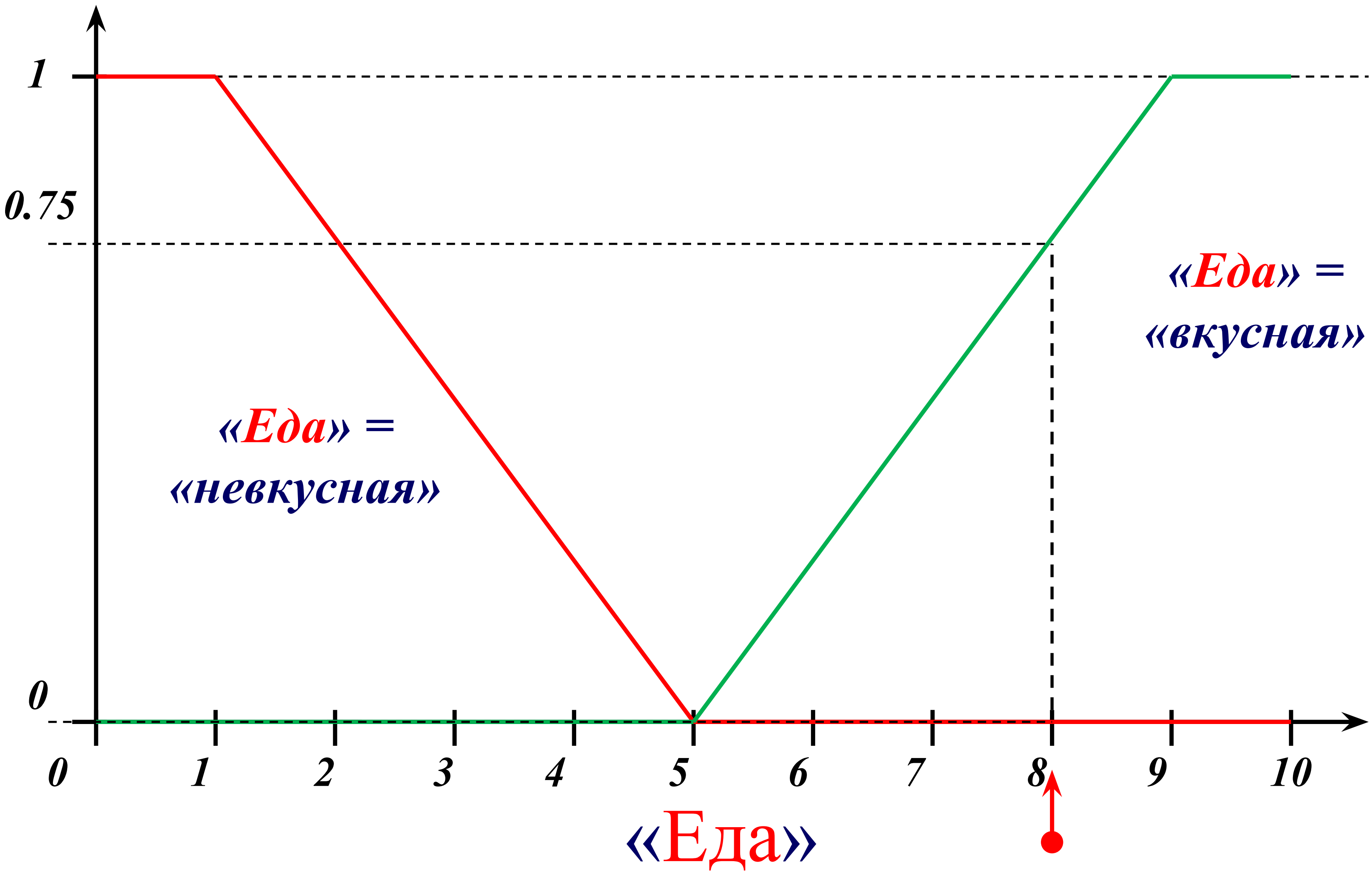
1. Если «Сервис» = «плохой» или «Еда» = «невкусная», то «Чаевые» = «маленькие»

2. Если «Сервис» = «средний», то «Чаевые» = «средние»

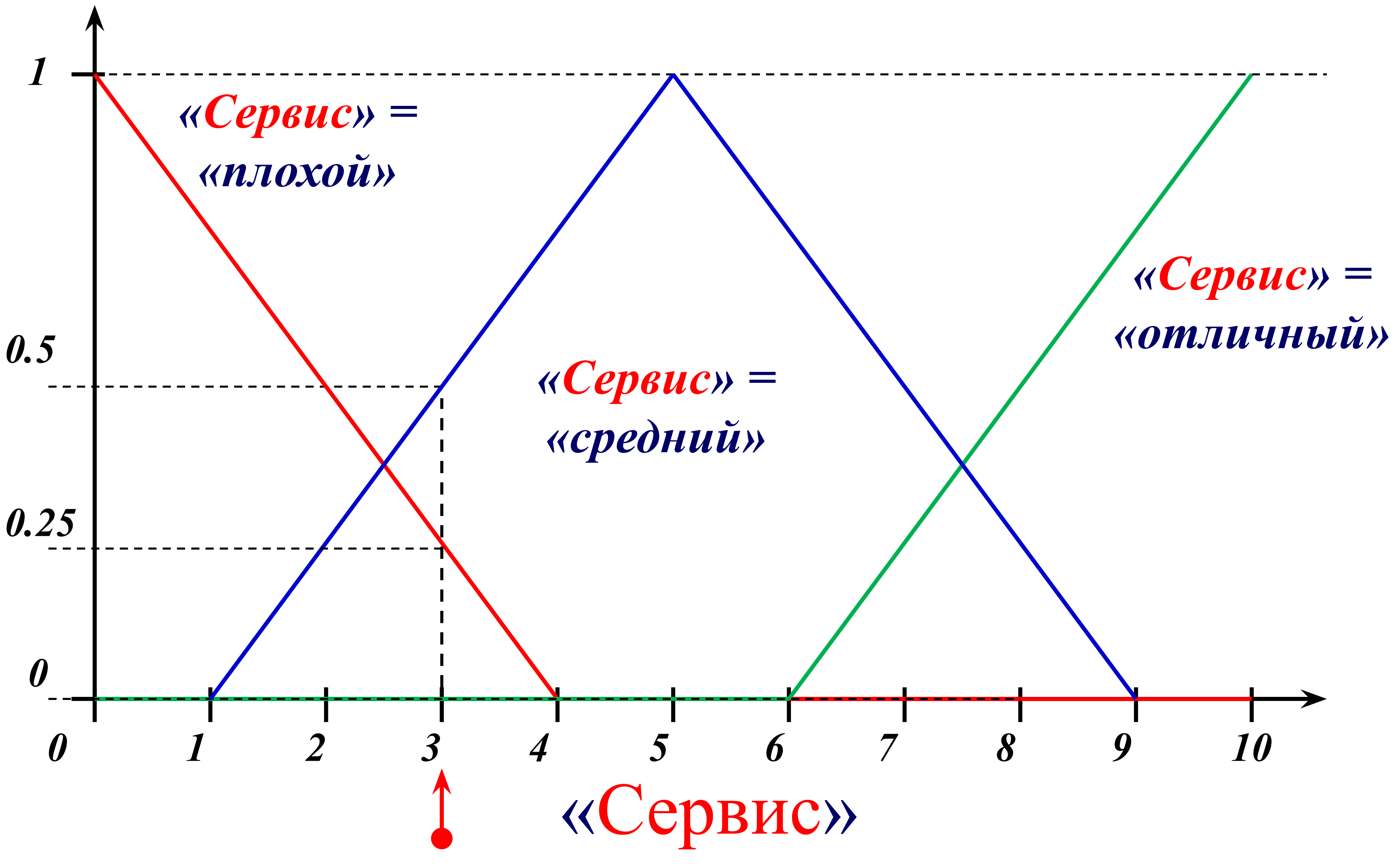
3. Если «Сервис» = «отличный» и «Еда» = «вкусная», то «Чаевые» = «высокие»

«Сервис» и «Еда» – входные переменные,
«Чаевые» – выходная переменная

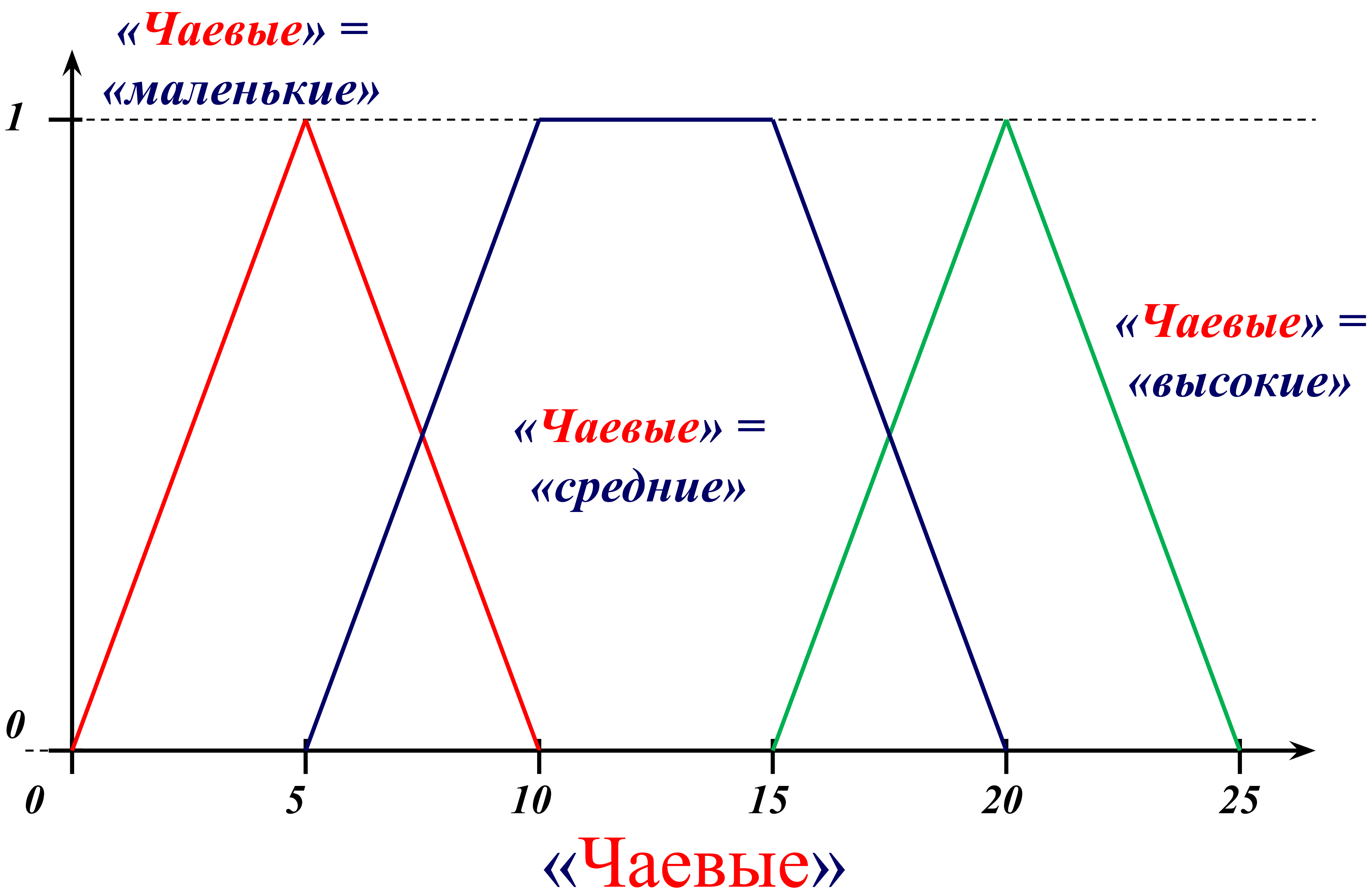
Лингвистическая переменна «Еда»



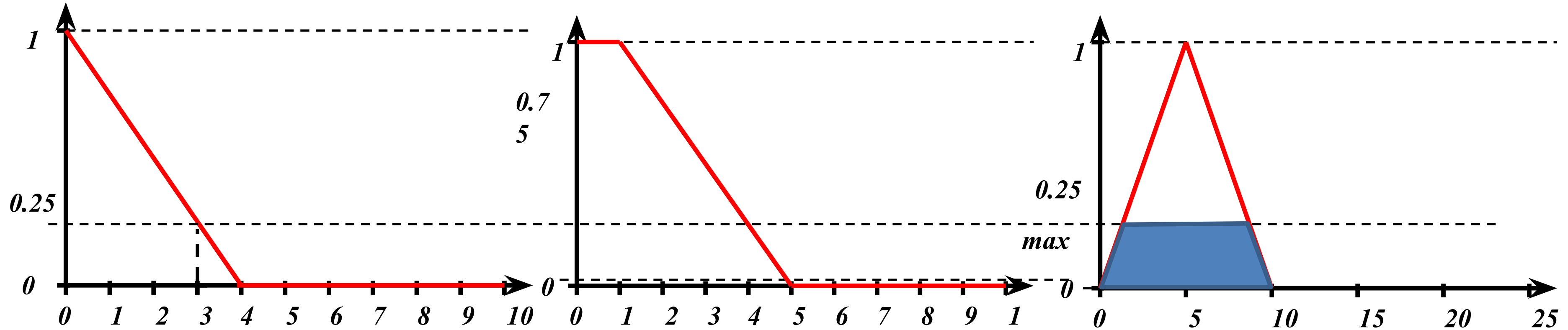
Лингвистическая переменна «Сервис»



Лингвистическая переменна «Чаевые»

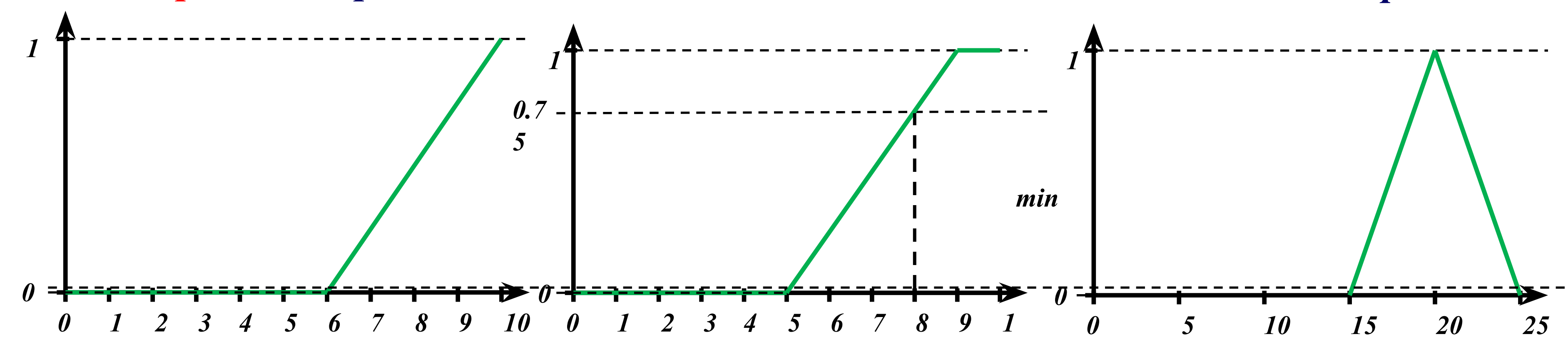


Логический вывод



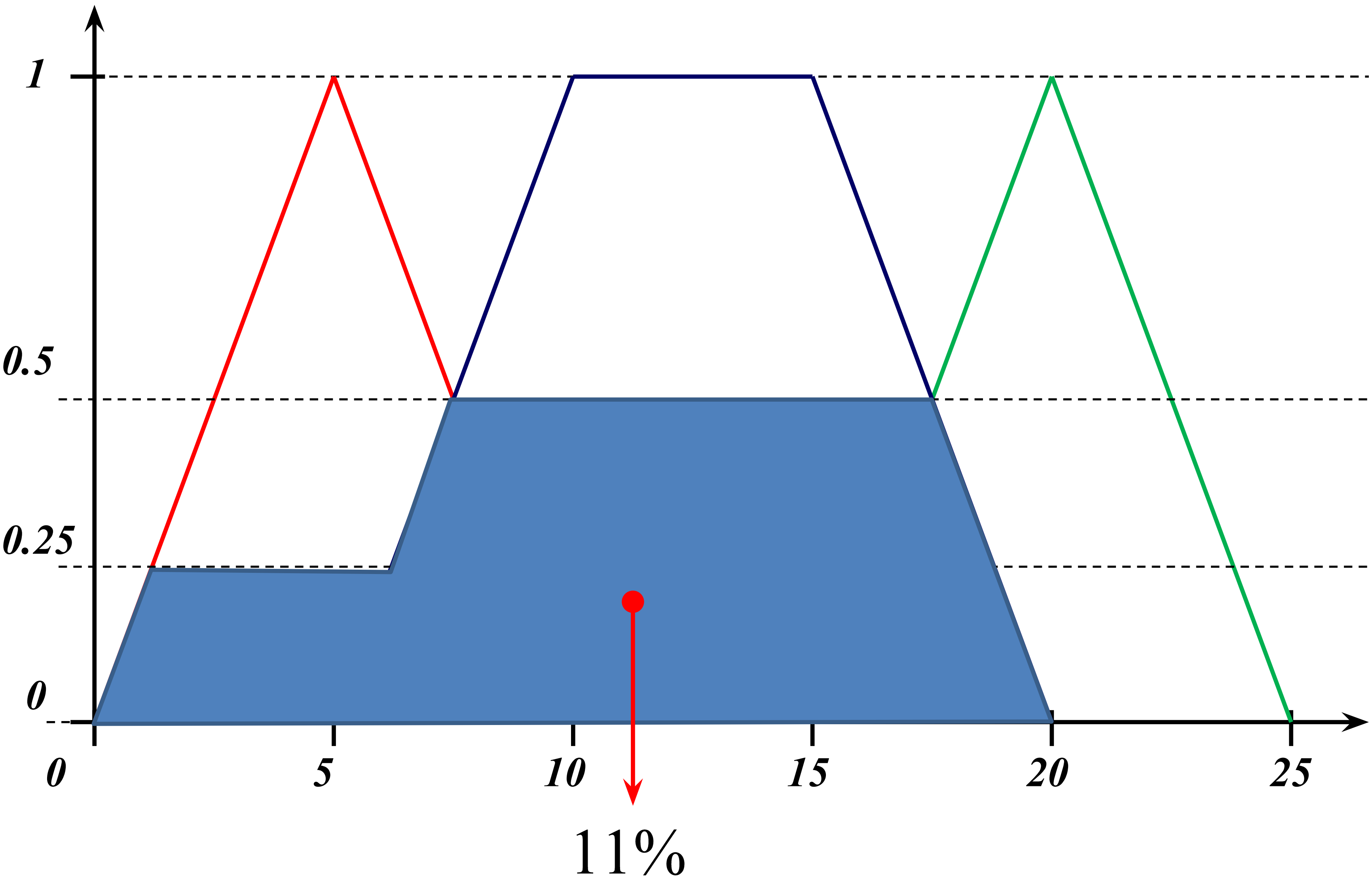
Если ***«Сервис» = «плохой»*** **ИЛИ** ***«Еда» = «невкусная»*** **ТО** ***«Чаевые» = «маленькие»***

Если ***«Сервис» = «средний»*** **ТО** ***«Чаевые» = «средние»***



Если ***«Сервис» = «отличный»*** **И** ***«Еда» = «вкусная»*** **ТО** ***«Чаевые» = «высокие»***

Дефаззификация



Благодарю за внимание!