

ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА



СОДЕРЖАНИЕ

ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ
ТОЖДЕСТВА

ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ

ФОРМУЛЫ СУММЫ И РАЗНОСТИ СИНУСОВ
(КОСИНУСОВ)

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО АРГУМЕНТА

ФОРМУЛЫ ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА

ВСЕ ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$



$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$



$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$



$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$



$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$



Тригонометрические формулы

Основные тождества:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Формулы сложения:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}$$

Формулы кратных углов:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \cdot \operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}$$

Формулы половинных углов:

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha \quad 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$$

$$1 \pm \sin \alpha = \left(\sin \frac{\alpha}{2} \pm \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2 \quad \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

ТРИГОНОМЕТРИЯ

При использовании формул, содержащих tg и ctg , необходимо учитывать О.Д.З. левой и правой частей формул.

Формулы суммы:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\pm \cos(\alpha \mp \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}$$

Формулы произведения:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

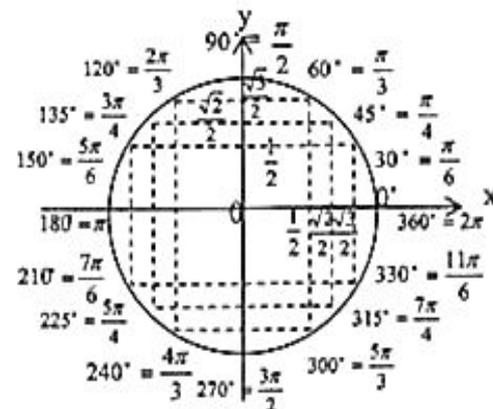
$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

Выражение функций через $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2})}{1 + \operatorname{tg}^2(\frac{\alpha}{2})} \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\frac{\alpha}{2})}{1 + \operatorname{tg}^2(\frac{\alpha}{2})}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2})}{1 - \operatorname{tg}^2(\frac{\alpha}{2})}$$



$$\pi \text{ рад} = 180^\circ$$

$$1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57'$$

$$1' = \frac{\pi}{180} \text{ рад}$$

Обратные тригонометрические функции:

$$\sin(\arcsin a) = a, \quad a \in [-1; 1] \quad \cos(\arccos a) = a, \quad a \in [-1; 1]$$

$$\arcsin(\sin a) = a, \quad a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \arccos(\cos a) = a, \quad a \in [0; \pi]$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a, \quad a \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} a) = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} a) = a, \quad a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \quad \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} a) = a, \quad a \in (0; \pi)$$

Четность тригонометрических и обратнотригонометрических функций:

1. четная: $\cos(-x) = \cos x$, $f(-x) = f(x)$
2. общего вида: $\operatorname{arccos}(-x) = \pi - \operatorname{arccos} x$
 $\operatorname{arctg}(-x) = \pi - \operatorname{arctg} x$
3. нечетные: остальные, $f(-x) = -f(x)$

Рейтинг углов.

1. табличные: 30, 45, 180, 120, 210, 330... (ф-лы приведения)
2. через 15: 15 = 45 - 30, 105 = 60 + 45, ... (формулы сложения)
3. одинаковые: 17, α , ... (основные тождества)
4. кратные: 17, 34; 2α , α , $\frac{\alpha}{2}$... (кратных и половинных углов)
5. сумма или разность табличная: 127 + 53 = 180, 93 - 3 = 90, 2 + 58 = 60, 35 - 5 = 30 (формулы приведения, суммы, произведения, сложения)
6. произвольные: α и β ; S и Z (формулы суммы, произведения, сложения)