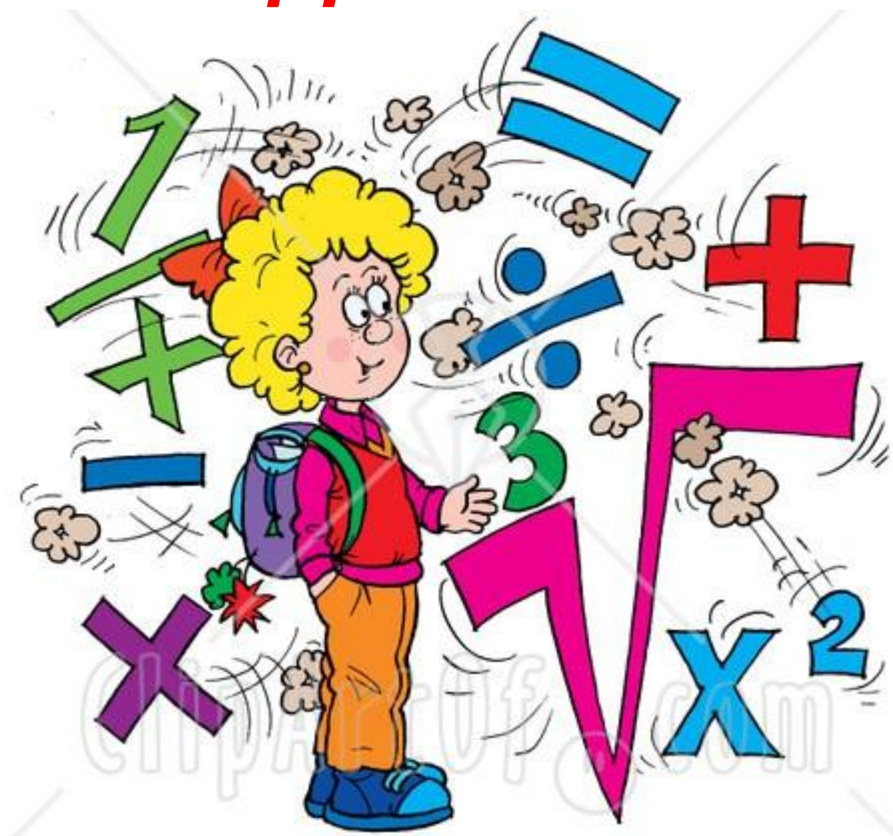
ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА



СОДЕРЖАНИЕ

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Тригонометрические формулы

Основные тождества:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\quad tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$

$tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $\quad 1 + ctg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

Формулы сложения:

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$tg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta}$;

$ctg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{ctg\alpha \cdot ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}$

Формулы кратных углов:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ $\quad \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ $\quad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$tg 2\alpha = \dfrac{2 \cdot tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$ $\quad ctg 2\alpha = \dfrac{ctg^2\alpha - 1}{2 \cdot ctg\alpha}$

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ $\quad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

$tg 3\alpha = \dfrac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}$ $\quad ctg 3\alpha = \dfrac{ctg^3\alpha - 3ctg\alpha}{3ctg^2\alpha - 1}$

Формулы половинных углов:

$2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$ $\quad 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$

$1 \pm \sin\alpha = (\sin\dfrac{\alpha}{2} \pm \cos\dfrac{\alpha}{2})^2$ $\quad tg^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$

$tg\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$

При использовании формул, содержащих tg и ctg, необходимо учитывать О.Д.З. левой и правой частей формул.

Формулы суммы:

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$tg\alpha \pm tg\beta = \dfrac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

$ctg\alpha \pm ctg\beta = \dfrac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$

$tg\alpha \pm ctg\beta = \dfrac{\pm\cos(\alpha \mp \beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$

Формулы произведения:

$\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$

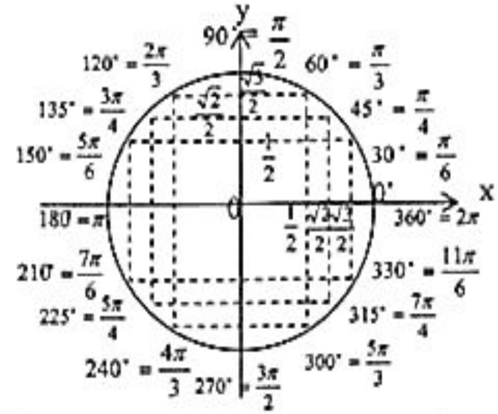
$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$

$\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$

Выражение функций через $tg\dfrac{\alpha}{2}$

$\sin\alpha = \dfrac{2tg(\alpha/2)}{1 + tg^2(\alpha/2)}$ $\quad \cos\alpha = \dfrac{1 - tg^2(\alpha/2)}{1 + tg^2(\alpha/2)}$

$tg\alpha = \dfrac{2tg(\alpha/2)}{1 - tg^2(\alpha/2)}$



π рад $= 180°$

$1 рад = \dfrac{180°}{\pi} \approx 57°$

$1° = \dfrac{\pi}{180}$ рад

Обратные тригонометрические функции:

$\sin(\arcsin a) = a, \quad a \in [-1;1]$ $\quad \cos(\arccos a) = a, \quad a \in [-1;1]$

$\arcsin(\sin a) = a, \quad a \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ $\quad \arccos(\cos a) = a, \quad a \in [0;\pi]$

$tg(arctga) = a, \quad a \in R$ $\quad ctg(arcctga) = a, \quad a \in R$

$arctg(tga) = a, \quad a \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ $\quad arcctg(ctga) = a, \quad a \in (0;\pi)$

Четность тригонометр-ких и обратнотриг-их функций:

1. четная: $\cos(-x) = \cos x$, $f(-x) = f(x)$
2. общего вида: $arc\cos(-x) = \pi - \arccos x$
   $arcctg(-x) = \pi - arcctgx$
3. нечетные: остальные, $f(-x) = -f(x)$

Рейтинг углов.

1. табличные: 30°, 45°, 180°, 120°, 210°, 330°…(ф-лы приведения)
2. через 15: 15 = 45 - 30°, 105 = 60° + 45,…(формулы сложения)
3. одинаковые: 17, α, …(основные тождества)
4. кратные: 17, 34 ; 2α, α, $\dfrac{\alpha}{2}$ …(кратных и половинных углов)
5. сумма или разность табличная: 127 + 53 = 180°, 93 − 3 = 90°, 2 + 58 = 60°, 35 − 5 = 30° (формулы приведения, суммы, произведения, сложения)
6. произвольные: α и β; 5 и 2 (формулы суммы, произведения, сложения)