

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Дифференцированием функции $f(x)$, называют операцию нахождения производной. Для решения многих задач необходимо уметь выполнять и обратную операцию: по заданной функции $f(x)$ находить функцию $F(x)$, производная которой даёт $f(x)$, т.е.

$$F'(x) = f(x).$$

Эта операция называется интегрированием функции или операцией отыскания первообразной.

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на множестве X , если

$$F'(x) = f(x) \text{ для всех } x \in X.$$



Например, для функции $f(x) = x^2$ на промежутке $(-\infty; \infty)$ первообразной будет функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$, потому что $(x^3/3)' = x^2$ для всех $x \in (-\infty; \infty)$. В то же время для функции $f(x) = 1/x^2$ первообразную $F(x) = -\frac{1}{x}$ можно определить только для $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$, потому что равенство $(-1/x)' = 1/x^2$ имеет место лишь для $x \neq 0$.



Неопределённый интеграл и его свойства.

Мы знаем, что функция $F_0(x) = \frac{x^3}{3}$ является первообразной для функции $f(x) = x^2$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Однако, это не единственная первообразная. Любая функция $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$, где C - произвольная константа, тоже будет первообразной $f(x) = x^2$ на множестве $x \in \mathbb{R}$, потому что

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + C \right)' = \left(\frac{x^3}{3} \right)' + C' = \frac{3x^2}{3} + 0 = x^2 = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$



Вообще, если $F_0(x)$ -первообразная $f(x)$ на множестве X , то любая функция вида

$$F(x) = F_0(x) + C,$$

где C - произвольная константа, тоже будет первообразной $f(x)$ на том же множестве X .

$$F'(x) = (F_0(x) + C)' = F_0'(x) + C' = f(x) \quad x \in X.$$

Итак, мы можем сделать следующий вывод. Если какой-нибудь первообразной данной функции прибавить постоянное слагаемое, то снова получится первообразная той же функции.



Интегралы элементарных функций

Первообразные рациональных функций

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln(|x|) + C$$

$$3. \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln(|ax+b|) + C$$

$$4. \int \frac{ax+b}{cx+d} dx = \frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2} \ln(|cx+d|) + C$$

$$5. \int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, \quad n \neq -1$$

$$6. \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \ln\left(\left|\frac{x+b}{x+a}\right|\right) + C$$



$$7. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left(\left| \frac{x-b}{x+a} \right| \right) + C$$

$$8. \int \frac{x dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} (a \ln|x+a| - b \ln|x+b|) + C$$

$$9. \int \frac{x dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2} \ln|x^2 - a^2| + C$$

$$10. \int \frac{x dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \ln|x^2 + a^2| + C$$

$$11. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) + C$$

$$12. \int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + a^2} + C$$

$$13. \int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^3} = -\frac{1}{4} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} + C$$

$$14. \int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^2} = -\frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) + C$$



$$15. \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \left(\left| \frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}} \right| \right) + C, \text{ при } (b^2 - 4ac > 0)$$

$$16. \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \right) + C, \text{ при } (b^2 - 4ac < 0)$$

$$17. \int \frac{x dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2a} \ln|ax^2 + bx + c| - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$18. \int \frac{x dx}{ax+b} = \frac{1}{a^2} (ax + b - b \ln|ax + b|) + C$$



$$18. \int \frac{x \, dx}{ax+b} = \frac{1}{a^2} (ax + b - b \ln|ax + b|) + C$$

$$19. \int \frac{x^2 \, dx}{ax+b} = \frac{1}{a^3} \left(\frac{1}{2} (ax + b)^2 - 2b(ax + b) + b^2 \ln(|ax + b|) \right) + C$$

$$20. \int \frac{x^2 \, dx}{(ax+b)^2} = \frac{1}{a^3} \left(ax + b - 2b \ln(|ax + b|) - \frac{b^2}{ax+b} \right) + C$$

$$21. \int \frac{x \, dx}{(ax+b)^2} = \frac{1}{a^2} \left(\ln(|ax + b|) - \frac{b}{ax+b} \right) + C$$

$$22. \int \frac{dx}{x^2(ax+b)} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2} \ln \left(\left| \frac{ax+b}{x} \right| \right) + C$$

$$23. \int \frac{dx}{x(ax+b)} = \frac{1}{b} \ln \left(\left| \frac{ax+b}{x} \right| \right) + C$$



Логарифмы

Основные интегралы с логарифмическими функциями

$$1. \int \ln(x) \, dx = x \ln(x) - x + C$$

$$2. \int \frac{dx}{x \ln(x)} = \ln|\ln x| + C$$

$$3. \int \log_b(x) \, dx = x \log_b(x) - x \log_b(e) + C = x \frac{\ln(x)-1}{\ln(b)} + C$$



$$1. \int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$$

$$2. \int (\ln cx)^n dx = x(\ln cx)^n - n \int (\ln cx)^{n-1} dx + C$$

$$3. \int \frac{(\ln x)^n dx}{x^m} = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1} + C, \text{ при } n \neq -1$$

$$4. \int \sin(\ln x) dx = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$$

$$5. \int \cos(\ln x) dx = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C$$



Экспоненциальные функции

$$1. \int e^x dx = e^x + C$$

$$2. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$$

$$3. \int e^{cx} dx = \frac{1}{c} e^{cx} + C$$

$$4. \int x e^{cx} dx = \frac{e^{cx}}{c^2} (cx - 1) + C$$

$$5. \int x^n e^{cx} dx = \frac{1}{c} x^n e^{cx} - \frac{n}{c} \int x^{n-1} e^{cx} dx + C$$

Иррациональные функции

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$2. - \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arccos \frac{x}{a} + C$$

$$3. - \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{|x|}{a} + C$$

4. «Длинный логарифм»:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|) + C$$

$$5. \int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 + a} + a \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| \right) + C$$



Тригонометрические функции

$$1. \int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + C$$

$$2. \int \cos(x) \, dx = \sin(x) + C$$

$$3. \int \operatorname{tg}(x) \, dx = -\ln(|\cos(x)|) + C$$

$$4. \int \operatorname{ctg}(x) \, dx = \ln |\sin(x)| + C$$

$$5. \int \sec(x) \, dx = \ln |\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + C$$

$$6. \int \operatorname{cosec}(x) \, dx = -\ln |\operatorname{cosec}(x) + \operatorname{ctg}(x)| + C$$

$$7. \int \sec^2(x) \, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$8. \int \operatorname{cosec}^2(x) \, dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$9. \int \sec(x) \operatorname{tg}(x) \, dx = \sec(x) + C$$

$$10. \int \operatorname{cosec}(x) \operatorname{ctg}(x) \, dx = -\operatorname{cosec}(x) + C$$

$$11. \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C$$

$$12. \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C$$

$$13. \int \sin^n x \, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx + C, \quad n \geq 2$$

$$14. \int \cos^n x \, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx + C, \quad n \geq 2$$

$$15. \int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C, \quad n \geq 2$$