НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Дифференцированием функции f(x), называют операцию нахождения производной. Для решения многих задач необходимо уметь выполнять и обратную операцию: по заданной функции f(x) находить функциюF(X) ,производная которой даёт f(x),т.е.

$$F'(x) = f(x).$$

Эта операция называется интегрированием функции или операцией отыскания первообразной.

Функция F(X) называется первообразной для функции f(x) на множестве X, если

$$F'(x)=f(x) \text{ для всех } x \in X.$$

Например, для функции $f(x)=x^2$ на промежутке $(-\infty;\infty)$ первообразной будет функция $F(x)=\frac{x^3}{3}$, потому что $(x^3/3)'=x^2$ для всех $x\in(-\infty;\infty)$. В то же время для функции $f(x)=1/x^2$ первообразную $F(x)=-\frac{1}{x}$ можно определить только для $x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$, потому что равенство $(-1/x)'=1/x^2$ имеет место лишь для $x\neq 0$.

Неопределённый интеграл и его свойства.

Мы знаем, что функция $F_0(x)=\frac{x^3}{3}$ является первообразной для функции $f(x)=x^2$ для всех $x\in R$. Однако, это не единственная первообразная. Любая функция $F(x)=\frac{x^3}{3}+C$, где C - произвольная константа, тоже будет первообразной $f(x)=x^2$ на множестве $x\in R$, потому что

$$F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}+C\right)'=\left(\frac{x^3}{3}\right)'+C'=\frac{3x^2}{3}+0=x^2=f(x), \qquad x\in R.$$

Вообще, если $F_0(x)$-первообразная $f(x)$ на множестве X, то любая функция вида

$$F(X)= F_0(x)+C,$$

где C- произвольная константа, тоже будет первообразной f(x) на том же множестве X.

$$F'(x)=(F_0(x)+C)= F'_0(x)+C= f(x\backslash xeX.$$

Итак, мы можем сделать следующий вывод. Если какой-нибудь первообразной данной функции прибавить постоянное слагаемое, то снова получится первообразная той же функции.

Интегралы элементарных функций

Первообразные рациональных функций

1. $\int x^n \, \mathrm{d}\, x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \; (n \neq -1)$

2. $\int \frac{\mathrm{d}\, x}{x} = \ln(|x|) + C$

3. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln(|ax + b|) + C$

4. $\int \frac{ax+b}{cx+d} \mathrm{d}\, x = \frac{a}{c} x + \frac{bc-ad}{c^2} \ln(|cx + d|) + C$

5. $\int (ax + b)^n \, \mathrm{d}\, x = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, \; n \neq -1$

6. $\int \frac{\mathrm{d}\, x}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \ln\left(\left|\frac{x+b}{x+a}\right|\right) + C$

7. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\left|\frac{x-b}{x+a}\right|\right) + C$

8. $\int \frac{x\,dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b}(a\ln|x+a| - b\ln|x+b|) + C$

9. $\int \frac{x\,dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2}\ln|x^2-a^2| + C$

10. $\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln|x^2+a^2| + C$

11. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\left(\frac{x}{a}\right) + C$

12. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+a^2} + C$

13. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^3} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(x^2+a^2)^2} + C$

14. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3} arctg\left(\frac{x}{a}\right) + C$

15. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln\left(\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|\right) + C$, при $(b^2 - 4ac > 0)$

16. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{4ac-b^2}} arctg\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) + C$, при $(b^2 - 4ac < 0)$

17. $\int \frac{x\,dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2a}\ln|ax^2 + bx + c| - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

18. $\int \frac{x\,dx}{ax+b} = \frac{1}{a^2}(ax + b - b\ln|ax + b|) + C$

18. $\int \frac{x\,\mathrm{d}\,x}{ax+b} = \frac{1}{a^2}(ax+b-b\ln|ax+b|)+C$

19. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}\,x}{ax+b} = \frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{2}(ax+b)^2-2b(ax+b)+b^2\ln(|ax+b|)\right)+C$

20. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}\,x}{(ax+b)^2} = \frac{1}{a^3}\left(ax+b-2b\ln(|ax+b|)-\frac{b^2}{ax+b}\right)+C$

21. $\int \frac{x\,\mathrm{d}\,x}{(ax+b)^2} = \frac{1}{a^2}\left(\ln(|ax+b|)-\frac{b}{ax+b}\right)+C$

22. $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2(ax+b)} = -\frac{1}{bx}+\frac{a}{b^2}\ln\left(\left|\frac{ax+b}{x}\right|\right)+C$

23. $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x(ax+b)} = \frac{1}{b}\ln\left(\left|\frac{ax+b}{x}\right|\right)+C$

Логарифмы

Основные интегралы с логарифмическими функциями

1. $\int \ln(x)\,\mathrm{d}\,x = x\ln(x) - x + C$

2. $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x\ln(x)} = \ln|\ln x| + C$

3. $\int \log_b(x)\,\mathrm{d}\,x = x\log_b(x) - x\log_b(e) + C = x\frac{\ln(x)-1}{\ln(b)} + C$

1. $\int (\ln\ x)^2 \, \mathrm{d}\, x = x(\ln\ x)^2 - 2x\, ln\, x + 2x + C$

2. $\int (\ln\ \text{c}x)^n \, \mathrm{d}\, x = x(\ln\ cx)^n - n \int (\ln\ cx)^{n-1} \, \mathrm{d}\, x + C$

3. $\int \frac{(\ln\ x)^n \, \mathrm{d}\, x}{x^m} = \frac{(\ln\ x)^{n+1}}{n+1} + C$, при $n \neq -1$

4. $\int \sin(\ln\ x) \, \mathrm{d}\, x = \frac{x}{2}(\sin(\ln\ x) - \cos(\ln\ x)) + C$

5. $\int \cos(\ln\ x) \, \mathrm{d}\, x = \frac{x}{2}(\sin(\ln\ x) + \cos(\ln\ x)) + C$

Экспоненциальные функции

1. $\int e^x \, \mathrm{d}\, x = e^x + C$

2. $\int a^x \, \mathrm{d}\, x = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$

3. $\int e^{cx} \, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{c} e^{cx} + C$

4. $\int x e^{cx} \, \mathrm{d}\, x = \frac{e^{cx}}{c^2}(cx - 1) + C$

5. $\int x^n e^{cx} \, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{c} x^n e^{cx} - \frac{n}{c} \int x^{n-1} e^{cx} \, \mathrm{d}\, x + C$

Иррациональные функции

1. $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{a^2-x^2}} = arc\sin\frac{x}{a} + C$

2. $-\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{a^2-x^2}} = arc\cos\frac{x}{a} + C$

3. $-\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a} arcsec\frac{|x|}{a} + C$

4. «Длинный логарифм»:

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|\right) + C$$

5. $\int \sqrt{x^2+a}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a} + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right) + C$

Тригонометрические функции

1. $\int \sin(x)\,\mathrm{d}\,x = -\cos(x) + C$

2. $\int \cos(x)\,\mathrm{d}\,x = \sin(x) + C$

3. $\int tg\,(x)\,\mathrm{d}\,x = -\ln(|\cos(x)|) + C$

4. $\int ctg\,(x)\,\mathrm{d}\,x = \ln\,|\sin(x)| + C$

5. $\int sec\,(x)\,\mathrm{d}\,x = \ln\,|sec\,(x) + tg(x)| + C$

6. $\int cosec\,(x)\,\mathrm{d}\,x = -\ln\,|cosec\,(x) + ctg(x)| + C$

7. $\int sec^2\,(x)\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{\mathrm{d}\,x}{\cos^2 x} = tg\,x + C$

8. $\int cosec^2\,(x)\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sin^2 x} = -ctg\,x + C$

9. $\int sec\,(x)\ \ tg(x)\,\mathrm{d}\,x = sec\,(x) + C$

10. $\int cosec\,(x)\ \ ctg(x)\,\mathrm{d}\,x = -cosec\,(x) + C$

11. $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}(x - \sin\ x\ \cos\ x) + C$

12. $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}(x + \sin\ x\ \cos\ x) + C$

13. $\int \sin^n x\,\mathrm{d}\,x = -\frac{\sin^{n-1}\ x\ \cos\ x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\ \mathrm{d}\,x + C,\ n \geq 2$

14. $\int \cos^n x\,\mathrm{d}\,x = -\frac{\cos^{n-1}\ x\ \sin\ x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\ \mathrm{d}\,x + C,\ n \geq 2$

15. $\int arctg\,x\,\mathrm{d}\,x = x\ arctg\ x\ - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C,\ n \geq 2$