



# Кластеризация

- Под задачей кластеризации обычно понимается ситуация, в которой некую коллекцию объектов требуется разделить на несколько логически связанных групп.

# Кластеризация – использование графа

- Построение остовных деревьев
- Остовное дерево графа — это дерево, подграф данного графа, с тем же числом вершин, что и у исходного графа. Неформально говоря, остовное дерево получается из исходного графа удалением максимального числа рёбер, входящих в циклы, но без нарушения связности графа

# Кластеризация по компонентам

## СВЯЗНОСТИ

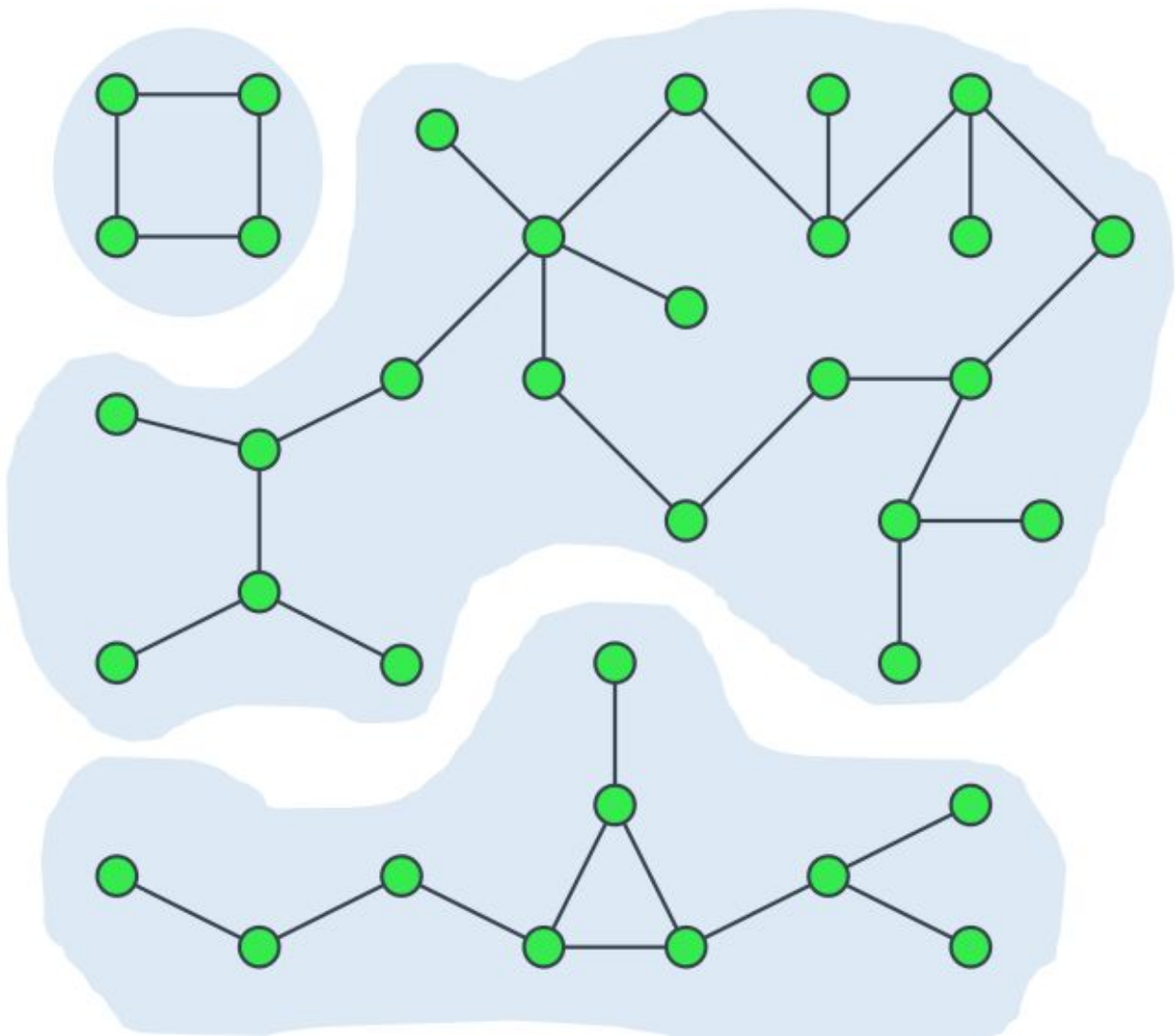
- Граф: вершины соответствуют объектам
- Соединяем ребром объекты, расстояние между которыми меньше
- Выделяем компоненты связности

# Кластеризация по максимальному интервалу

- Начнем с создания ребра между ближайшей парой точек; затем создается ребро между парой точек со следующей ближайшей парой и т. д. Далее мы продолжаем добавлять ребра между парами точек в порядке увеличения расстояния  $d(p_i, p_j)$ .

- Допустим, имеется множество  $U$  из  $n$  объектов  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .
- Для каждой пары  $p_i$  и  $p_j$ , определяется числовое расстояние  $d(p_i, p_j)$ .
- К функции расстояния предъявляются следующие требования:  $d(p_i, p_j) = 0$ ;
- $d(p_i, p_j) > 0$  для разных  $p_i$  и  $p_j$ , а также  $d(p_i, p_j) = d(p_j, p_i)$  (симметричность).
- Предположим, объекты из  $U$  требуется разделить на  $k$  групп для заданного параметра  $k$ . Термином “ $k$ -кластеризация  $U$ ” обозначается разбиение  $U$  на  $k$  непустых множеств  $S_1, S_2, \dots, S_k$ .

- При таком подходе в процессе расширения графа никогда не образуется цикл, так что  $H$  будет объединением деревьев. Добавление ребра, концы которого принадлежат двум разным компонентам, фактически означает слияние двух соответствующих кластеров.

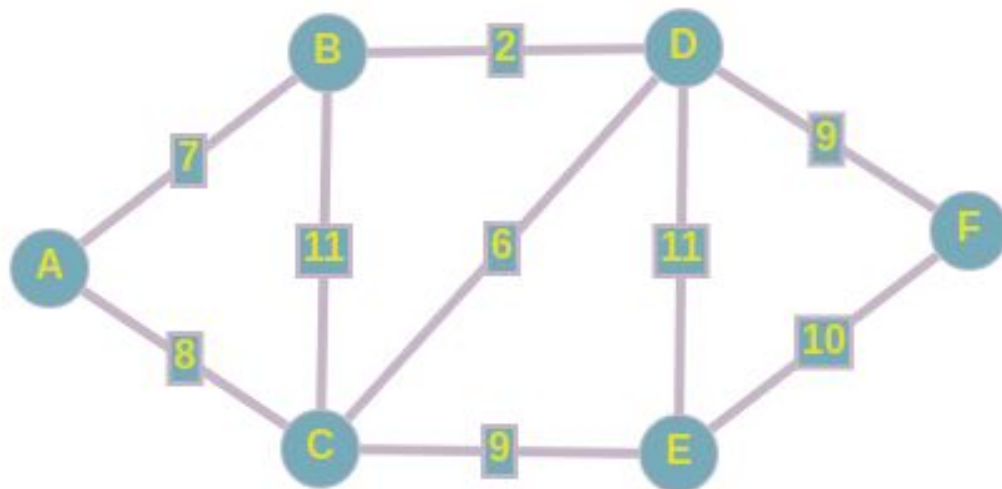


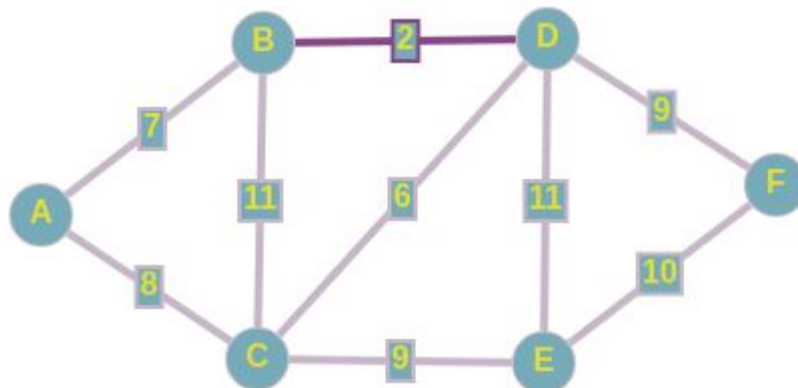


# Минимальное остовное дерево

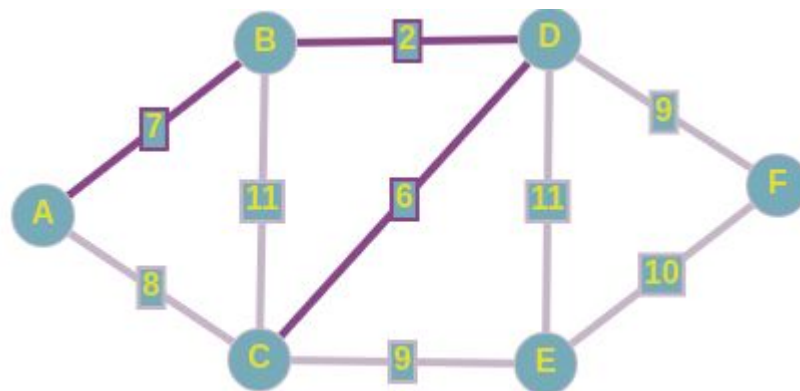
- Остовное дерево графа — это дерево, подграф данного графа, с тем же числом вершин, что и у исходного графа. Неформально говоря, остовное дерево получается из исходного графа удалением максимального числа рёбер, входящих в циклы, но без нарушения связности графа

- Вначале мы производим сортировку рёбер по **неубыванию** по их весам.
- Добавляем  $i$ -ое ребро в наш подграф только в том случае, если данное ребро соединяет две разные компоненты связности, одним из которых является наш подграф. То есть, на каждом шаге добавляется минимальное по весу ребро, один конец которого содержится в нашем подграфе, а другой - еще нет.
- Алгоритм завершит свою работу после того, как множество вершин нашего подграфа совпадет с множеством вершин исходного графа.

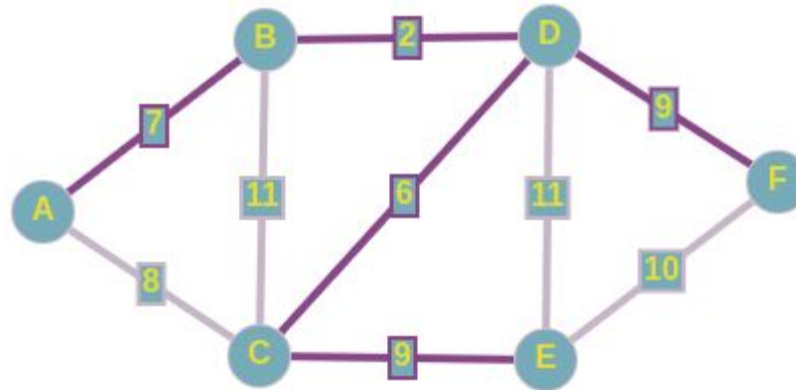




Подграф после добавления 1-го ребра



Подграф после добавления 2-го и 3-го рёбер



При добавлении в наше остовное дерево ребра  $A \leftrightarrow C$ , как вы можете заметить, образовывается цикл, поэтому мы просто пропускаем данное ребро.

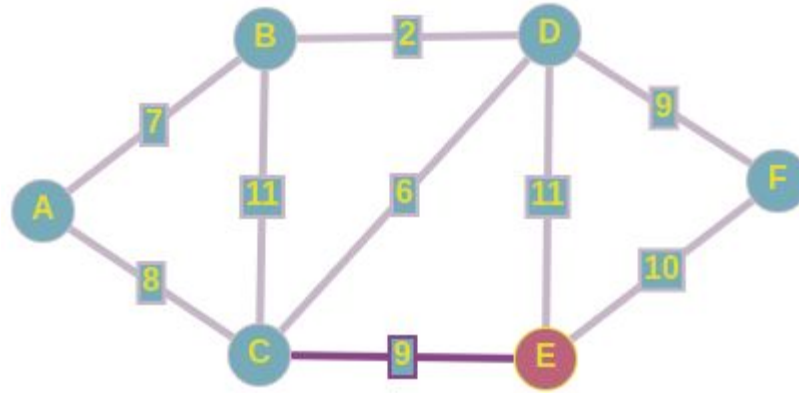
По итогу у нас образовывается следующий подграф, и как вы заметили, мы соединили все вершины ребрами с минимально-возможными весами, а значит, нашли минимальное остовное дерево для нашего исходного графа.

- Вначале, как мы уже ранее говорили, необходимо отсортировать ребра по убыванию по их весам. Далее каждую вершину можем поместить в свое собственное дерево, то есть, создаем некоторое множество подграфов.
- Дальше итерируемся по всем ребрам в отсортированном порядке принадлежат ли инцидентные вершины текущего ребра разным подграфам,
- если оба конца лежат в разных компонентах, то объединяем два разных подграфа в один

# Вариант 2

- На входе так же имеется пустой подграф, который и будем достраивать до потенциального минимального остовного дерева.

- Изначально наш подграф состоит из одной любой вершины исходного графа.
- Затем из рёбер инцидентных этой вершине, выбирается такое минимальное ребро, которое связала бы две абсолютно разные компоненты связности, одной из которых и является наш подграф. То есть, как только у нас появляется возможность добавить новую вершину в наш подграф, мы тут же включаем ее по минимально возможному весу.
- Продолжаем выполнять предыдущий шаг до тех пор, пока не найдем искомое



- Выбираем чисто случайно вершину E, далее рассмотрим все ребра исходящие из нее, включаем в наше остовное дерево ребро  $C \leftrightarrow E$ ;  $w = 9$ , так как данное ребро имеет минимальный вес из всех рёбер инцидентных множеству вершин нашего подграфа.



- Теперь выборка производится из рёбер:

$D \leftrightarrow C; w = 6$

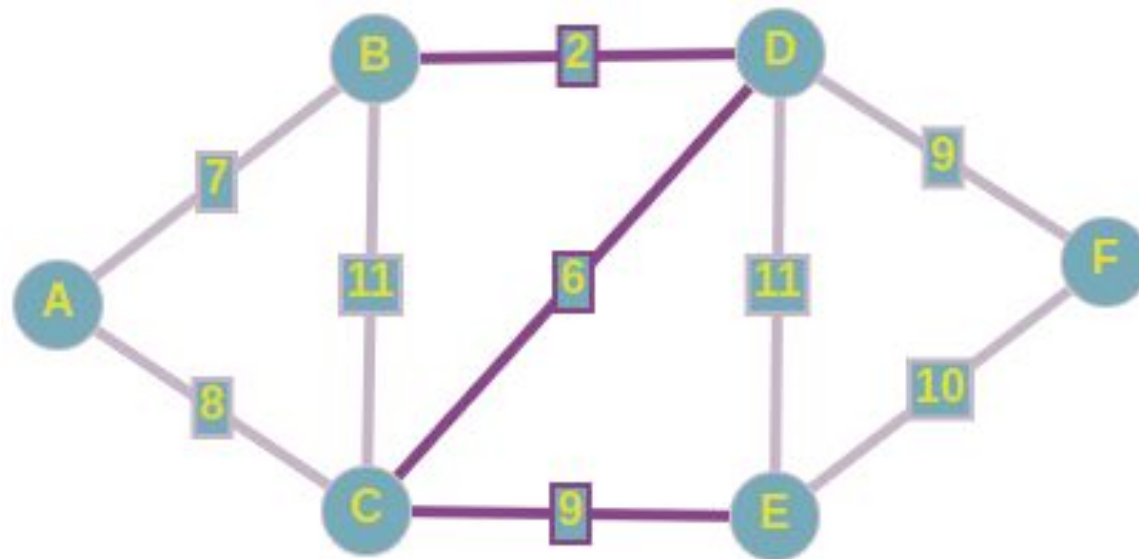
$A \leftrightarrow C; w = 8$

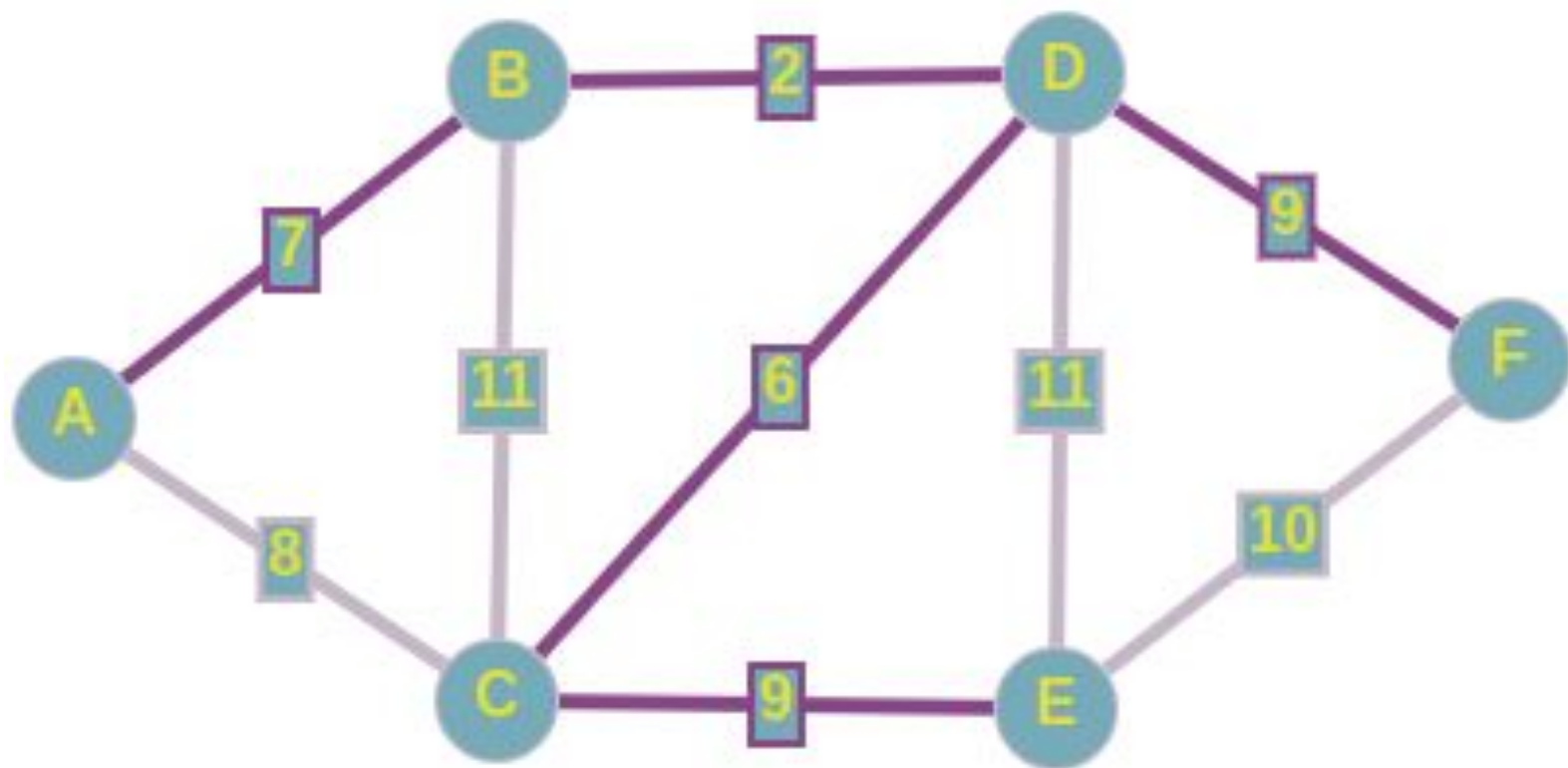
$F \leftrightarrow E; w = 10$

$B \leftrightarrow C; w = 11$

$D \leftrightarrow E; w = 11$

- Добавляем в наш подграф ребро  $D \leftrightarrow C$  и по аналогии добавляем ребро  $D \leftrightarrow E$ . Получаем следующее:





- Моделирование сложных сетей, наподобие социальных, или симуляция заболеваний, наподобие коронавируса. Каждый узел может представлять человека или популяцию, а ребра могут представлять вероятность/легкость передачи. В данной модели мы можем попытаться определить или сформировать круговые замкнутые графы.

- Организация и любые иерархические структуры. Графы не обязательно должны представлять циклы и быть циклическими — они также могут выражать иерархию. Например, если вы создадите API для локальной библиотеки, чтобы получать доступ к книгам по их содержанию, то построите для этого граф. Если вы захотите создать карту сайта, то также используете граф.

- В подразделе МО, именуемом обработкой естественного языка, который занимается моделированием языка, взвешенные представления графов слов и текста чрезвычайно важны, поскольку могут на расстоянии дать понимание, к примеру, слов, принадлежащих к схожему кластеру (“яблоки”, “апельсины”) или означающих схожие вещи.

- Графовые базы данных предназначены для хранения взаимосвязей и навигации в них. Взаимосвязи в графовых базах данных являются объектами высшего порядка, в которых заключается основная ценность этих баз данных. В графовых базах данных используются узлы для хранения сущностей данных и ребра для хранения взаимосвязей между сущностями. Ребро всегда имеет начальный узел, конечный узел, тип и направление.
- Ребра могут описывать взаимосвязи типа «родитель-потомок», действия, права владения и т. п. Ограничения на количество и тип взаимосвязей, которые может иметь узел, отсутствуют.

# Выявление мошенничества

- Графовые базы данных позволяют выявлять сложные схемы мошенничества. Анализ взаимосвязей в графовых базах данных дает возможность обрабатывать финансовые операции и операции, связанные с покупками, практически в режиме реального времени. С помощью быстрых запросов к графу можно, например, определить, что потенциальный покупатель использует тот же адрес электронной почты и кредитную карту, которые уже использовались в известном случае мошенничества.
- Графовые базы данных также позволяют без труда обнаруживать определенные шаблоны взаимосвязей, например когда несколько человек связаны с одним персональным адресом электронной почты или когда несколько человек используют один IP-адрес, но проживают по разным физическим адресам.



- **Социальные сети.** Для обнаружения постов мошенников в социальных сетях (для увеличения числа лайков, для перенаправления на вредоносную страницу или на анкетирование) описываются подходы на основе обычных классификаторов, но с учетом графовых признаков: длина распространения «плохого» поста по графу, число лайков и комментариев других пользователей по посту, схожесть сообщений, распространяющих пост пользователей, степень узла пользователя, написавшего пост.

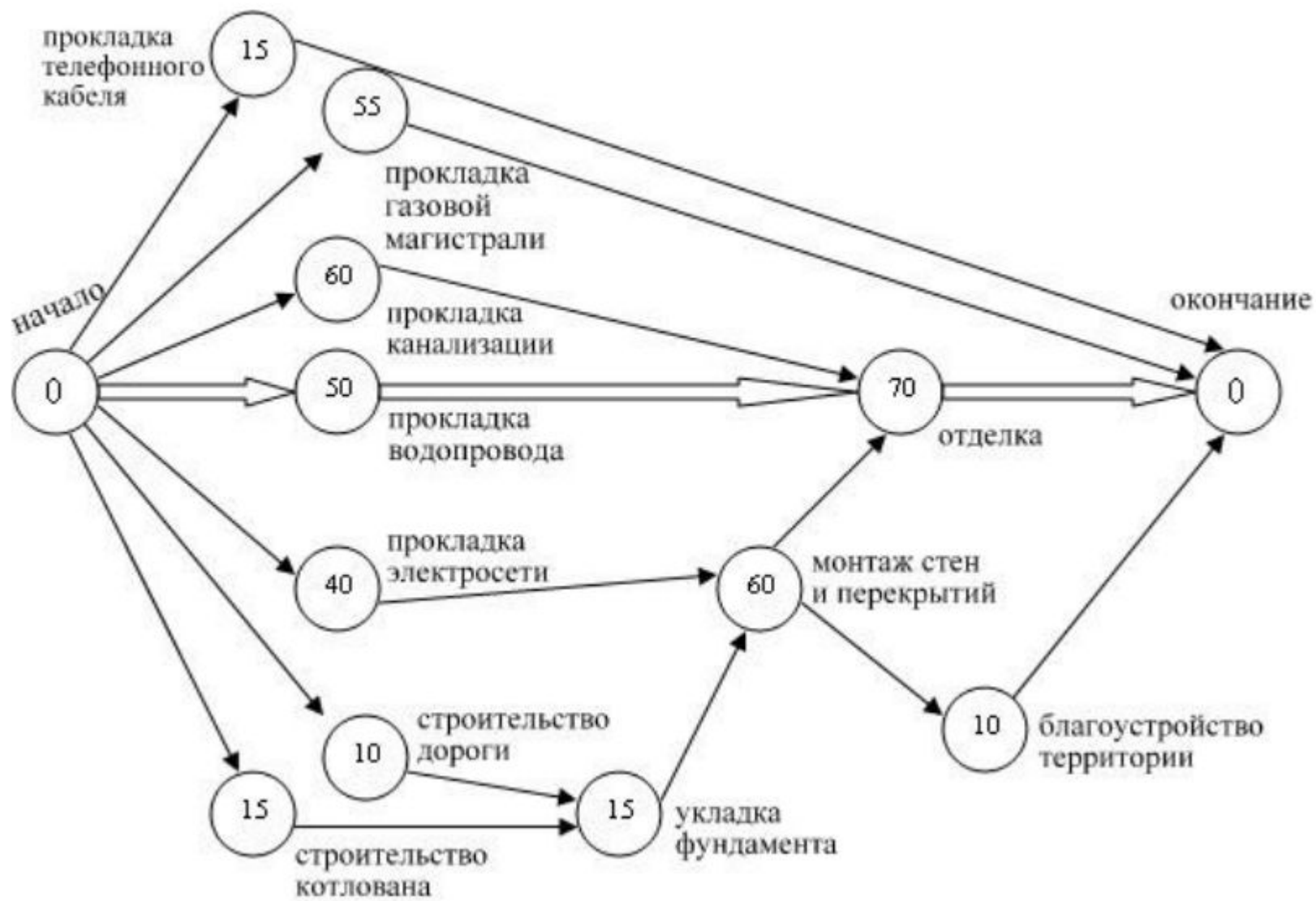
- **Телекоммуникации.** Целью являются люди, пользующиеся услугами бесплатно. Cortes et al. (2002) искали подграфы, тесно связанные с ключевым узлом по параметрам числа и продолжительности звонков. Наблюдения, которые авторы обнаружили: фродовые аккаунты оказались связаны, то есть нарушители или сами звонили друг другу, или звонили на одни и те же телефоны. Второе наблюдение — нарушителей можно обнаружить по схожести их подграфов, определенных предложенным образом.

# Сервисы рекомендаций

- Графовые базы данных – хороший выбор для рекомендательных приложений. Используя графовую базу данных, можно хранить в графе взаимосвязи между такими информационными категориями, как интересы покупателя, его друзья и история его покупок. С помощью высокодоступной графовой базы данных можно рекомендовать пользователям товары на основании того, какие товары приобретали другие пользователи, которые интересуются тем же видом спорта и имеют аналогичную историю покупок. Или можно найти людей, у которых есть общий знакомый, но которые еще не знакомы друг с другом, и предложить им подружиться.

- В схемотехнике (топология межсоединений элементов на печатной плате или микросхеме представляет собой граф или гиперграф).
- В химии (для описания структур, путей сложных реакций, правило фаз также может быть интерпретировано как задача теории графов);
- Можно составить граф любой **ПОЗИЦИОННОЙ ИГРЫ**: шахмат, шашек, «крестиков – ноликов».

- В строительстве графы используются при планировании проведения работ. Граф, изображенный на чертеже, называется сетевым графиком строительства. В данном случае он составлен для строительства жилого дома. Вершины этого графа обозначают отдельные виды работ на стройке, кроме того, есть еще две вершины: начало строительства и его окончание. Если на ребрах графа нанесены стрелочки, указывающие направление ребер, то такой граф называется направленным.



- Около вершины графа указаны числа – продолжительность в днях соответствующей работы. Теперь мы можем узнать наименьшую возможную продолжительность строительства. Для этого из всех путей по графу в направлении стрелок нужно выбрать путь, у которого сумма чисел при вершинах наибольшая. Он называется критическим путем (на чертеже большая стрелка). В нашем случае получаем 170 дней. А если сократить время прокладки электросети с 40 до 10 дней, то и время строительства сократится на 30 дней? Нет. В этом случае критический путь станет проходить не через эту вершину, а через вершины, соответствующие строительству котлована, укладке фундамента и т. д. И общее время строительства составит 160 дней, т. е. срок сократится лишь на 10 дней.

# Графы и комбинаторика

- Чтобы сделать рациональный выбор, важно не пропустить ни один из них. Для этого надо осуществить перебор всех возможных вариантов или хотя бы подсчитать их количество. Такого рода задачи называют комбинаторными, а соответственно раздел математики – комбинаторика.



