Курс ФИЗИКИ
2 часть

- Колебания и волны
- Волновая и квантовая оптика
- Основы квантовой физики

Структура курса и формы работы

2 семестр

1. Механика
2. Молекулярная физика и термодинамика
3. Электродинамика

экзамен

3 семестр

4. Колебания и волны
5. Оптика
6. Основы квантовой физики

экзамен

Формы работы

- Лекции
- Лабораторные работы
- Решение задач
- САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ работа

Формы аттестации

- Тестирования (входное, итоговое)
- Выполнение и защита РГР (в ИС)
- Экзамен

Допуск к экзамену

- Выполнение и защита лабораторных работ
- Выполнение и защита РГР (в ИС)

Балльно-рейтинговая система

Аудиторная активность:

- **Лекции** (за каждую лекцию)
  - **посещение, конспект – 0,5 балла**
  - **активная работа, ответы на все контрольные вопросы – 1,5**
- **Лабораторные работы** (за каждую работу) **(выполнение, расчет и защита) – от 3 до 5**
- **Решение задач** (за каждое занятие)
  - **посещение, пассивная работа – 0,5**
  - **активная работа, решение задач у доски – 1,5**

Самостоятельная работа

- **Решение задач** (в информационной системе) – по **2** за уровень
- **Тестирования**

ДОПОЛНИТЕЛЬНО: Творческая работа

- **Участие в работе студенческой конференции**
- **Участие в олимпиадах по физике**

Итоги

≥ 80% + выступление на конференции или участие в олимпиаде – «ОТЛИЧНО»

≥ 70% – «ХОРОШО»

Что **важно** при работе с информацией

- **не только слУшать, но слЫшать**
- **уметь читать – понимать прочитанный текст**
- **искать и находить нужную информацию**
- **критически ее оценивать**, т.е. **информация** должна быть **достоверной**
- **выделять главную мысль**
- **анализировать, систематизировать, делать свои выводы**

ДУМАТЬ СВОЕЙ ГОЛОВОЙ !

Московский автомобильно-дорожный
государственный технический университет (МАДИ)
Курс физики для бакалавров технических вузов

Колебания и волны

- **Колебания**
  - Гармонические колебания
  - Сложение колебаний
  - Затухающие колебания
  - Вынужденные колебания
- **Волны**
  - упругие волны
  - электромагнитные волны

Бахтина Елена Юрьевна,
к.ф.-м.н., доц. каф. физики
elbakh@gmail.com

Структура раздела

Классификация колебаний

Энергия колебаний

Гармонические колебания

Сложение колебаний

Гармонические осцилляторы

Влияние внешних сил на колебания

Вынужденные колебания

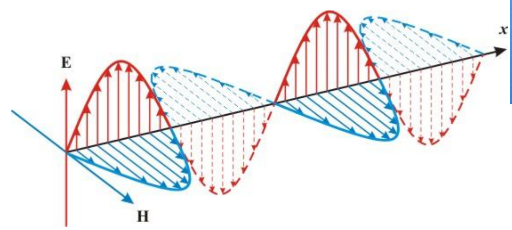
Колебания в природе и технике

Примеры:

- **Сердце**
- **Узлы двигателей** с вращательно-поступательными движениями
- **Амортизационные системы**
- **Балки и перекрытия**
- **Электрические цепи**
- **…**

Физическая природа колебаний:

- **Механические** колебания
- **Электромагнитные** колебания
  - **биологические** колебания
- **…**



Колебательные явления различной физической природы подчиняются общим закономерностям

описываются одинаковыми уравнениям

Классификация колебаний

По физической природе и типу колеблющейся величины

Физическая природа колебаний	Колеблющаяся величина
Механические	

Классификация колебаний

По характеру воздействия на колеблющуюся систему

Колебания

Свободные (собственные)

происходят под действием **внутренних сил системы**, после того, как она была выведена из состояния равновесия

Вынужденные

под действием **внешних периодически изменяющихся сил**

Автоколебания

Параметрические

Релаксационные

…

Затухающие

Незатухающие

Гармонические

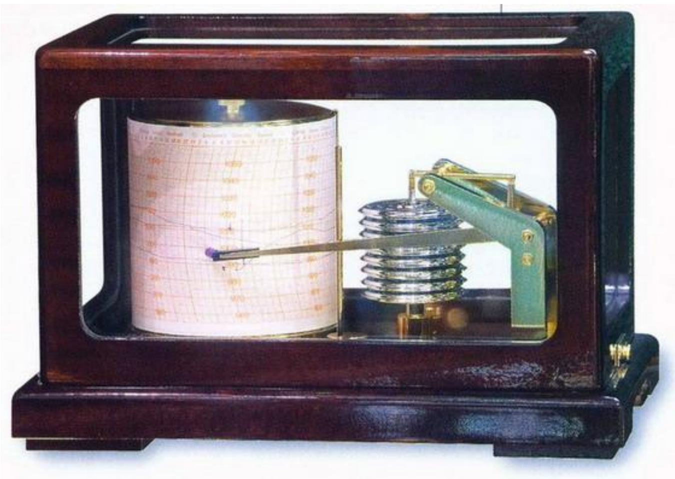
по закону sin (cos)

Регистрация колебаний

Самописец

В основе:

пишущий узел + колебательная система



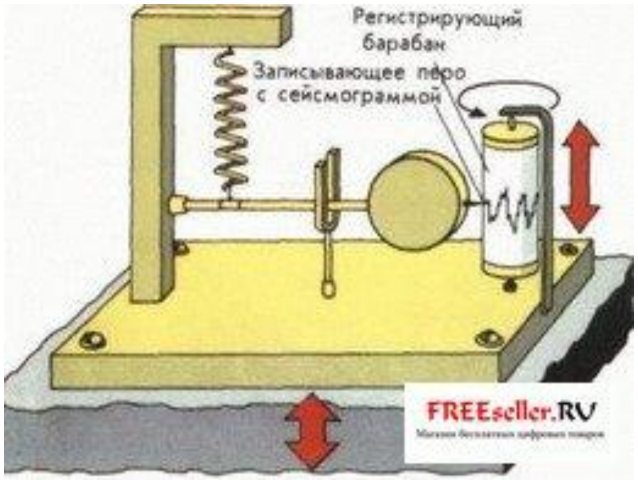
Пример использования:

- **Музейные регистраторы влажности, температуры, давления**
- **Кардиографы**

Сейсмограф

В основе:

Массивный груз; колеблется шкала со штангой



- **Регистрация колебаний поверхности Земли**

Электронный осциллограф

Узкий пучок электронов в вакуумированной трубке, отклоняющийся вертикальной и горизонтальной пластинами

- **Регистрация электрических колебаний**

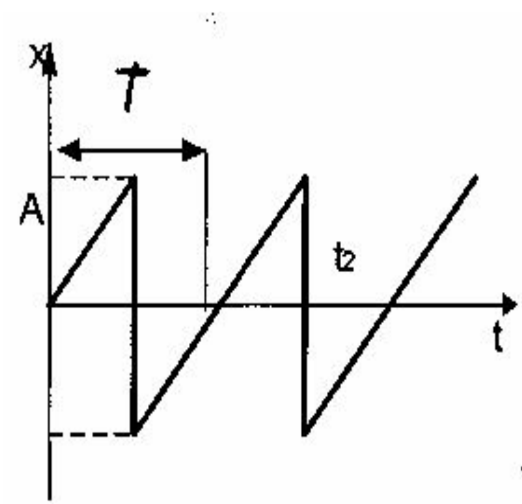
Колебания

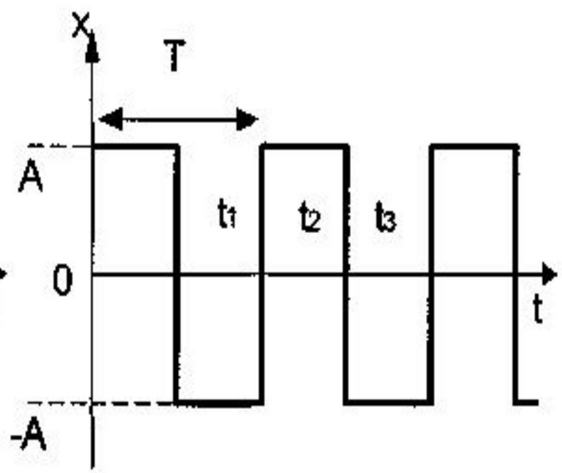
Колебание	процесс изменения состояний системы, повторяющийся в той или иной степени
Периодический процесс	процесс, повторяющийся в точности через **определенный** промежуток времени

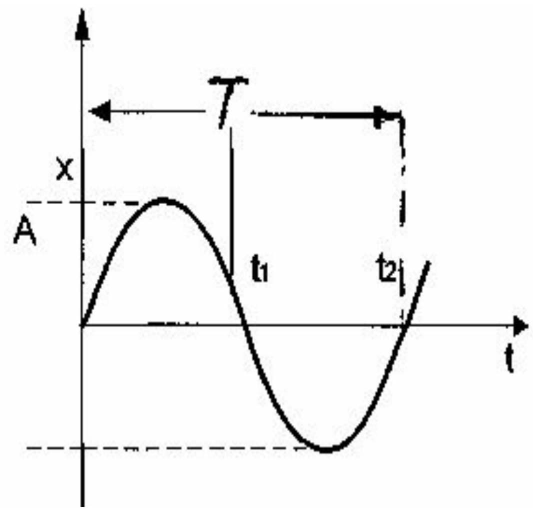
закон движения тела, совершающего колебания

$$x(t) = x(t + nT)$$

Некоторая периодическая функция времени





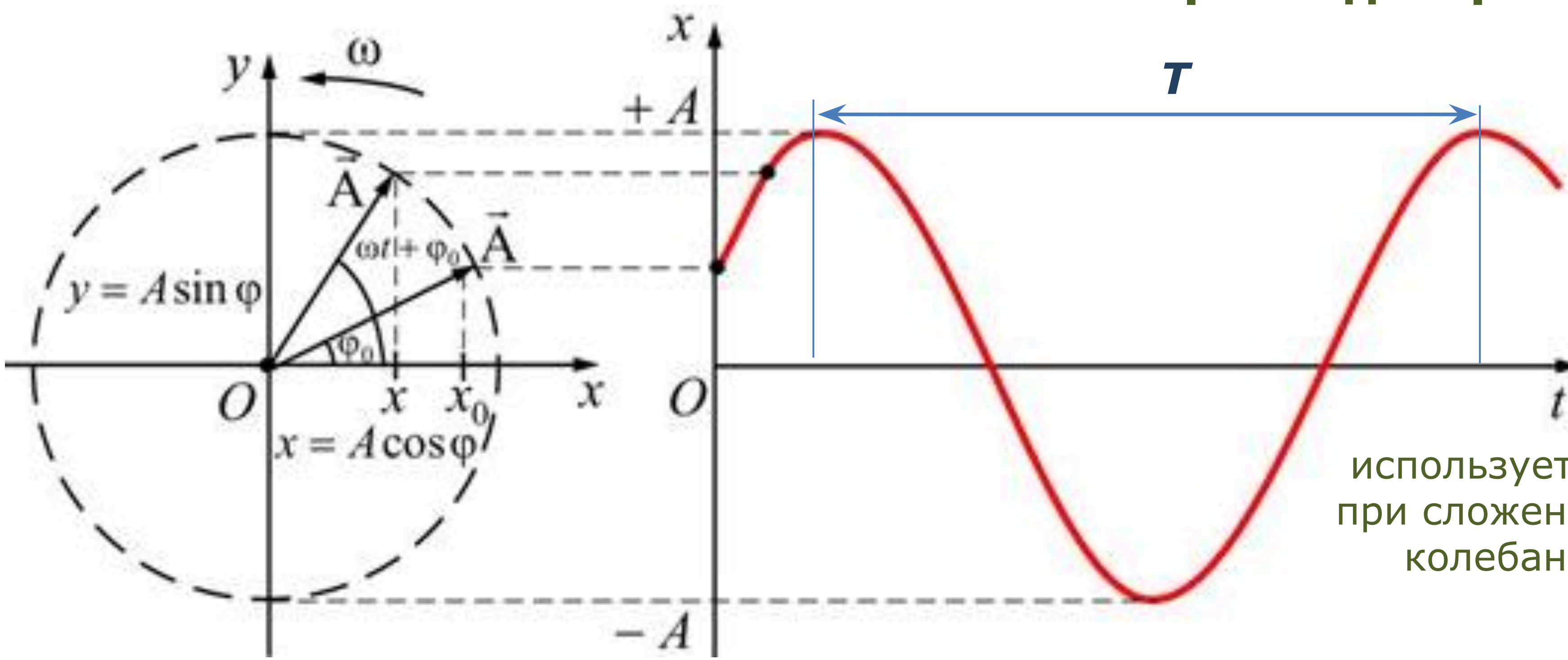


Графическое изображение этой функции → наглядное представление о протекании колебательного процесса во времени

Связь вращательного движения с колебаниями

Пусть стержень длиной *A* вращается с угловой скоростью *ω*

Метод векторных диаграмм



используется при сложении колебаний

При *t*=0 стержень образует угол φ_0 с осью *x*

значения проекций на оси:

В произвольный момент времени: $\varphi = \omega t + \varphi_0$

и

Гармонические колебания

Колебания, совершающиеся по закону sin или cos

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

фаза колебаний
$\varphi = \omega t + \varphi_0$

смещение тела от положения равновесия в момент времени t

амплитуда колебаний (max смещение тела от положения равновесия)

циклическая (круговая) **частота колебаний**

время

начальная фаза колебаний (при $t = 0$)

Рассмотрение гармонических колебаний важно т.к.:

1. **колебания, встречающиеся в природе и технике, часто имеют характер, близкий к гармоническому**
2. **различные периодические процессы можно представить как наложение гармонических колебаний**

Характеристики колебательного движения

x смещение тела от положения равновесия

x_m, A **Амплитуда колебаний** максимальное смещение тела от положения равновесия

ω **циклическая** (круговая) **частота колебаний** $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

угловая скорость
при вращательном движении

t время колебаний

$\varphi = \omega t + \varphi_0$ фаза колебаний

φ_0 начальная фаза колебаний (при t=0)

$$\boxed{\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}}$$

T **Период колебаний** **время**, в течение которого происходит **одно полное колебание** $\boxed{\omega T = 2\pi}$

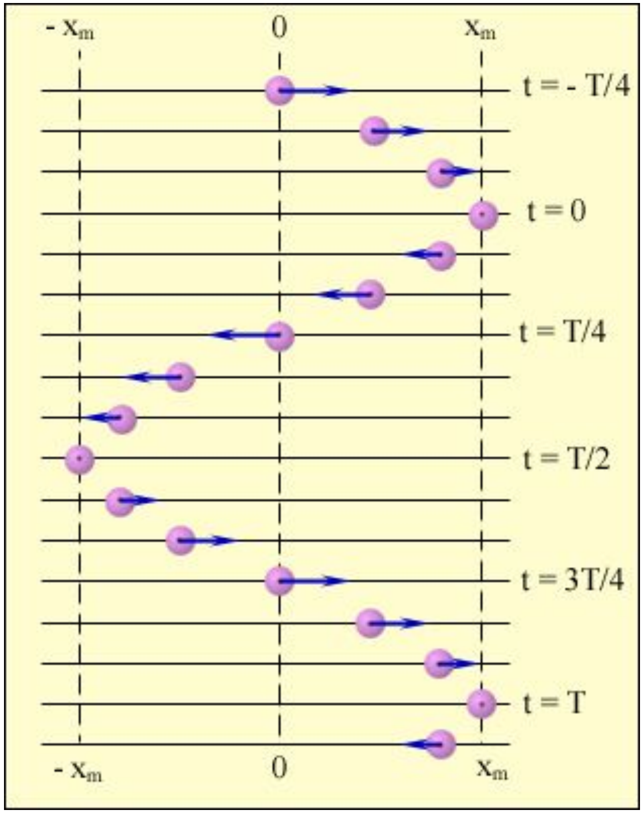
фаза колебания получает приращение 2п

ν , f **Частота колебаний** количество колебаний в единицу времени $\boxed{\nu = \frac{1}{T}}$

[T]=c

[ν]=c^{-1}=Гц

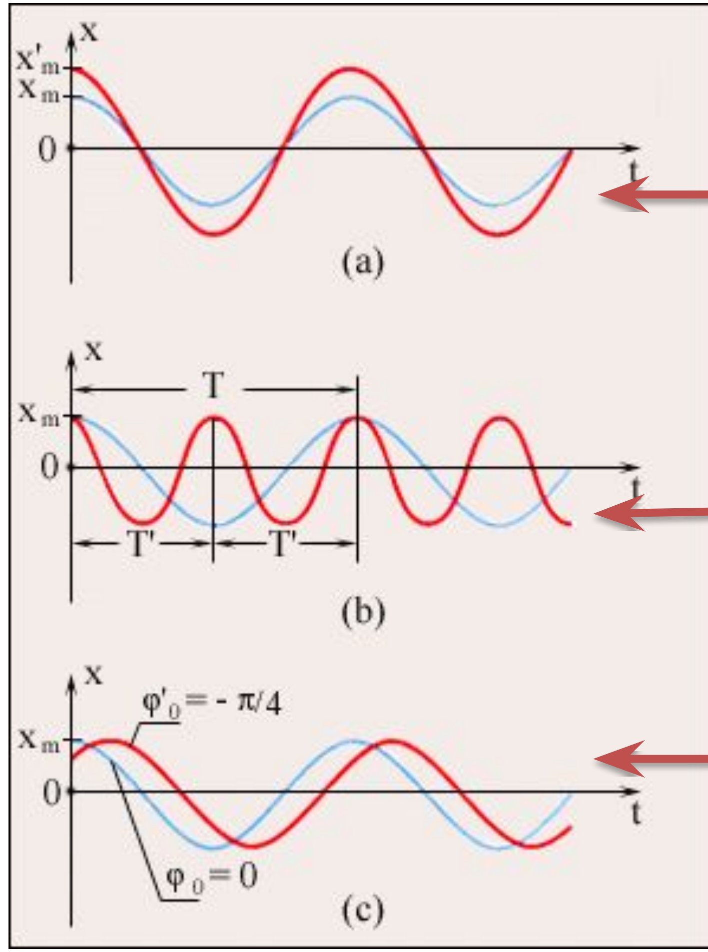
Графики гармонического колебания



Стробоскопическое изображение гармонических колебаний

Интервал времени между последовательными положениями тела

τ= T / 12



Графики отличаются:

амплитудой

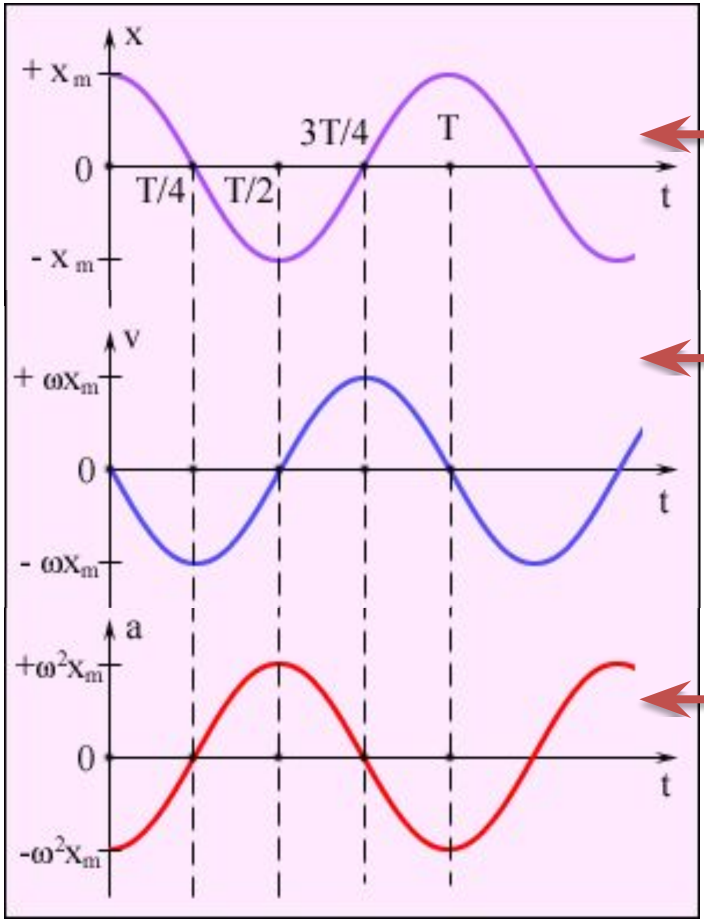
периодом

начальной фазой

Вектор скорости $\vec{v}$ направлен всегда вдоль *OX*

Графики гармонического колебания

Графики **для тела, совершающего гармонические колебания**



координаты

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

скорости $v(t) =$

$$v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) =$$

ускорения $a(t) =$

$$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) =$$

Знак «-»:

ускорение всегда имеет знак, ↑↓ знаку смещения x(t)

сила, заставляющая тело совершать гармонические колебания, **направлена всегда в сторону положения равновесия**

Гармонические колебания

Общая черта всех колебаний:

при выведении системы из положения равновесия возникает возвращающая сила *F* (квазиупругая):

- **стремящаяся возвратить тело в положение равновесия**
- **пропорциональная смещению тела из положения равновесия колебаний**
- **направленная в сторону, ↑↓ смещению**

Если **возвращающая сила ПЕРИОДИЧЕСКАЯ** $\xrightarrow{\text{то}}$ **колебания ГАРМОНИЧЕСКИЕ**

Гармонический осциллятор

Осциллятор

Колебательная система

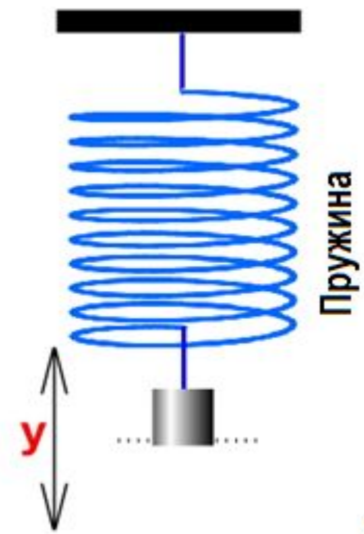
– это **физическая система, совершающая колебания**

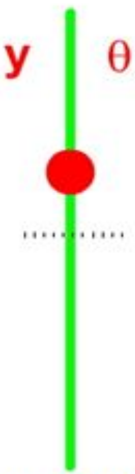
Колебания гармонического осциллятора –

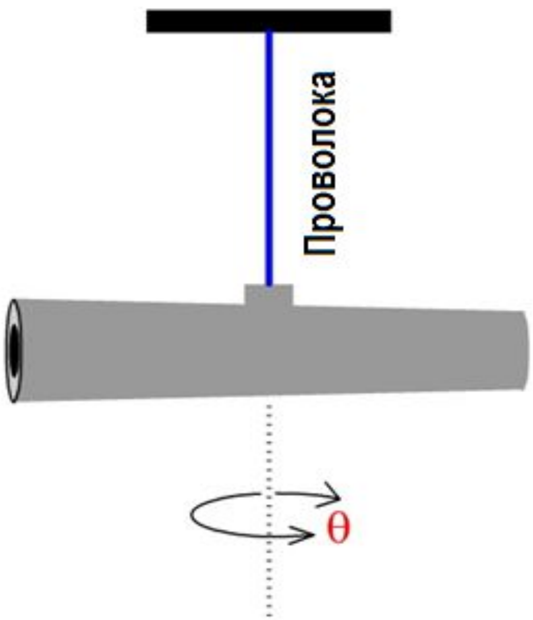
- **важный пример периодического движения**
- **служат** точной или приближенной **моделью во многих задачах классической и квантовой физики**

Примеры гармонического осциллятора:

- пружинный маятник
- физический маятник
- математический маятник
- колебательный контур
- …

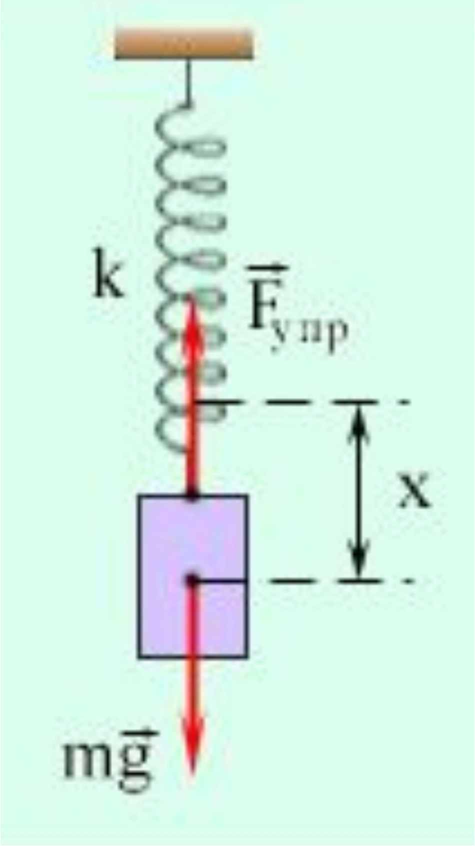




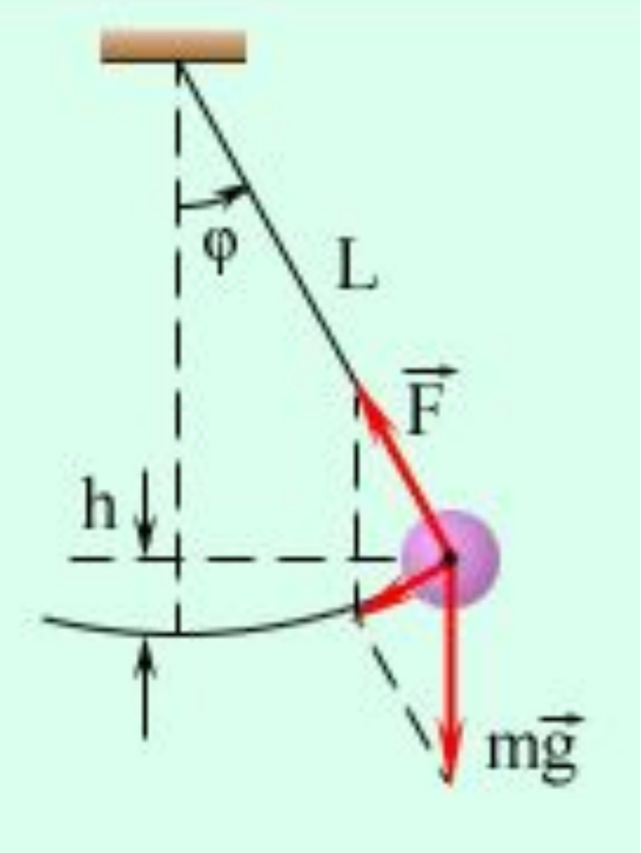


Механические колебательные системы

Примеры простых механических колебательных систем

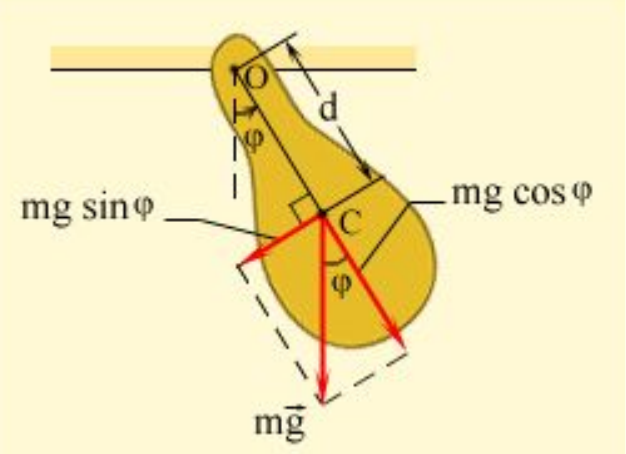


Пружинный маятник –
груз на пружине

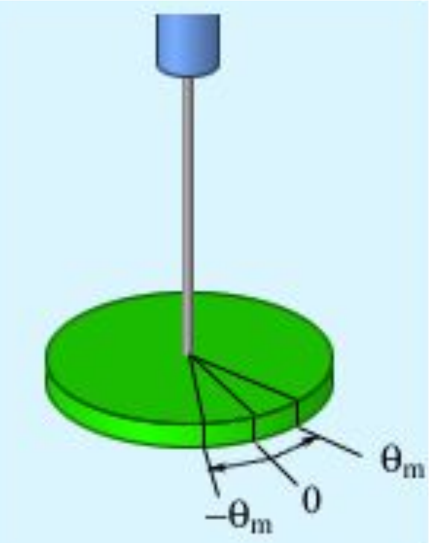


Математический маятник –
груз на невесомой нерастяжимой нити

идеализация



Физический маятник

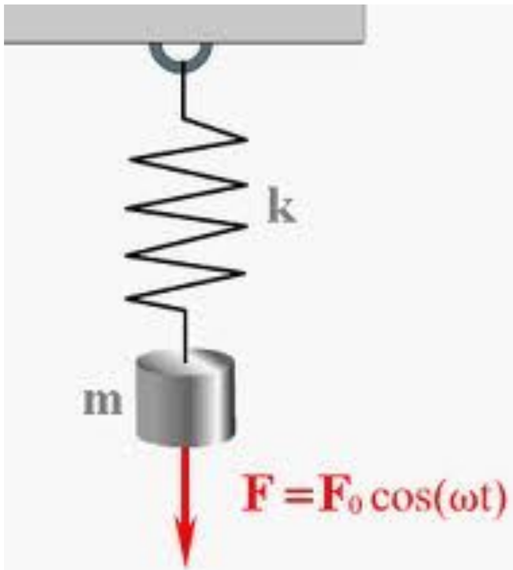


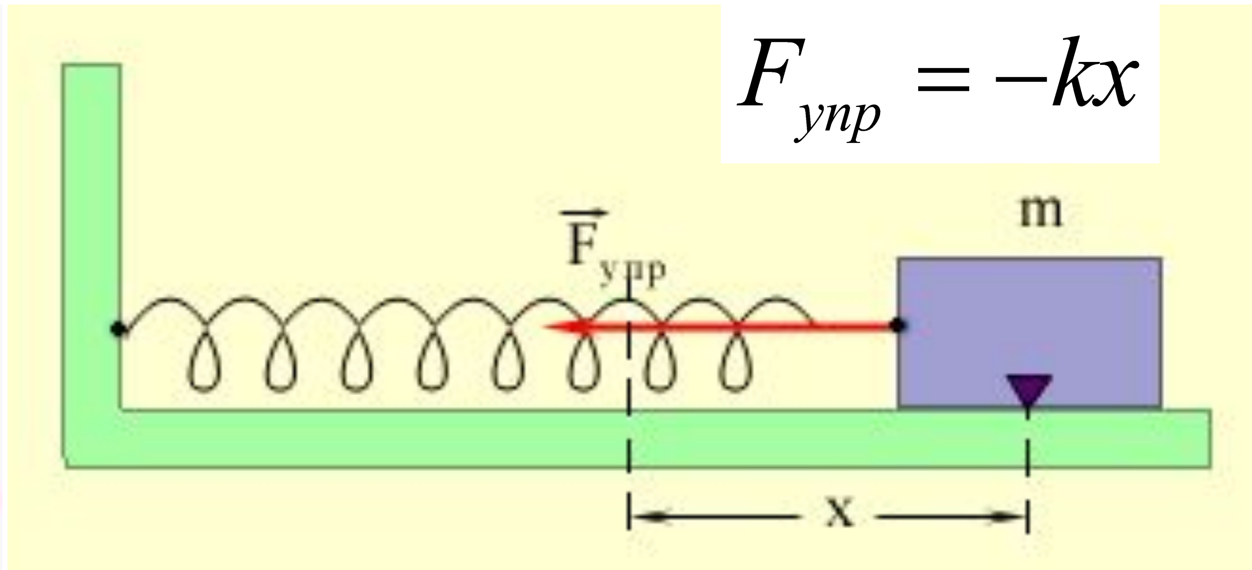
Крутильный маятник

Пружинный маятник

Груз массой *m*, прикрепленный **к пружине жесткости *k***

Колебания происходят под действием упругой силы





$$F_{упр} = -kx$$

При горизонтальном расположении (груз скользит по поверхности)

***F*$_{тяж}$ компенсируется силой реакции опоры**

При вертикальном расположении (груз висит на пружине)

$$x_0 = \frac{mg}{k}$$

***F*$_{тяж}$ направлена по линии движения груза**

В положении равновесия пружина растянута на x_0

Пружинный маятник

Закон Гука $F = -kx$

II з-н Ньютона $ma = -kx$

$$mx'' = -kx$$

$$mx'' + kx = 0$$

$$x'' + \boxed{\frac{k}{m}}x = 0$$

Дифференциальное уравнение:

$$\boxed{x'' + \omega_0^2 x = 0}$$

где $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$

Решение диф.уравн.

$$\boxed{x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

Круговая частота колебаний $\boldsymbol{\omega_0}$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Период гармонических колебаний груза на пружине

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} =$$

Потенциальная энергия

$$\boxed{E_n = \frac{kx^2}{2}}$$

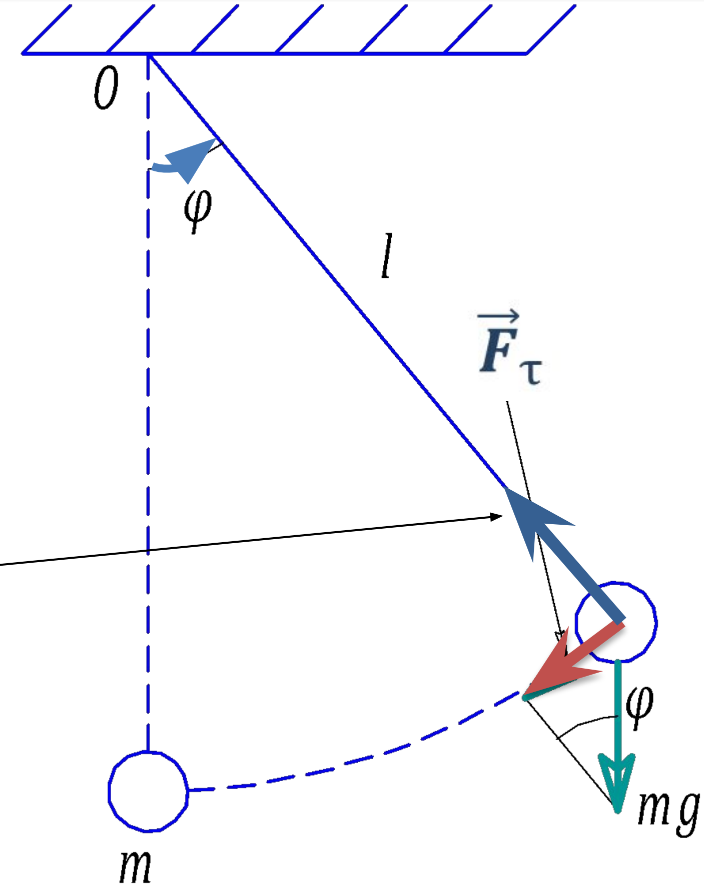
Границы применимости:

масса пружины мала по сравнению с массой тела

Математический маятник

Материальная точка, подвешенная на нерастяжимой невесомой нити, колеблющаяся под действием $F_{тяж}$

Идеализированная система **!**



В положении равновесия (маятник висит по отвесу), **сила тяжести**

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

уравновешивается силой натяжения нити

$$\vec{F}_{упр}$$

При отклонении маятника на *φ* появляется **касательная составляющая $\vec{F}_\tau$**

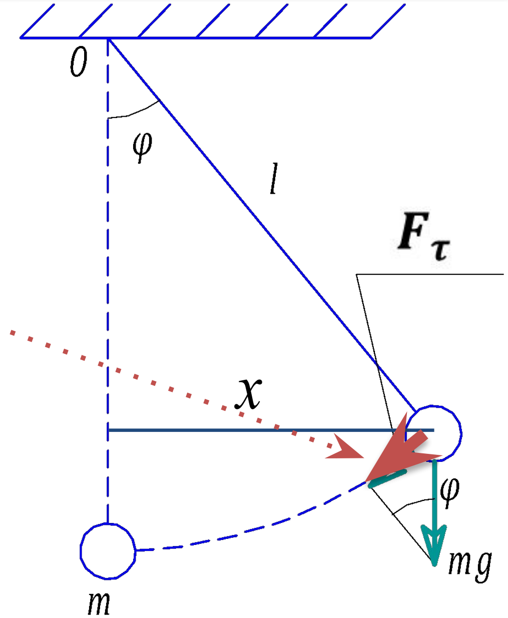
$$\boxed{F_\tau = -mg\sin\varphi}$$

Знак «-»: **направления $\vec{F}_\tau$ и $\vec{\varphi}$ всегда ↑↓**

Линейное смещение маятника x

Угловое смещение маятника φ

Математический маятник



По II закону Ньютона

$$ma = F_\tau =$$

В общем случае **математический маятник** представляет собой **сложную нелинейную систему**

при больших амплитудах (углах) колебания НЕ являются гармоническими !

при малых углах $\sin\varphi \approx \boxed{tg\varphi = \frac{x}{l}}$

$$m\ddot{x} = -mg\frac{x}{l}$$

$$\ddot{x} + \boxed{\frac{g}{l}}x = 0$$

$$\boxed{\ddot{x} + \boxed{\omega_0^2}x = 0}$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0}$$

Дифференциальное уравнение колебаний математического маятника

Круговая частота

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

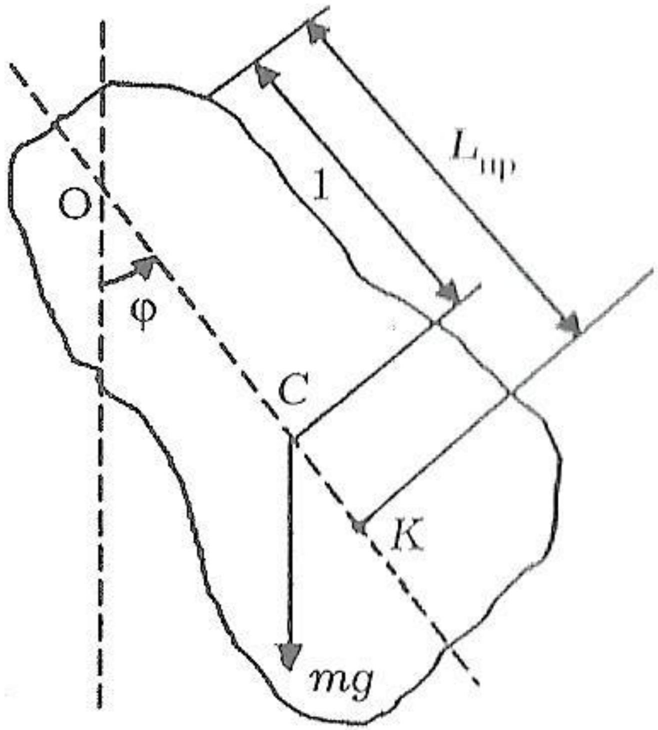
Период колебаний

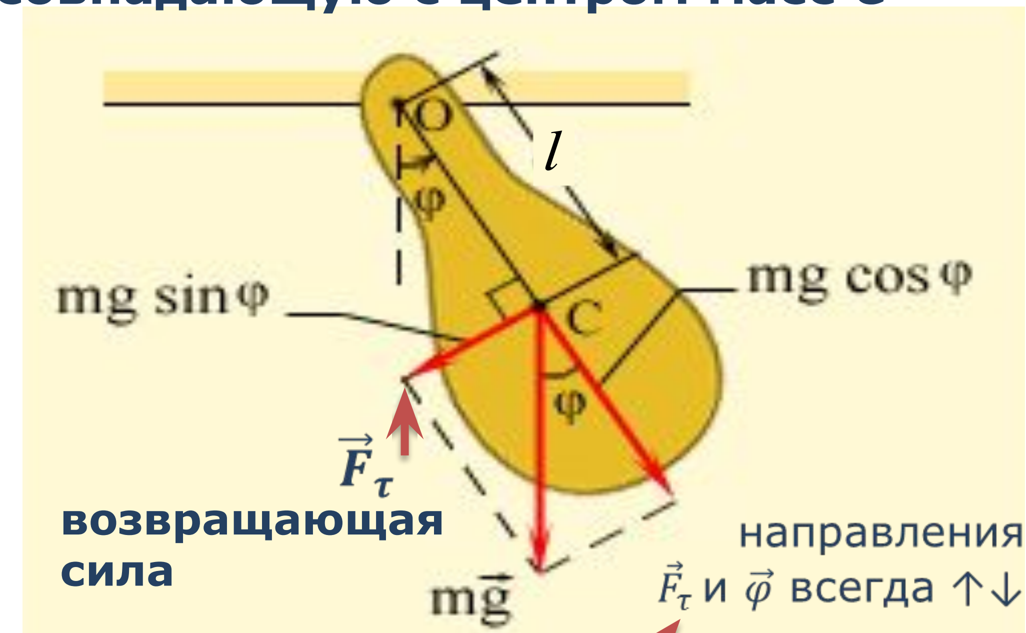
$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

НЕ зависит от массы!

Физический маятник

Твердое тело, совершающее под действием $F_{тяж}$ колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через т.О, НЕ совпадающую с центром масс *C*





$$\vec{M} = \left[\vec{l} \times \vec{F}_\tau\right] = \boxed{-}\, l \cdot mg\sin\varphi$$

Основной закон динамики вращательного движения:

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}$$

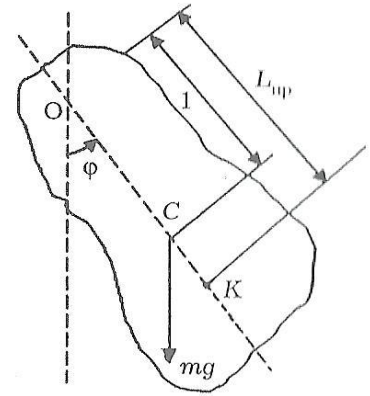
M **– момент возвращающей силы (силы тяжести)**

J **– момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса**

Физический маятник

Основной закон динамики вращательного движения

$$M = J\varepsilon$$



$$J\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{J}\sin\varphi = 0$$

для малых углов

$$\sin\varphi \approx \varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \boxed{\frac{mgl}{J}}\varphi = 0$$

Круговая частота

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$$

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} =$$

приведенная длина физического маятника

$$L = \frac{J}{ml}$$

$$l_{пр},\ L_{пр}$$

длина такого математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний данного физического маятника

Дифференциальное уравнение колебаний

$$\ddot{\varphi} + \boxed{\omega_0^2}\varphi = 0$$

$$T_{мат} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{пр}}{g}} = T_{физ} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl_{ф}}}$$

Физический маятник

Центр качаний физического маятника

т.*K* на продолжении прямой *OC*, отстоящая от подвеса т.*O* маятника на расстоянии приведенной длины *L*

по теореме Штейнера:

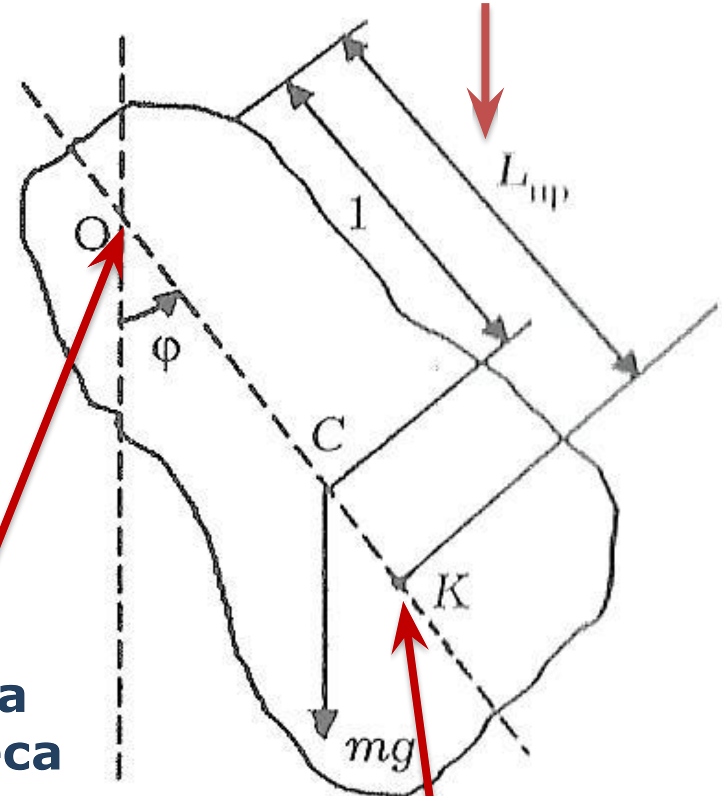
$$L=\frac{J}{ml}=\frac{J_C+ml^2}{ml}=l+\frac{J_C}{ml}>l$$

всегда $OK>OC$ или $L>l$

точка подвеса *O* и центр качаний *K* взаимозаменяемы:

если точку подвеса перенести в центр качаний, то прежняя точка *O* подвеса станет новым центром качаний, и *T*=const

приведенная длина физического маятника



точка подвеса

центр качания

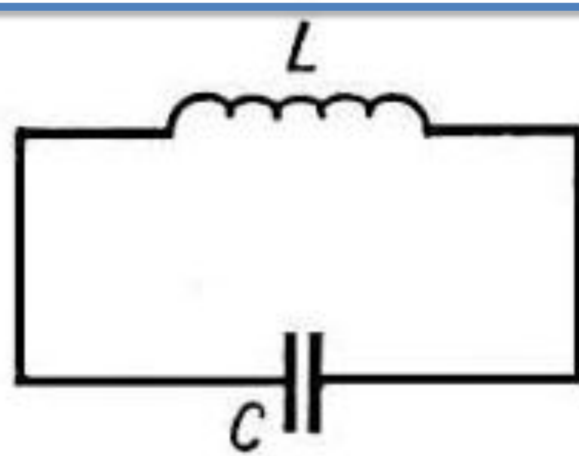
ЭМ колебательный контур

II закон Кирхгофа

$$U_c = ЭДС_{самоинд.}$$

$$\frac{q}{C} = -L\dot{I} = -L\ddot{q}$$

$$\ddot{q} + \boxed{\frac{1}{LC}}\, q = 0$$



Круговая частота

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

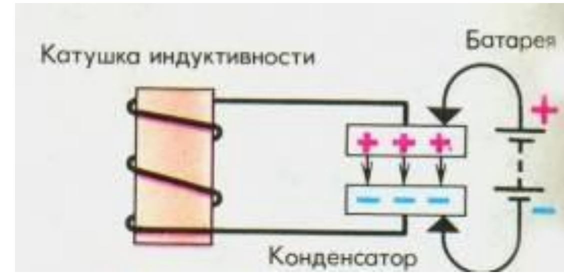
Период колебаний

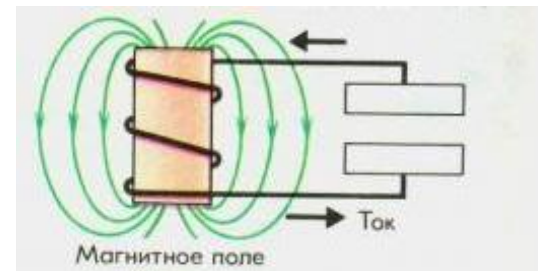
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

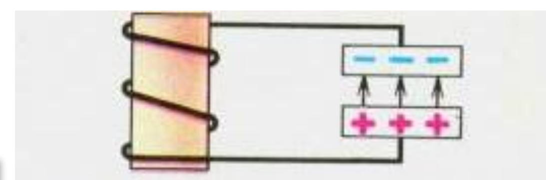
Формула Томсона, 1853 г.

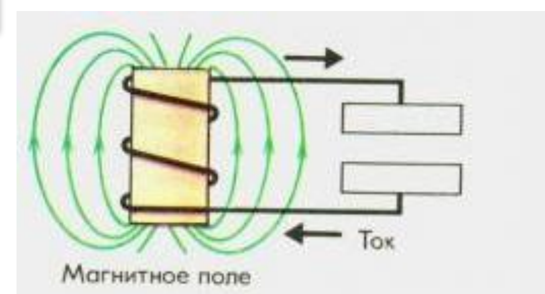
Дифференциальное уравнение колебаний

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$



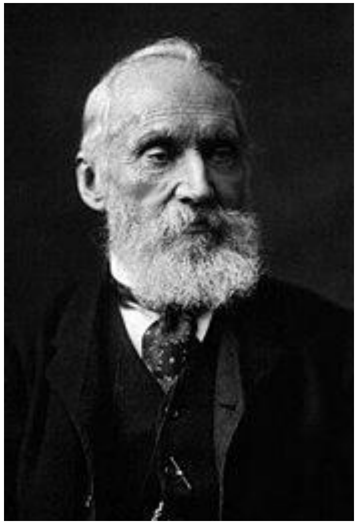






Уильям Томсон, лорд Кельвин

William Thomson,
1st Baron Kelvin



- Британский физик и механик
- Основные работы в области термодинамики, механики, электродинамики
- В его честь названа единица термодинамической температуры
- в 22 года – заведующий кафедрой теоретической физики в университете в Глазго
- 1880–1882 – президент Лондонского королевского общества физиков

26.06.1824 –
17.12.1907,
Шотландия

Электрические колебания

Колебания заряда

$$\boxed{q = q_{\max}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

Колебания тока

$$i = \frac{dq}{dt} =$$

Колебания напряжения

$$U = \frac{q}{C} =$$

$$U_{\max} = \frac{q_{\max}}{C} = \frac{i_{\max}}{\omega C} =$$

Закон Ома $U = IR$

Волновое сопротивление $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$

Забегая немного вперед

Волновое сопротивление

В бесконечно длинных линиях нагрузка имеет чисто активный характер

энергия, запасаемая в индуктивности и емкости, одинаковая

$$\frac{LI_m^{\ 2}}{2} = \frac{CU_m^{\ 2}}{2}$$

Волновое сопротивление линии передач

$$R = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{U_m}{I_m}$$

U_m **- амплитуда напряжения волны** (падающей, отраженной или бегущей)

I_m **- амплитуда силы тока той же волны** (падающей, отраженной или бегущей)

Гармонический осциллятор

Итак, **дифференциальное уравнение гармонического осциллятора:**

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Другие виды записи

$$\boxed{x'' + \omega_0^2 x = 0}$$

$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}$$

Решение этого уравнения:

$$\boxed{x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

Уравнение гармонических колебаний

Собственная частота колебаний

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

пружинный маятник

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

математический маятник

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}}$$

электромагнитный колебательный контур

- **Собственная частота колебаний НЕ зависит от начальных условий, а определяется только внутренними свойствами осциллятора**

Квазиупругие силы

Теорема: **Чтобы система совершала гармонические колебания необходимо и достаточно, чтобы единственная сила, действующая в ней была КВАЗИУПРУГАЯ**, т.е. сила

- стремящаяся возвратить тело в положение равновесия
- пропорциональная смещению тела из положения равновесия колебаний
- направленная в сторону, ↑↓ смещению

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Таким свойством обладает **упругая сила в пределах применимости закона Гука**

$$F_{упр} = -kx = -m\omega_0^2 x$$

Силы любой другой физической природы, удовлетворяющие этому условию называют **квазиупругими**

с другой стороны, по II з-ну Ньютона $\boxed{F = ma = -m\omega_0^2 x}$ $a = -\omega_0^2 x$

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad a =$$

$$\boxed{F =} -\boxed{m\omega_0^2} x = -\boxed{k} x =$$

Контрольные вопросы

1. **Как изменится период колебаний пружинного маятника при увеличении массы груза в два раза?**
2. **Период колебаний пружинного маятника 10 с, масса груза 100 г. Определите жесткость пружины.**
3. В 1851 г. Жан Бернар Леон Фуко ставит опыт, подтверждающий вращение Земли (Пантеон, Париж). Подобные маятники были установлены и в других странах. **Маятник Фуко в Исаакиевском соборе совершал три колебания за одну минуту.**
   Определите длину этого маятника.

Фр. математик Пьер Луи Моро де Мопертюи, философ Вольтер (18 в.), астроном Камиль Фламмарион (19-20 вв.) – загадка **О «бездонном колодце»**: **что было бы с кем-то** (чем-то)**, упавшем в колодец, прорытый по оси от полюса до полюса** (сопротивлением пренебречь)

Энергия колебаний
гармонического осциллятора

Кинетическая энергия

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} =$$

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\upsilon = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Потенциальная энергия

пружинный

$$E_п = \frac{kx^2}{2} =$$

$$k = \omega_0^2 m$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

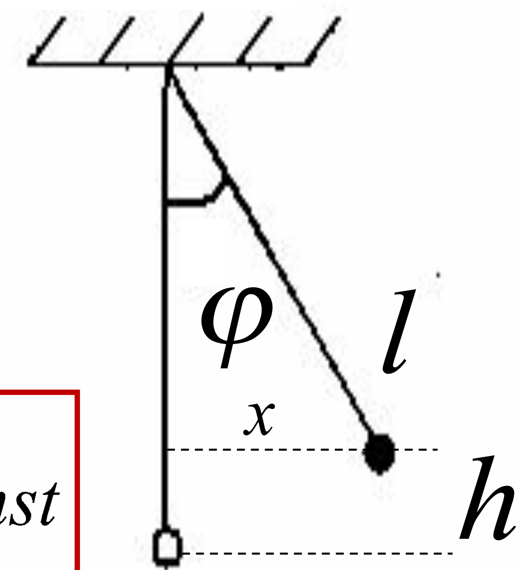
математический

$$E_п = mgh =$$

$$\boxed{h = \frac{x^2}{2l}}$$

Амплитудное значение энергии

$$\boxed{E_{\max} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}}$$



Закон сохранения энергии

Полная энергия

$$\boxed{E = E_к + E_п = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = \frac{kA^2}{2} = const}$$

Закон сохранения энергии (ЗСЭ)

В процессе колебаний:

$$E_{к} \rightleftarrows E_{п}$$

При наибольшем отклонении:

$$E = E_{п\,max}$$

При прохождении положения равновесия:

$$E = E_{к\,max}$$

ЗСЭ: ЭМ колебания

Колебания заряда

$$q = q_{\max}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Колебания тока

$$I = \frac{dq}{dt} =$$

Колебания напряжения

$$U = \frac{q}{C} =$$

$$\boxed{E = E_{эл} + E_{магн} = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2}}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$E =$$

$$\boxed{\frac{q_{\max}^2}{2C} = \frac{Lq_{\max}^2\omega_0^2}{2}}$$

Энергетическая характеристика колебаний

Интенсивность колебаний *I* — средняя энергия колебаний за период

Средняя кинетическая энергия

$$\overline{E}_{кин} = \frac{1}{T}\int_0^T E_{кин}(t)dt =$$

Средняя потенциальная энергия

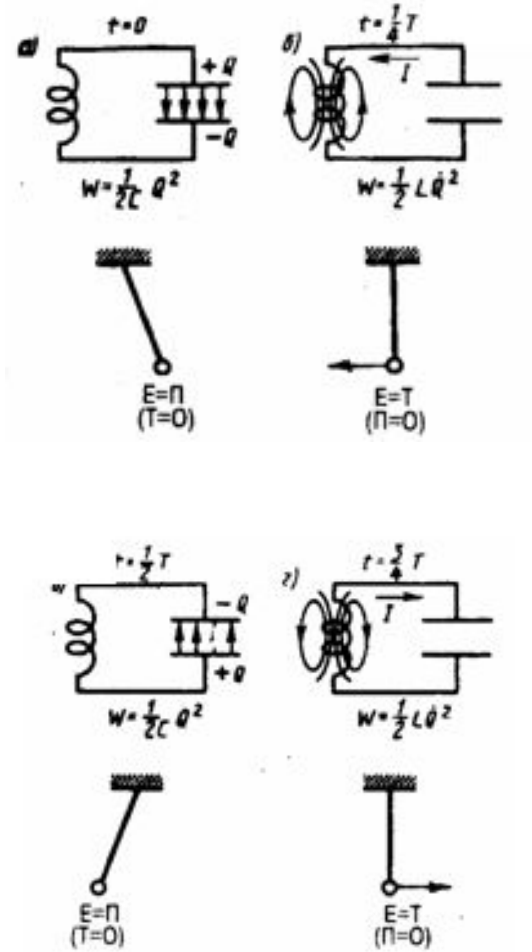
$$\overline{E}_{пот} = \frac{1}{2}E$$

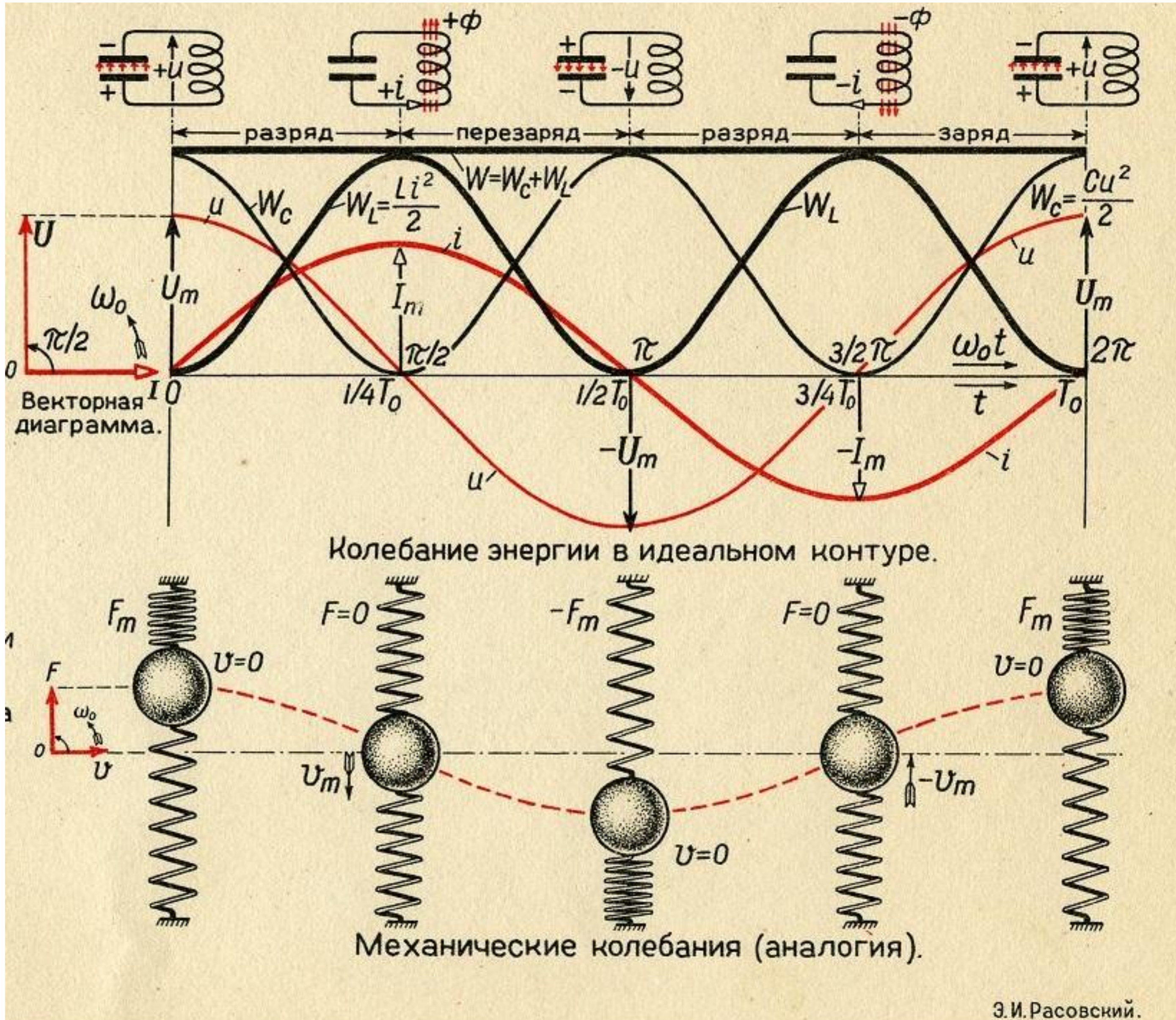
$$I = \overline{E} \sim A^2$$

Интенсивность колебаний пропорциональна квадрату амплитуды

Аналогии гармонических колебаний

Осмыслить самостоятельно!





Контрольный вопрос и задача

1. От чего зависит энергия колебательной системы?

2. Определить отношение кинетической энергии точки, совершающей гармонические колебания, к ее потенциальной энергии, если известна фаза колебаний

Сложение колебаний

Сложение колебаний

Сложение колебаний одинакового направления удобно проводить с помощью **метода векторных диаграмм**

система с ОДНОЙ степенью свободы

1. $\omega_1 = \omega_2 \quad \varphi_1 \neq \varphi_2 \quad A_1 \neq A_2$

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Результирующее колебание:

$$x = A\cos\big(\omega t + (\varphi_2 - \varphi_1)\big)$$

Амплитуда

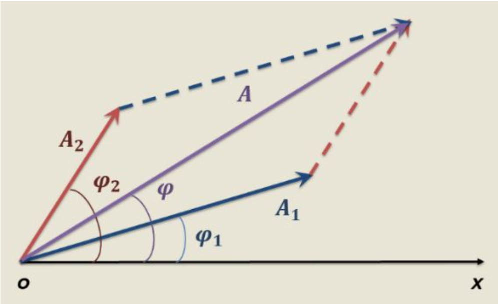
$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \boxed{\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

max: $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2$ при $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$

min: $A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2$ при $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$

Начальная фаза

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$$

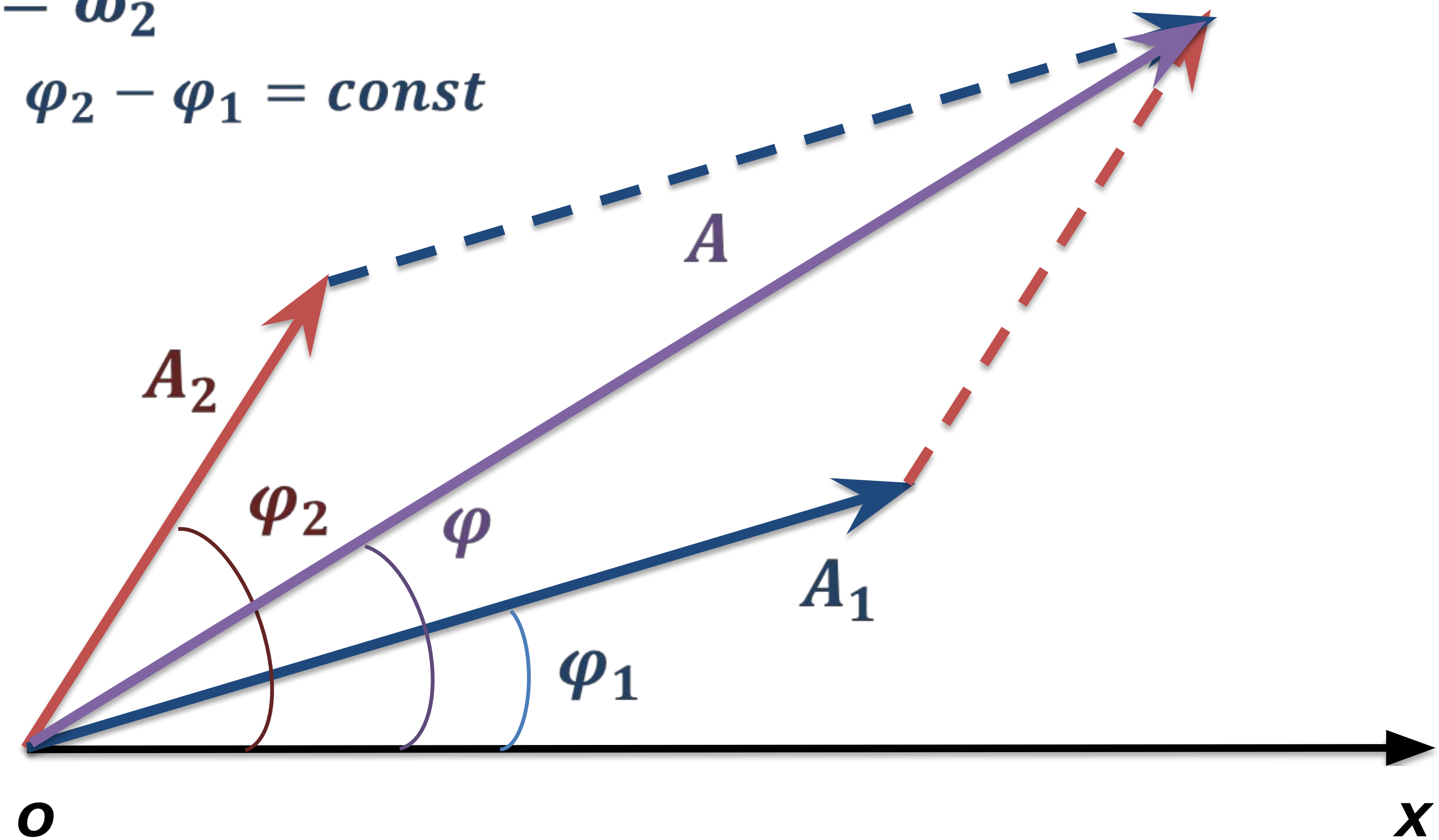


$OX \parallel OY$

Метод векторных диаграмм

$\omega_1 = \omega_2$

$\Rightarrow \quad \varphi_2 - \varphi_1 = const$



**Особенно полезен в оптике,
где световые колебания определяются
как результат сложения многих колебаний,
приходящих в данную точку от различных источников**

$OX \parallel OY$ **Сложение колебаний** в одной фазе

Колебания одинакового направления (коллинеарные)

1. $\omega_1 = \omega_2$ $\boxed{\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n}$ $n = 0, 1, 2, \ldots$

Четное количество π

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1 \Rightarrow$$

Амплитуда

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 = (A_1 + A_2)^2$$

$A = A_1 + A_2$ т.е. **Колебания усиливают друг друга**

Условие МАКСИМУМА

$OX \parallel OY$ Сложение колебаний в противофазе

Колебания одинакового направления (коллинеарные)

2. $\omega_1 = \omega_2$ $\boxed{\varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1)\pi}$ $n = 0, 1, 2, \ldots$

НЕчетное количество π

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1 \Rightarrow$$

Амплитуда

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 = (A_1 - A_2)^2$$

$A = A_1 - A_2$ т.е. **Колебания ослабляют друг друга**

при $A_1 = A_2$ $A = 0$ **колебания «гасят» друг друга**

Условие МИНИМУМА

$OX \parallel OY$

Сложение колебаний

Колебания одинакового направления (коллинеарные)
(Система с ОДНОЙ степенью свободы)

3. Частоты складываемых колебаний мало отличаются

$$\omega_1 \approx \omega_2 \qquad A_1 = A_2$$

$$x_1 = A\cos\omega t$$
$$x_2 = A\cos(\omega + \Delta\omega)t$$

Результирующее колебание:

$$x = x_1 + x_2 = 2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t \cdot \cos\frac{(2\omega + \Delta\omega)}{2}t$$

т.к. $\Delta\omega \ll \omega$ то $x \approx \boxed{2A\cos\frac{\Delta\omega t}{2}} \cdot \cos\omega t$

можно рассматривать как гармоническое колебание частоты ω, **амплитуда** которого медленно **изменяется по** некоторому **периодическому закону** (пульсирует)

биения

Частота биений

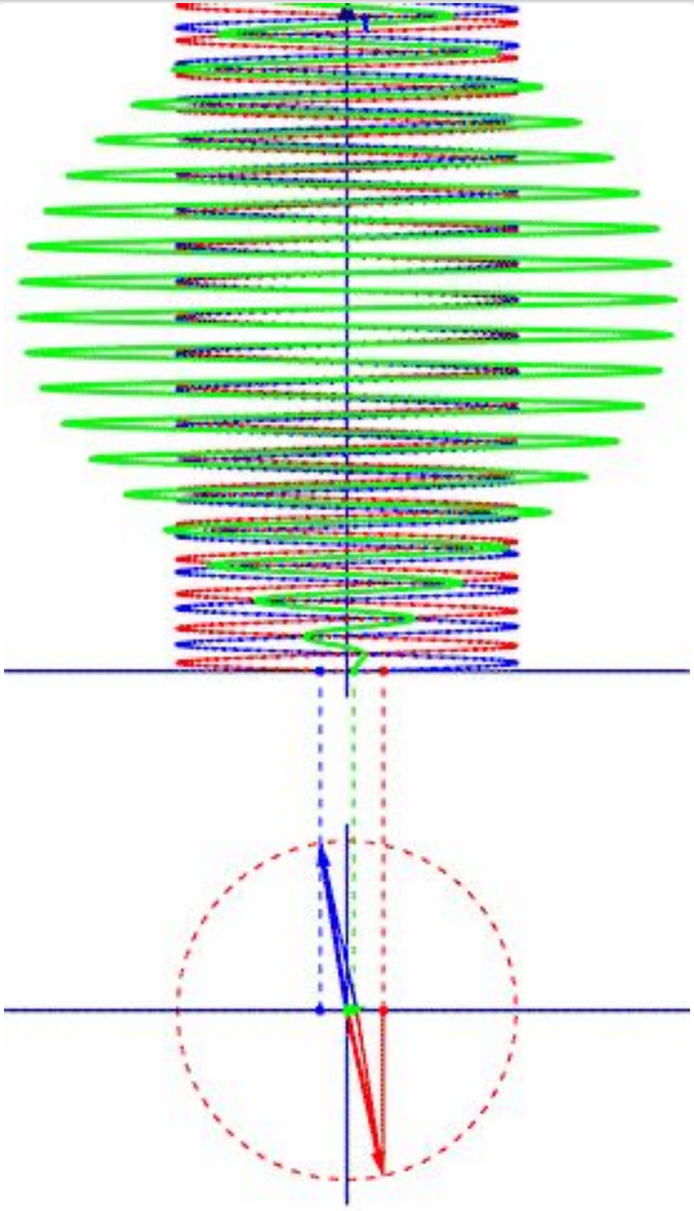
$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$$

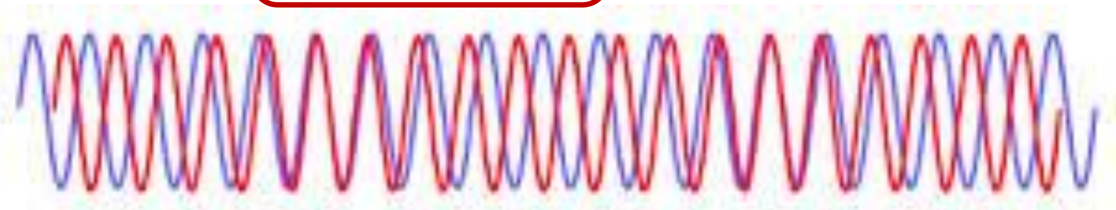
Биения

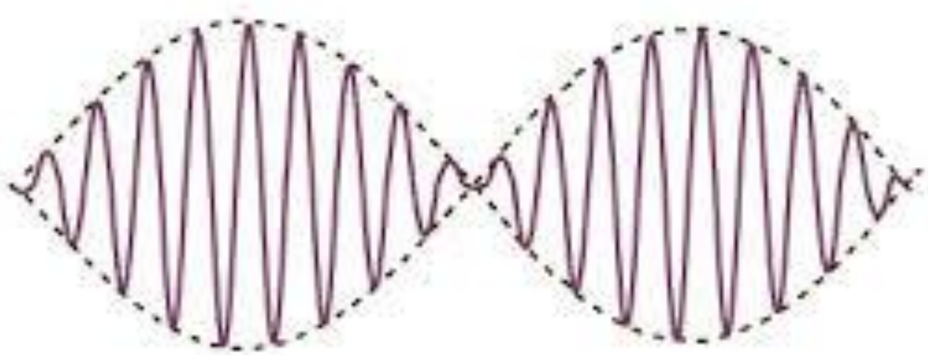
Биения явление, возникающее при наложении гармонических колебаний с близкими частотами, в результате которого возникает

гармоническое колебание частоты ω, **амплитуда** которого медленно **изменяется по** некоторому **периодическому закону** (пульсирует)

$$x \approx \boxed{2A\cos\frac{\Delta\omega t}{2}} \cdot \cos\omega t$$



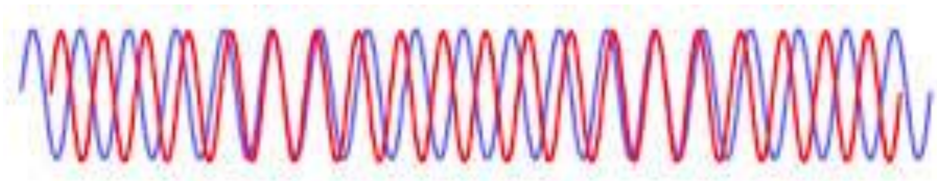




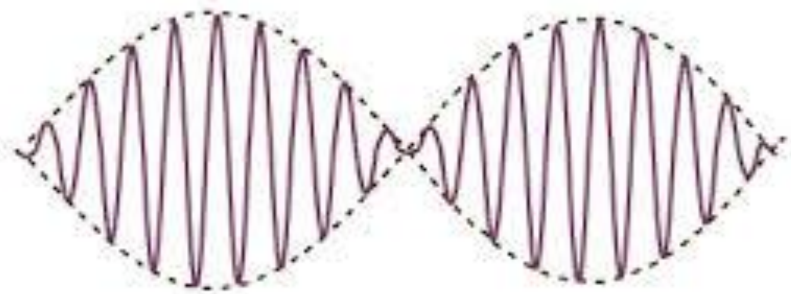
$OX \parallel OY$

Биения

Результирующее колебание



$$x \approx \boxed{2A\cos\frac{\Delta\omega t}{2}} \cdot \cos\omega t$$

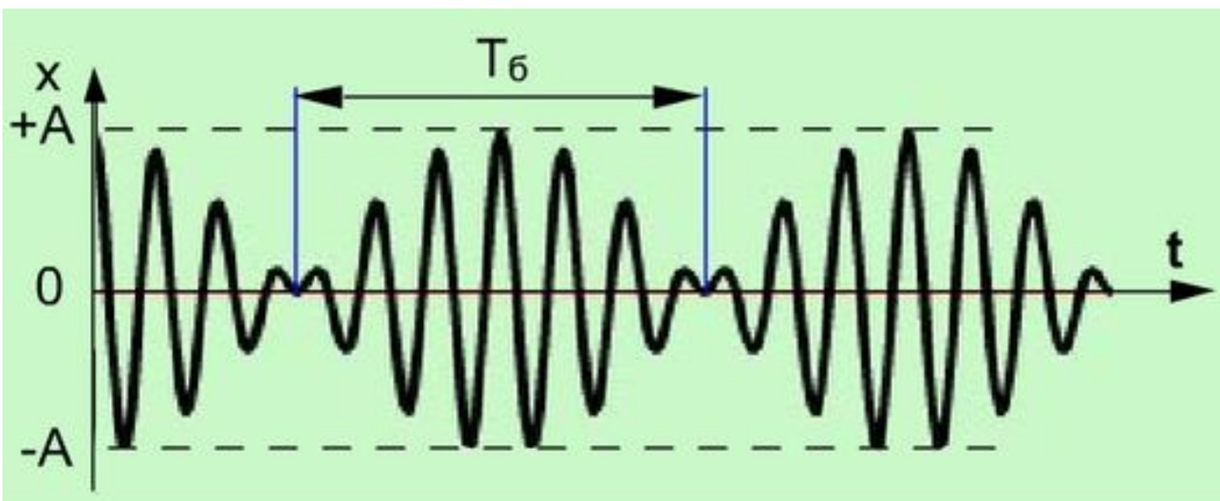


Переменная амплитуда

$$A(t) = 2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t$$

Период биений

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$



Частота биений

$$\Delta\,\omega = \omega_1 - \omega_2$$

Сложение колебаний

Колебания одинакового направления (коллинеарные)
(Система с ОДНОЙ степенью свободы)

4. Частоты складываемых колебаний РАЗЛИЧНЫ

$$\omega_1 \neq \omega_2$$

⇒ **векторы A_1 и A_2 будут вращаться с различной скоростью**

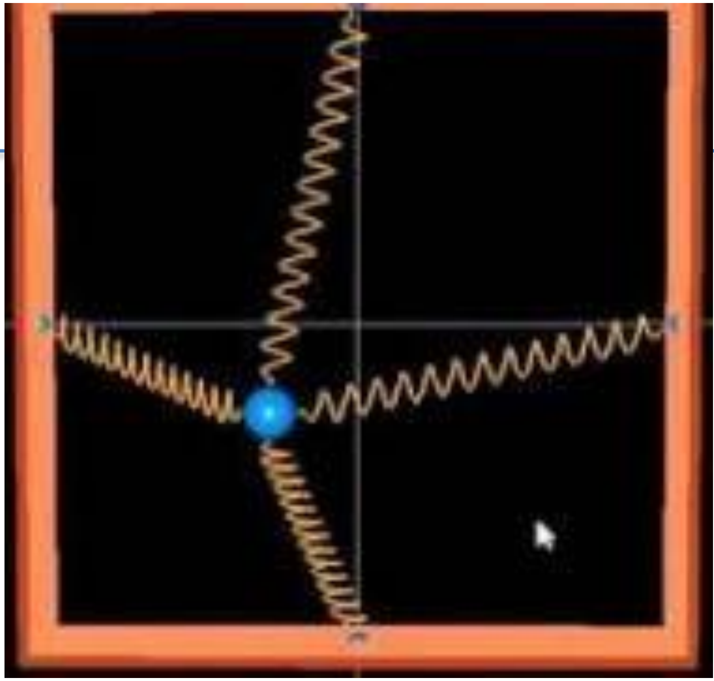
⇒ **величина и скорость вращения суммарного вектора будут изменяться со временем**

⇒ **результирующее колебание будет НЕГАРМОНИЧЕСКИМ**

Сложение колебаний

Взаимно перпендикулярные колебания (ортогональные)

Система с ДВУМЯ степенями свободы



- **Смещения малые** (выполняется закон Гука)

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_1)$$
$$y = B\cos(\omega t + \varphi_2)$$

- **Частоты равны** $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ➡

Результирующее колебание:

$$\frac{x^2}{\boxed{A^2}} + \frac{y^2}{\boxed{B^2}} - 2\frac{xy}{\boxed{AB}}\cos\boxed{(\varphi_2 - \varphi_1)} = \sin^2\boxed{(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

- в общем случае, точка будет совершать **периодические движения по эллиптической траектории**
- направление движения вдоль траектории и ориентация эллипса относительно осей зависят от разности фаз

Сложение колебаний (вывод уравнения)

$$x = A\cos(\omega t + 0)$$

$$y = B\cos(\omega t + \alpha)$$

$$\alpha = \Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\cos\omega t = \qquad \sin\omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$$

$$\frac{y}{B} = \cos(\omega t + \alpha) =$$

$$\Rightarrow \frac{y}{B} = \frac{x}{A}\cos\alpha - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}\sin\alpha$$

после преобразований получим:

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{B} - \frac{x}{A}\cos\alpha\right)^2 = \sin^2\alpha - \frac{x^2}{A^2}\sin^2\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos\alpha = \sin^2\alpha}$$

$OX \perp OY$

Сложение колебаний

Взаимно перпендикулярные колебания (ортогональные)

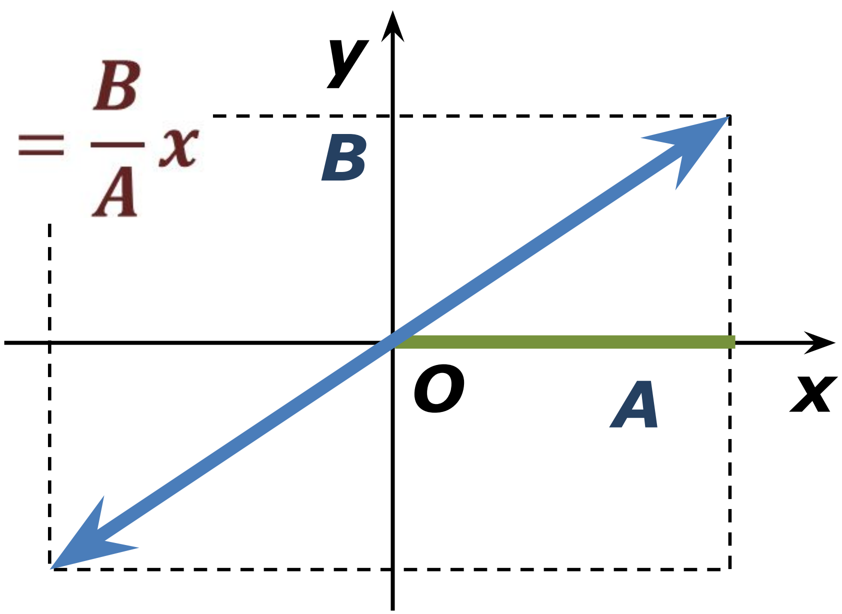
$$\omega_1 = \omega_2$$
$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi$$

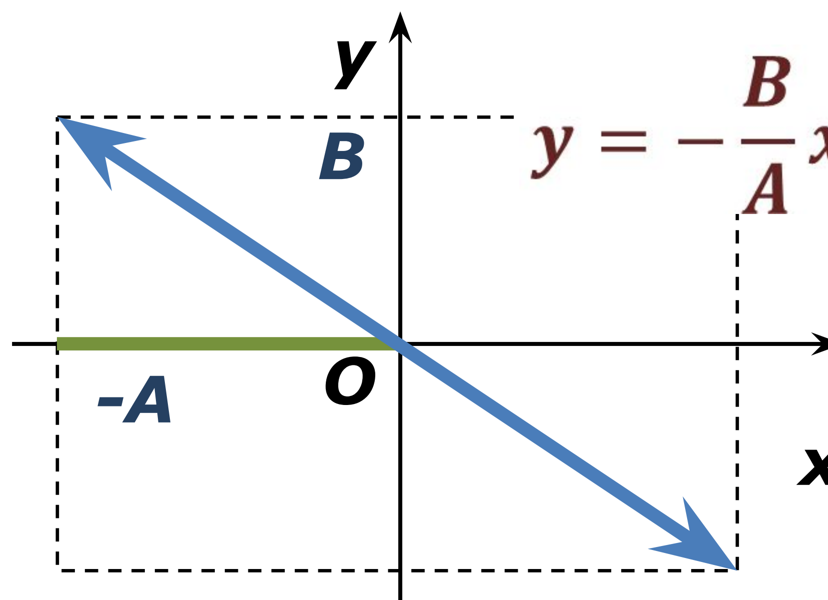
$\Delta\varphi = 2\pi n$ $\qquad n = 0, 1, 2, \ldots$ $\qquad \Delta\varphi = (2n+1)\pi$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB} = 0 \qquad\qquad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + 2\frac{xy}{AB} = 0$$

$$y = \frac{B}{A}x$$



$$y = -\frac{B}{A}x$$

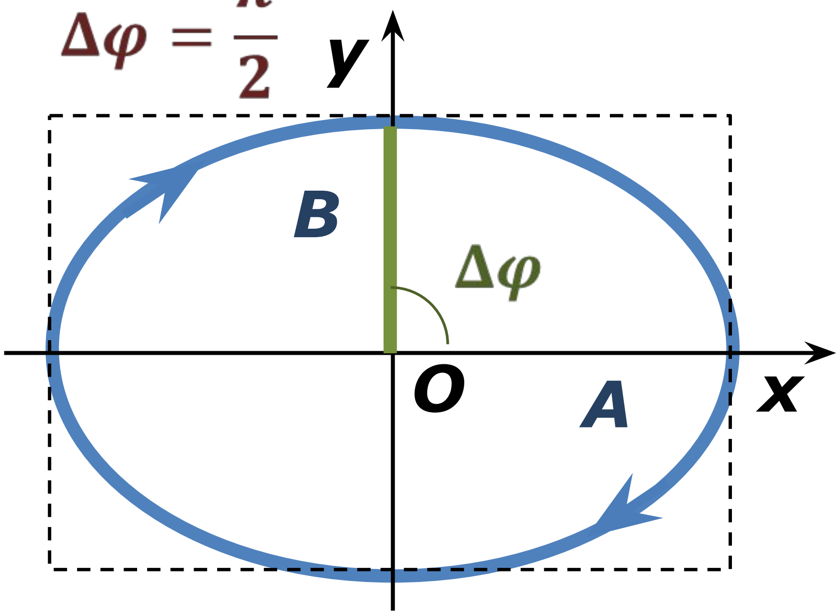


$OX \perp OY$

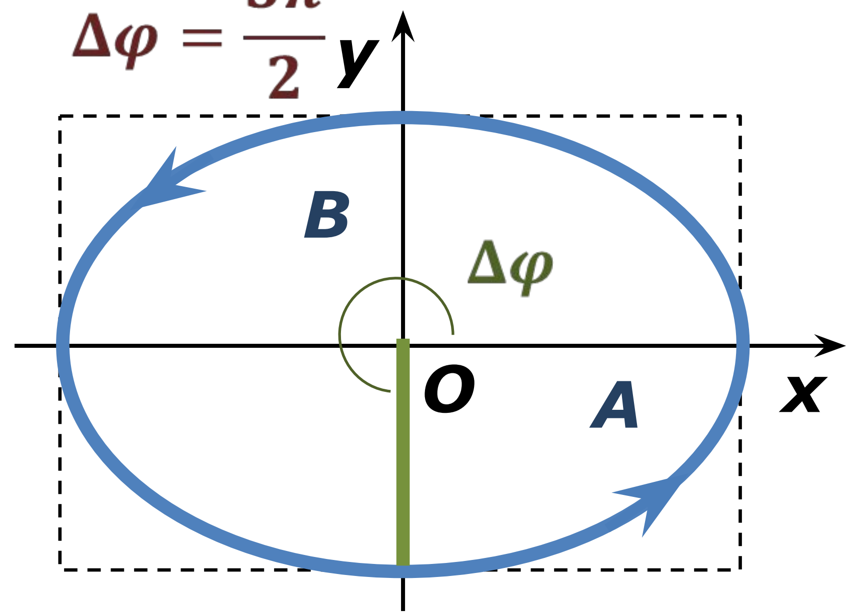
Сложение колебаний

Взаимно перпендикулярные колебания (ортогональные)

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$$



$$\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2}$$

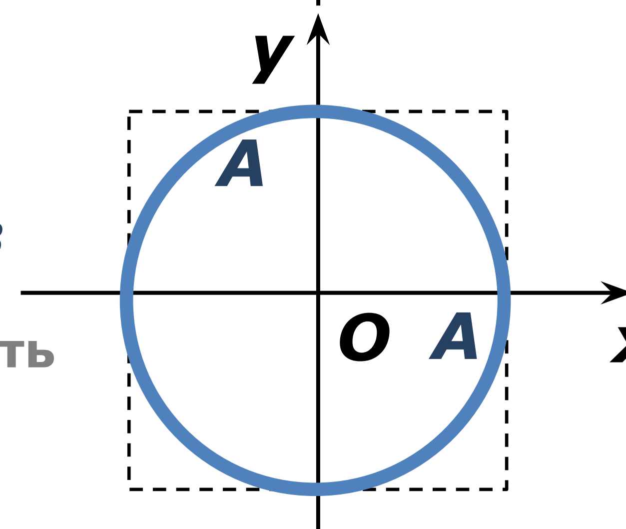


$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

эллипс

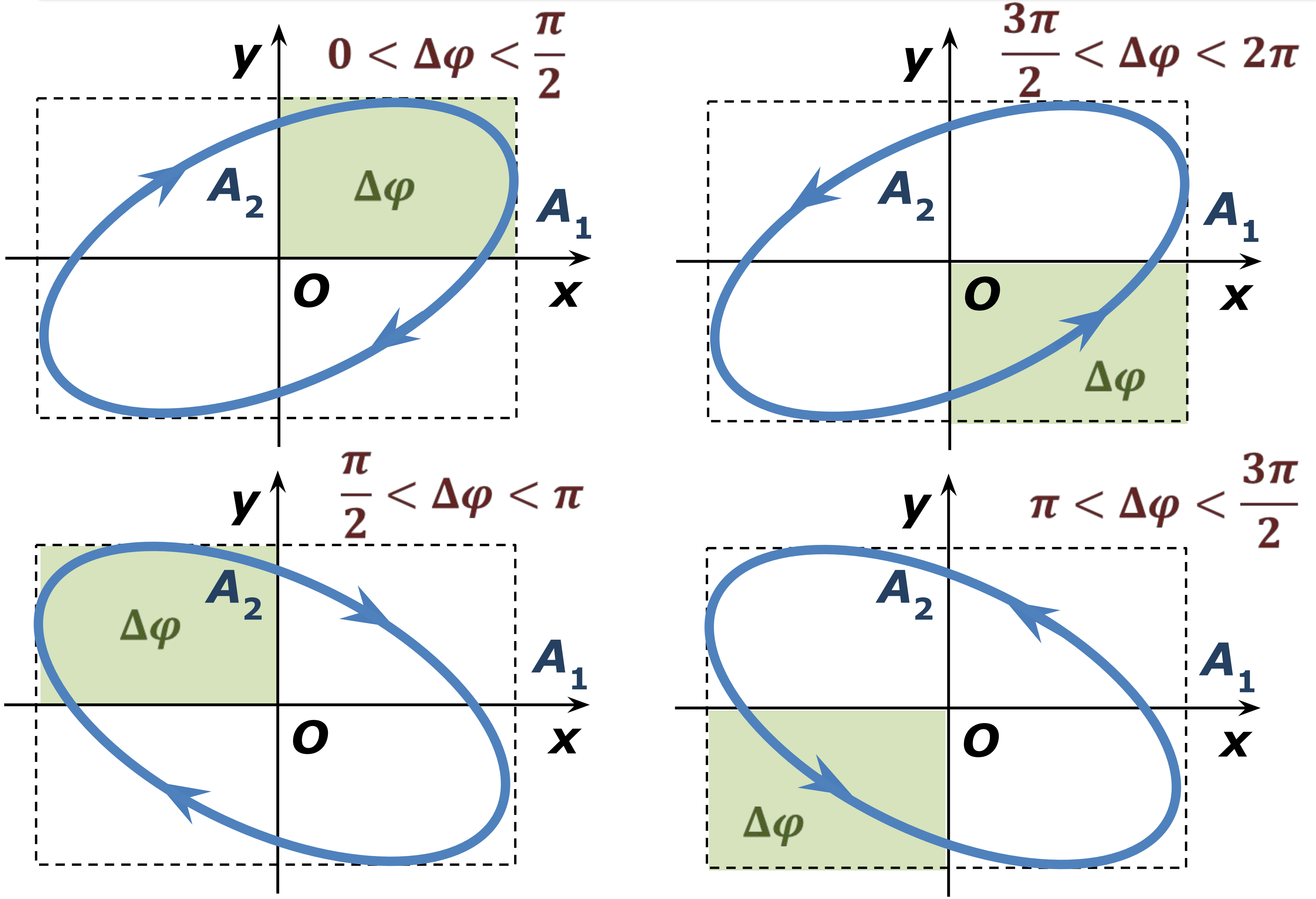
При $A = B$

окружность



$OX \perp OY$

Сложение колебаний

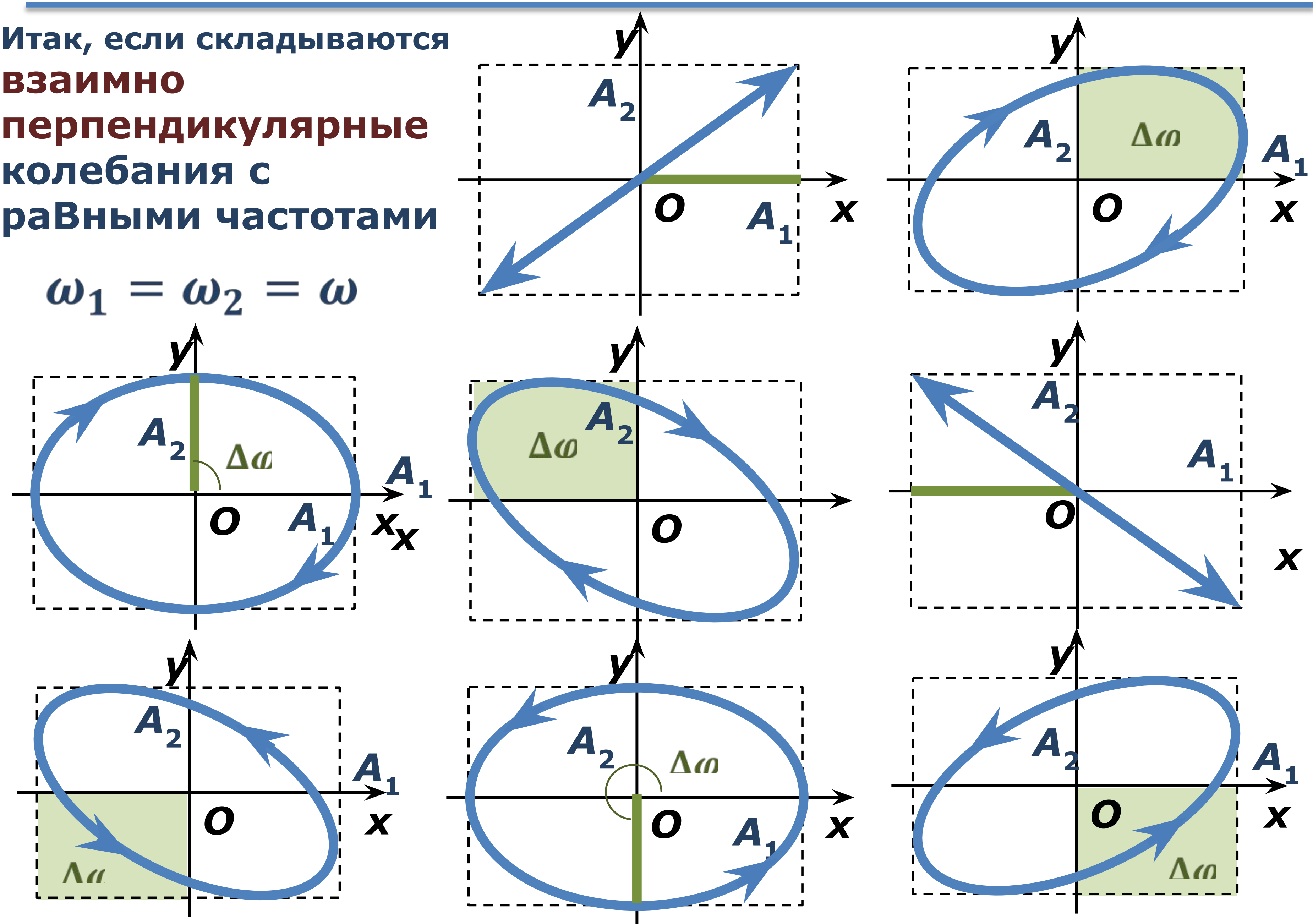


$OX \perp OY$

Сложение колебаний

Итак, если складываются **взаимно перпендикулярные** колебания с раВными частотами

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$



$OX \perp OY$

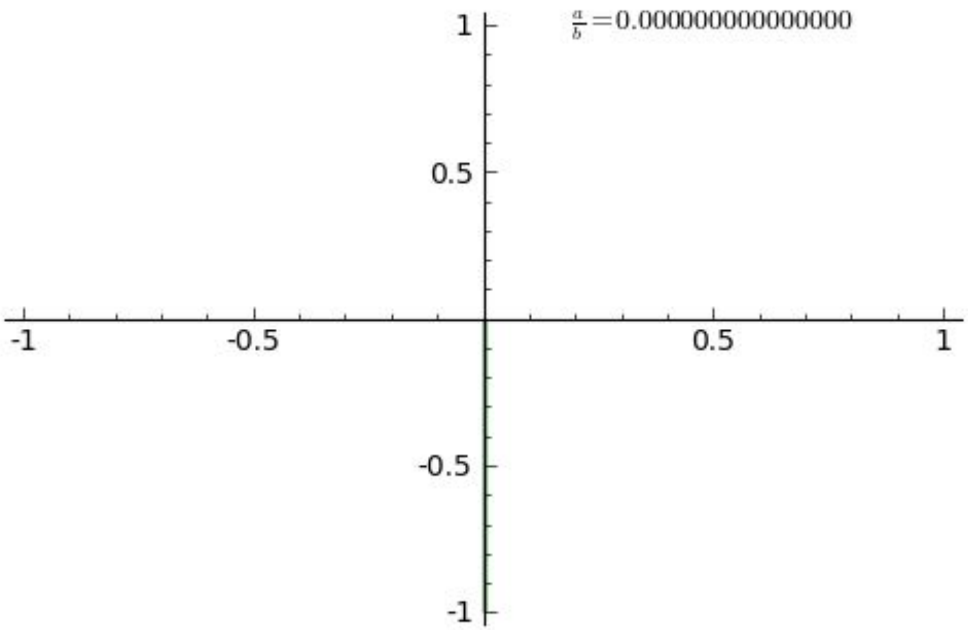
Сложение колебаний

Взаимно перпендикулярные колебания с раЗными частотами $\omega_1 \neq \omega_2$

$$x = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$
$$y = B\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Если $m\omega_1 = n\omega_2$ где ***m, n* – целые числа** (частоты кратны

то траектории движения – **замкнутые кривые** **фигуры Лиссажу**



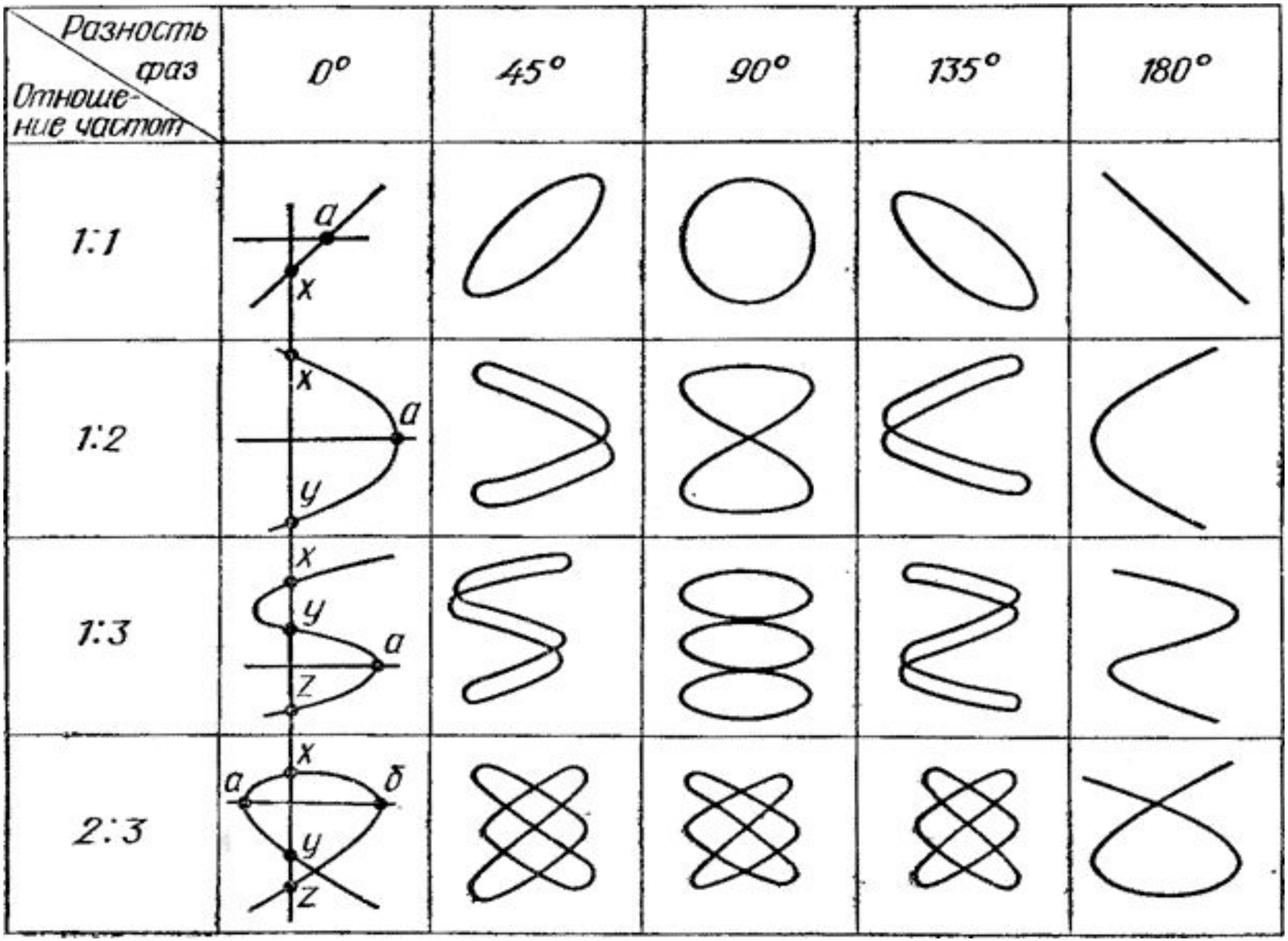
Жуль Антуан Лиссажу
Jules Antoine Lissajous
(1822–1880

отношение частот равно отношению числа точек касания фигуры сторон прямоугольника, в который она списана

Сложение колебаний: Фигуры Лиссажу

$OX \perp OY$

отношение частот равно отношению
числа точек касания фигуры
сторон прямоугольника,
в который она списана



Если **частоты не кратны**, то траектории движения – **НЕзамкнутые кривые**

Задачи

1. **Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями:**

$$x = 3\cos(2\omega t) \qquad y = 4\cos(2\omega t + \pi)$$

Определить уравнение траектории точки и нарисовать ее

2. **Складываются два гармонических коллинеарных колебания с одинаковыми периодами и амплитудами *A*. Найти амплитуду результирующего колебания, если разность фаз складываемых колебаний** $\Delta\varphi = \frac{\pi}{3}$

Затухающие колебания

Затухающие колебания

Свободные колебания с уменьшающейся амплитудой называют **затухающими**

Уменьшение амплитуды колебания ведет **к потере энергии,** т.к. $E(t) \sim A^2(t)$

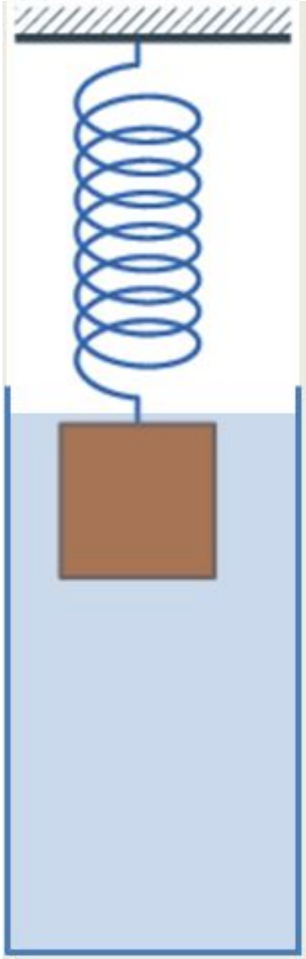
Обычно, **в механической колебательной системе потери энергии связаны с трением**

Рассмотрим на примере пружинного маятника (груз на пружине в стакане с водой)

Вязкое трение: $F_{\text{тр}} = -rv =$

где r **– коэффициент сопротивления**

v **– скорость движения**



уравнение движения груза на пружине в стакане воды: $\vec{F}_{\text{рез}} = \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{тр}}$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt}$$

или другая форма записи

$$\boxed{m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}}$$

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$$

$\xrightarrow[\text{и преобразуем}]{\text{Разделим на } m}$

$$\ddot{x} + \boxed{\frac{r}{m}}\dot{x} + \boxed{\frac{k}{m}}x = 0$$

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний пружинного маятника в вязкой среде

Учитывая, что

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2$$ **собственная частота колебаний**

$$\frac{r}{m} = 2\beta$$ ***β* – коэффициент затухания**

получим

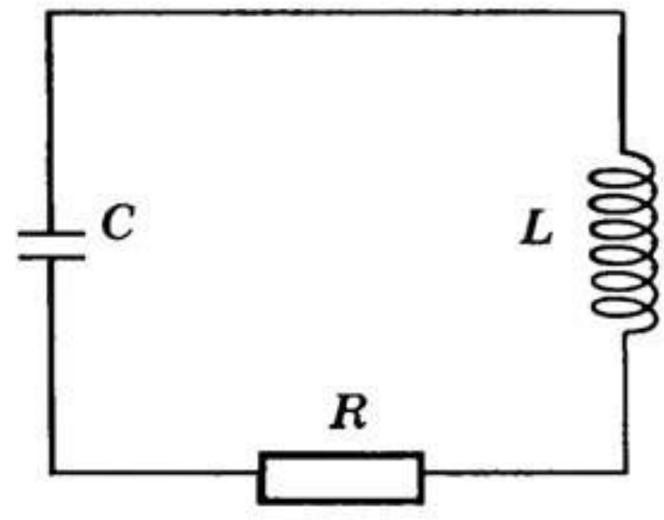
Дифференциальное уравнение затухающих колебаний для любой колебательной системы с сопротивлением, пропорциональным скорости

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Частным случаем этого уравнения является **уравнение незатухающих колебаний (при *β*=0)**

Затухающие колебания в ЭМ контуре

$$U_C + \boxed{U_R} = ЭДС_{самоинд}$$



$$U_C = \frac{q}{C} \qquad U_R = RI = R\dot{q}$$

$$ЭДС_{самоинд} = -L\dot{I} = -L\ddot{q}$$

$$\ddot{q} + \boxed{\frac{R}{L}}\dot{q} + \boxed{\frac{1}{LC}}q = 0$$

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

Собственная частота колебаний контура

$$\frac{R}{2L} = \beta$$

Коэффициент затухания колебаний

$$\boxed{\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0}$$

Дифференциальное уравнение затухающих ЭМ колебаний

Решение дифференциального уравнения затухающих колебаний

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

В зависимости от соотношения между собственной частотой системы и коэффициентом затухания возможны **три типа решения:**

$\beta < \omega_0$ **– колебательный режим**

$\beta = \omega_0$ **– критический режим**

$\beta > \omega_0$ **– апериодический режим**

При $\beta < \omega_0$ **решение дифференциального уравнения:**

Затухающие колебания подчиняются закону механические колебания

$$\boxed{x(t) = \boxed{A_0 e^{-\beta t}} \cos(\omega t + \varphi_0)}$$

амплитуда затухающих колебаний

частота затухающих колебаний где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

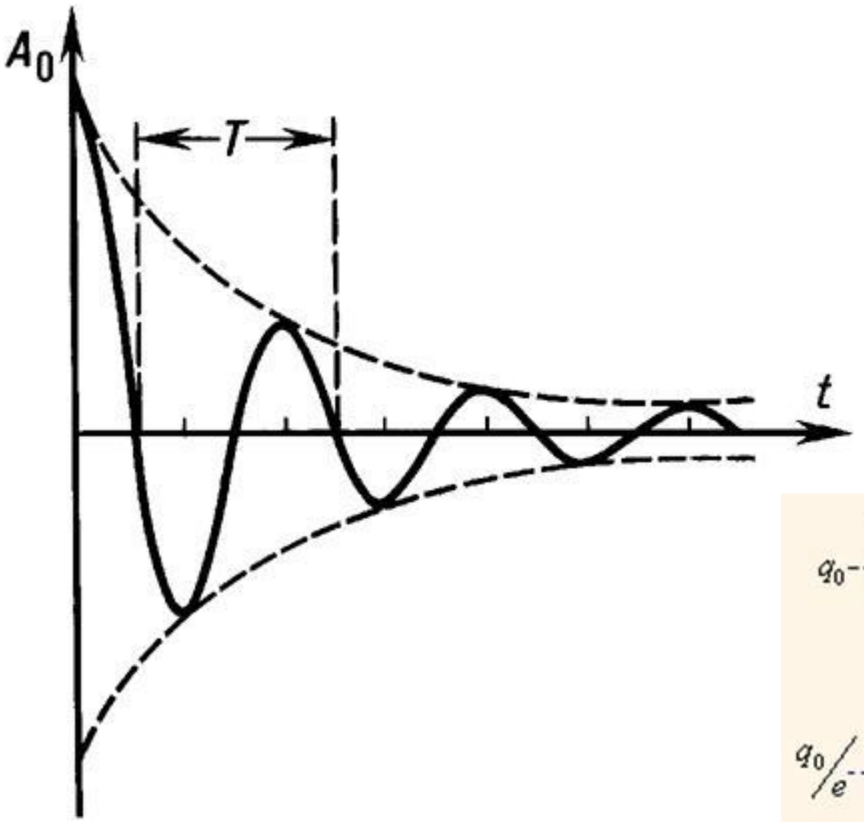
Уравнение затухающих ЭМ колебаний:

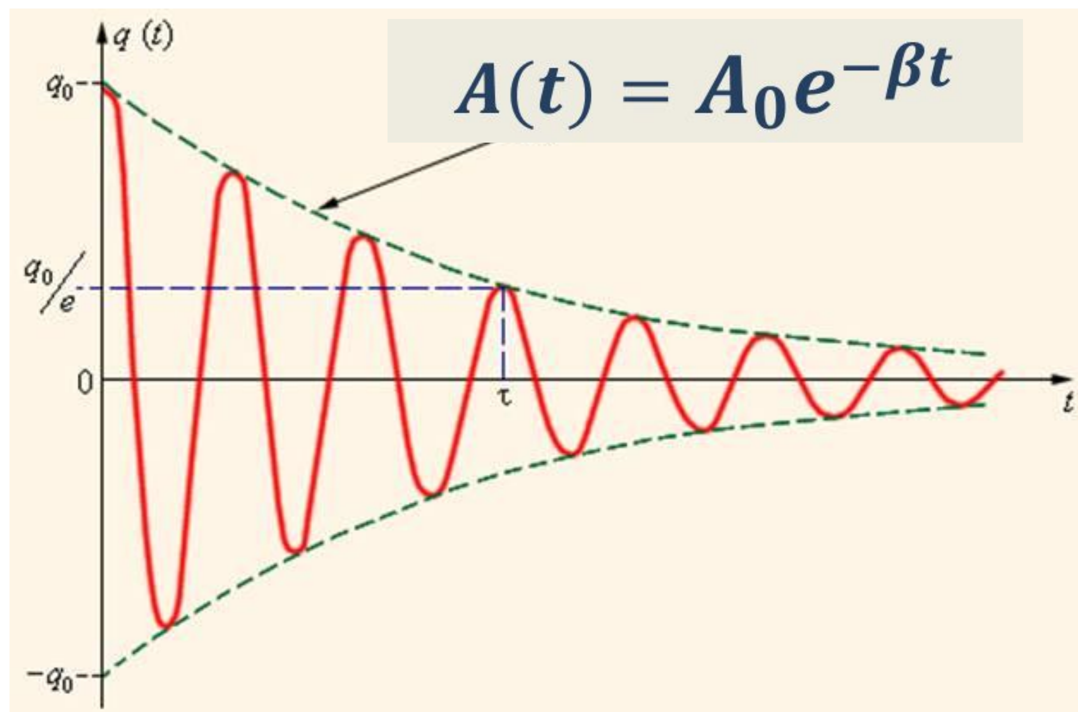
$$\boxed{q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)}$$

Параметры затухающих колебаний

Частота затухающих колебаний	$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$	$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ механические; $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ЭМ
Амплитуда затухающих колебаний **Начальная амплитуда**	$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ $A_0 = A(0)$	
Период затухающих колебаний ➡	$T = \frac{2\pi}{\omega}$	$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$
Коэффициент затухания	β	$\beta = \frac{r}{2m}$ механические; $\beta = \frac{R}{2L}$ ЭМ
Время релаксации ➡	$\tau = \frac{1}{\beta}$	
Логарифмический декремент затухания ➡	$\lambda = \beta T$	
Добротность колебательной системы ➡	$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\omega_0}{2\beta}$	$Q = \frac{\sqrt{km}}{r}$ механические; $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ ЭМ

Период затухающих колебаний





$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

Время релаксации

Время релаксации τ

промежуток времени, за который амплитуда затухающих колебаний уменьшается в *e* раз

$$A(\tau) = A_0 e^{-\beta\tau} =$$

$$\beta\tau = 1$$

τ **Время релаксации обратно пропорционально коэффициенту затухания**

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\beta}}$$

β **Коэффициент затухания**

- **обратно пропорционален времени релаксации**
- **показывает во сколько раз амплитуда уменьшается за единицу времени**

Логарифмический декремент затухания

Логарифмический декремент затухания

натуральный логарифм двух последовательных амплитуд

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} =$$

N_e – количество колебаний за время уменьшения амплитуды в ***e*** раз

Физический смысл λ

Характеризует степень затухания – показывает за какое количество колебаний амплитуда уменьшается в *e* раз

Пусть $\lambda = 1$ тогда $\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^1$ т.е. за одно колебание амплитуда уменьшится в ***e*** раз

Пусть $\lambda = 3$ тогда $\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{1/3}$ т.е. за одно колебание амплитуда уменьшится в $e^{1/3}$ раз

Величина, постоянная для данной колебательной системы

или: амплитуда уменьшится в ***e*** раз за 3 колебания

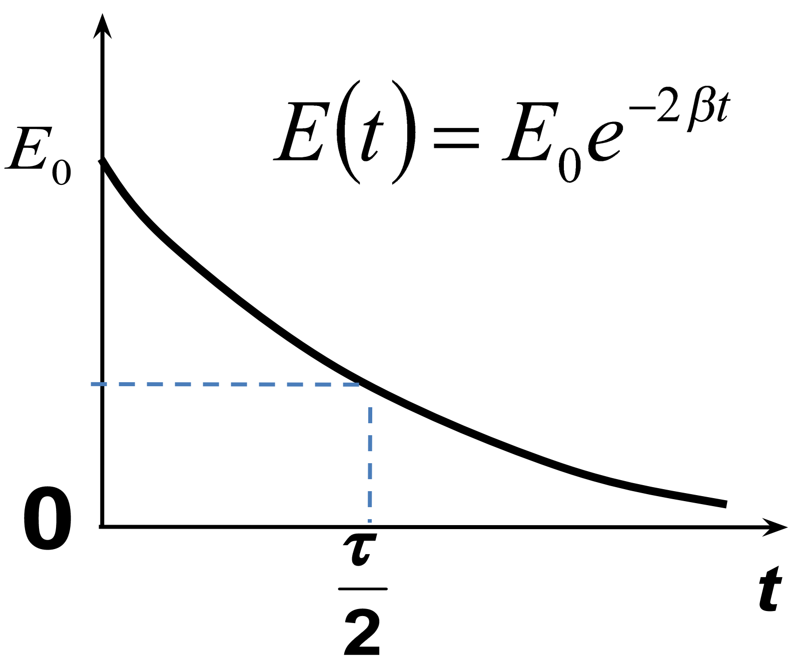
Добротность колебательной системы

Q – характеризует потери энергии колебательной системы за период

$$Q = 2\pi \frac{\text{запасенная энергия}}{\text{потери энергии за период}} = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)}$$

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t} \quad \Rightarrow \quad E(t) = E_0 e^{-2\beta t}$$

$$\Rightarrow \quad Q = 2\pi \frac{E(0)}{\Delta E(t)}$$



$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\pi}{\lambda}}$$

$$\lambda = \beta T$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Добротность означает **качественность:**
чем больше добротность системы, тем ближе она к идеальной, тем медленнее затухают колебания

Режимы затухающих колебаний

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

При $\beta < \omega_0$

колебательный режим

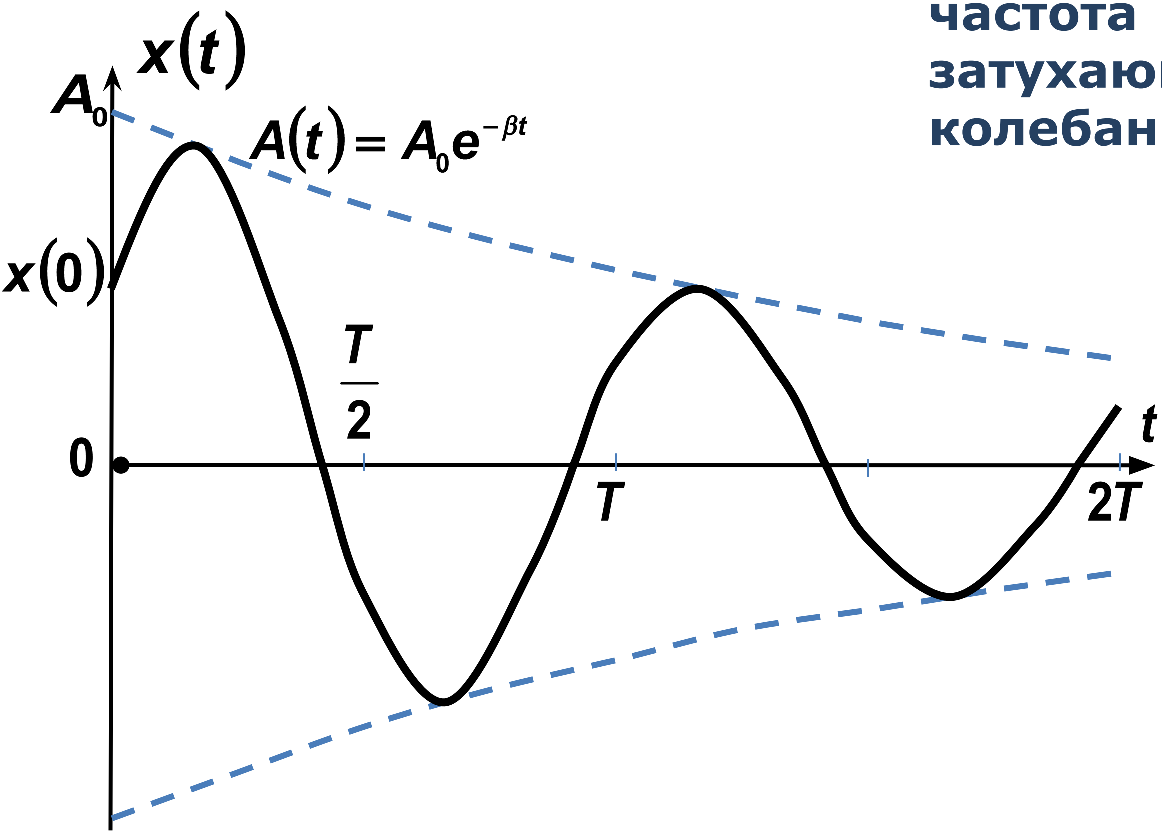
Решение уравнения:

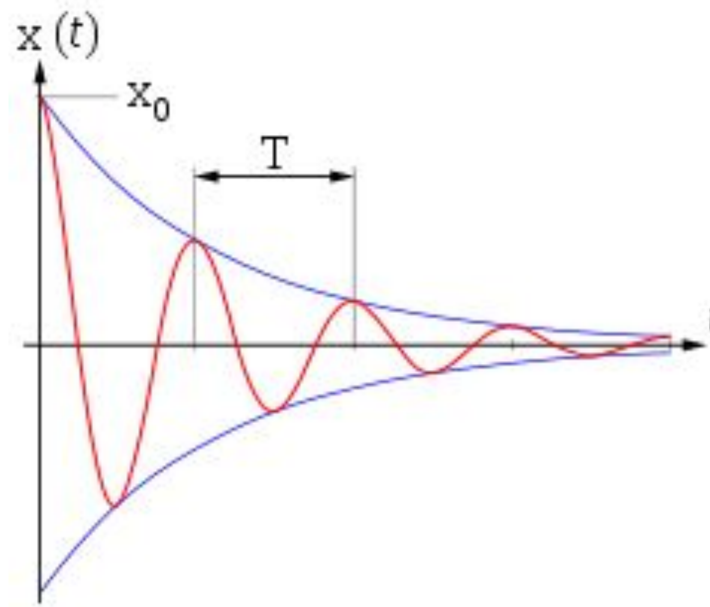
$$\boxed{x(t) = \boxed{A_0 e^{-\beta t}} \cos(\omega t + \varphi_0)}$$

где

частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

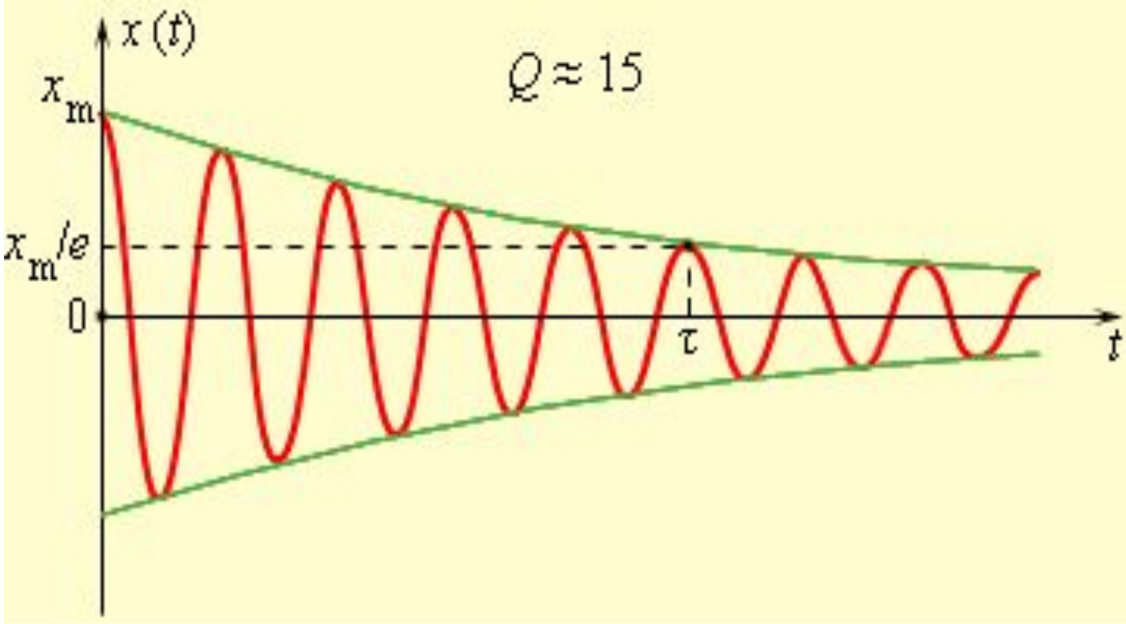




Режимы затухающих колебаний

Колебательный режим

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$



В случае слабого затухания

$$\beta < \omega_0 \qquad \beta^2 \ll \omega_0^2$$

$$\omega \approx \omega_0 \qquad T \approx T_0$$

Логарифмический декремент затухания

$$\boxed{\lambda = \beta T_0 = \beta \frac{2\pi}{\omega_0} \ll 1}$$

Добротность

$$\boxed{Q = \frac{\pi}{\lambda} \gg 1}$$

Количество колебаний за время, равное времени релаксации

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T} = \frac{1}{\lambda}$$

$$Q = \pi N$$

Режимы затухающих колебаний

Критический режим

$$\beta = \omega_0$$

$\omega = 0 \qquad T \to \infty$

$$\lambda = \beta T = \beta \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi$$

$$Q = \frac{1}{2}$$

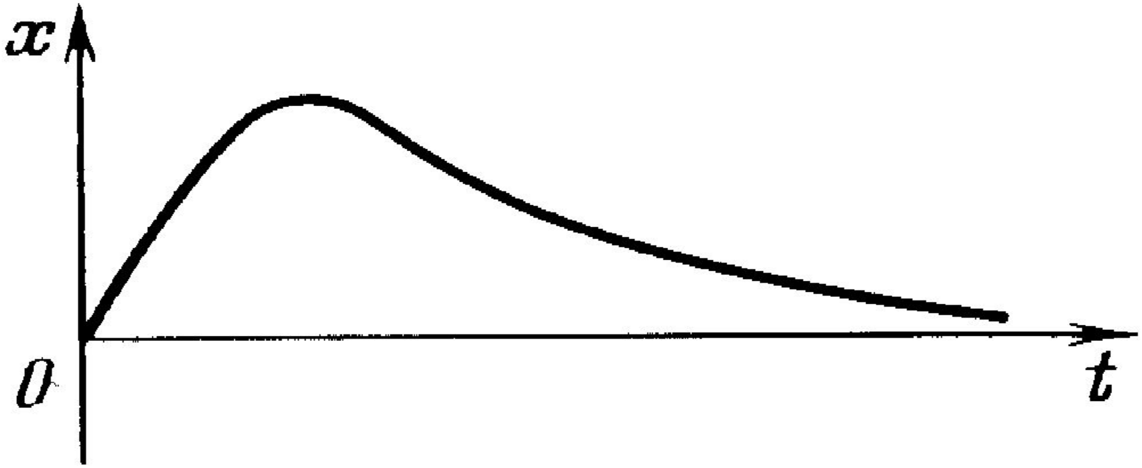
Апериодический режим

$$\beta > \omega_0$$

ω – мнимая

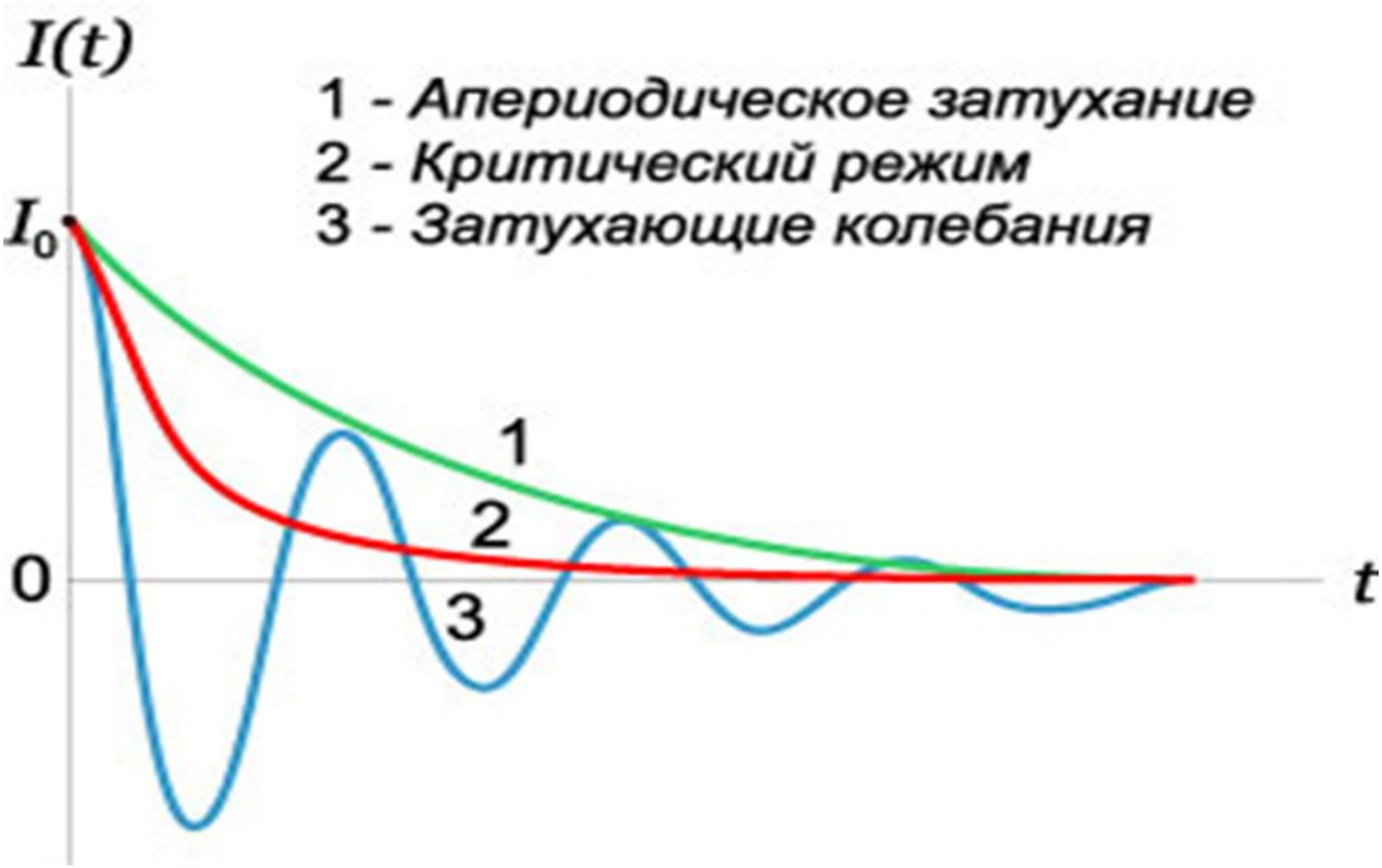
$$\lambda > 2\pi$$

$$Q < \frac{1}{2}$$



Процесс НЕ является колебательным

Режимы затухающих колебаний



Электромеханическая аналогия

Механическая система	Электромагнитный контур

Контрольные вопросы

1. Назовите параметры затухающих колебаний
2. Нарисуйте зависимость амплитуды затухающих колебаний от времени

Контрольные вопросы

1. **Как изменится период колебаний маятника при увеличении массы груза в два раза?**
   a. маятник **пружинный**
   b. маятник **математический**
2. **Период колебаний пружинного маятника 10 с, масса груза 100 г. Определите жесткость пружины.**
3. В 1851 г. Жан Бернар Леон Фуко ставит опыт, подтверждающий вращение Земли (Пантеон, Париж). Подобные маятники были установлены и в других странах. **Маятник Фуко в Исаакиевском соборе совершал три колебания за одну минуту.**
   Определите длину этого маятника.
4. **От чего зависит энергия колебательной системы?**
5. **Нарисуйте зависимость амплитуды затухающих колебаний от времени**

Вынужденные колебания

Вынужденные колебания

Свободные колебания
реальной колебательной системы
всегда являются затухающими

Чтобы возбудить в такой системе незатухающие колебания, **необходимо компенсировать потери энергии**, обусловленные трением колебаний

Будем воздействовать на колеблющуюся систему
внешней силой *F*, изменяющейся
по гармоническом закону

$$F_{\text{вын}}(t) = F_0 \cos \omega t$$

Возникающие при этом в системе колебания называются **вынужденными**

Итак,

Вынужденные колебаний	**колебания, возникающие под действием внешней периодически изменяющейся силы**

Уравнение вынужденных колебаний

По II з-ну Ньютона

$$\boxed{m\ddot{x}} = \boxed{-kx} - \boxed{r\dot{x}} + \boxed{F_0 \cos \omega t}$$

Результирующая сила; **Квазиупругая** сила; Сила **сопротивления**; **Вынуждающая** сила

Разделим это уравнение на m, перенесем члены, содержащие x в левую часть:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t}$$

ЭМ колебания:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = f_0 \cos \omega t$$

Вынуждающая сила:

$$U = U_m \cos \omega t$$

Неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Собственная частота

$$\beta = \frac{r}{2m} \qquad \beta = \frac{R}{2L}$$

Коэффициент затухания

$$f_0 = \frac{F_0}{m} \qquad f_0 = \frac{U_m}{L}$$

Амплитуда вынуждающей силы

Уравнение вынужденных колебаний

Силы, действующие на систему

$$\vec{F}_{\text{рез}} = \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{сопр}} + \vec{F}_{\text{вын}}$$

$$\boxed{m\ddot{x}} =$$

Результирующая сила | **Квазиупругая** сила | Сила **сопротивления** | **Вынуждающая** сила

Разделим это уравнение на m, перенесем члены, содержащие x в левую часть:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t}$$

Неоднородное линейное **дифференциальное уравнение** второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Собственная частота

$$\beta = \frac{r}{2m}$$

Коэффициент затухания

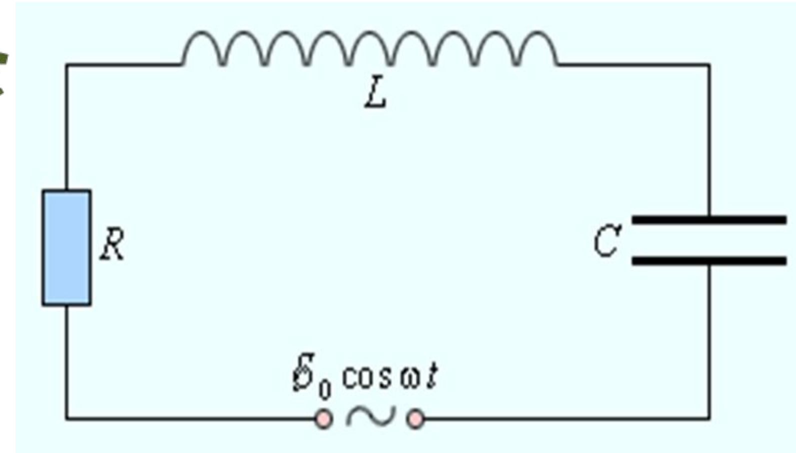
$$f_0 = \frac{F_0}{m}$$

Амплитуда вынуждающей силы

Вынужденные ЭМ колебания

По II правилу Кирхгоффа

$$U_C + U_L + U_R = \varepsilon$$



$$U_C = \frac{q}{C} \qquad U_L = L\dot{I} = L\ddot{q}$$

$$U_R = RI = R\dot{q}$$

Вынуждающая сила:

$$\varepsilon = \varepsilon_m \cos \omega t$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = \varepsilon_m \cos \omega t$$

$$\ddot{q} + \boxed{\frac{R}{L}}\dot{q} + \boxed{\frac{1}{LC}}q = \varepsilon$$

$$\boxed{\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = f_0 \cos \omega t}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\beta = \frac{R}{2L}$$

$$f_0 = \frac{\varepsilon_m}{L}$$

Неоднородное линейное **дифференциал. уравнение** второго порядка с постоянными коэффициентами:

Решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний

Общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$x(t) = x_1 + x_2$$

$$x_1 = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$x_2 = A(\omega) \cos(\omega t - \varphi_1)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

т.е.:

$$x(t) = \boxed{A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)} + \boxed{\frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}} \cos\left(\omega t - \boxed{arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}\right)$$

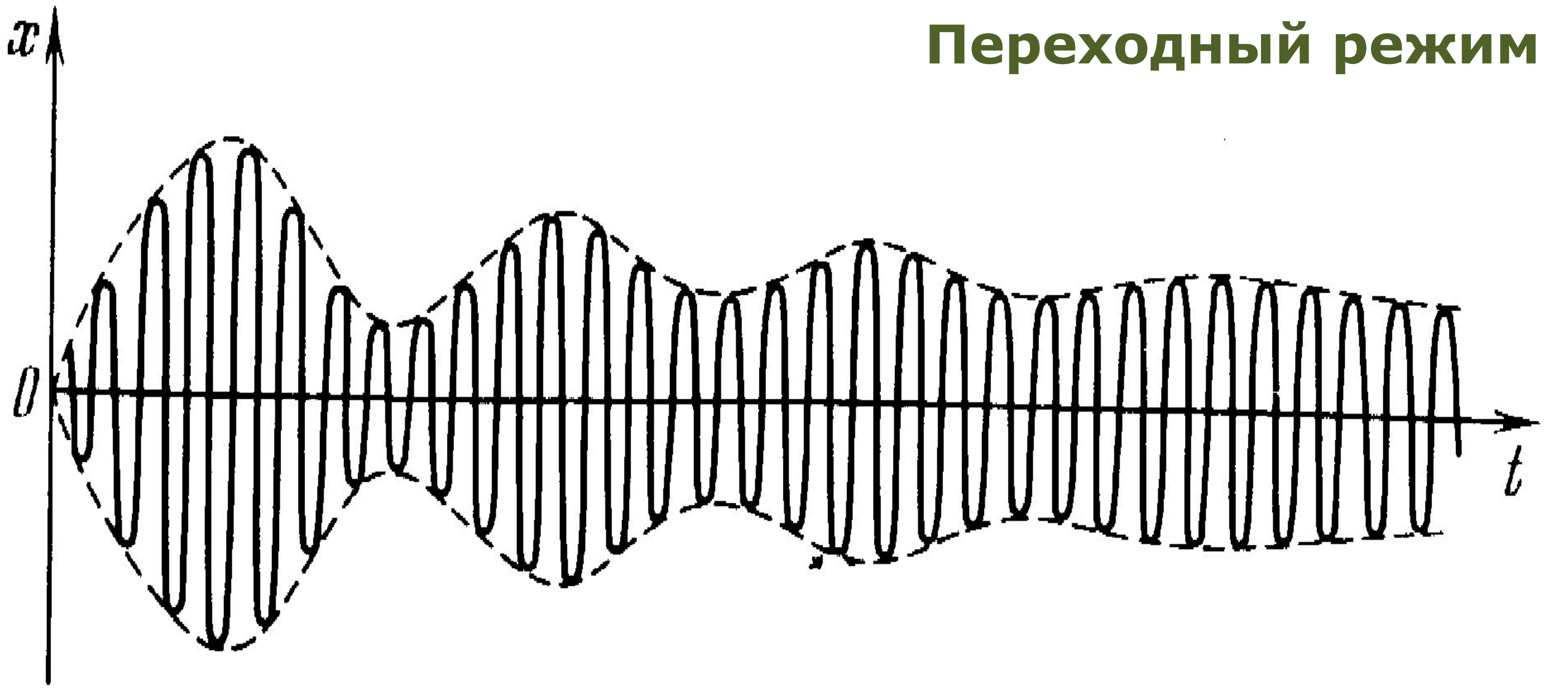
Играет существенную роль только в начальной стадии процесса (при установлении колебаний)

Амплитуда вынужденных колебаний

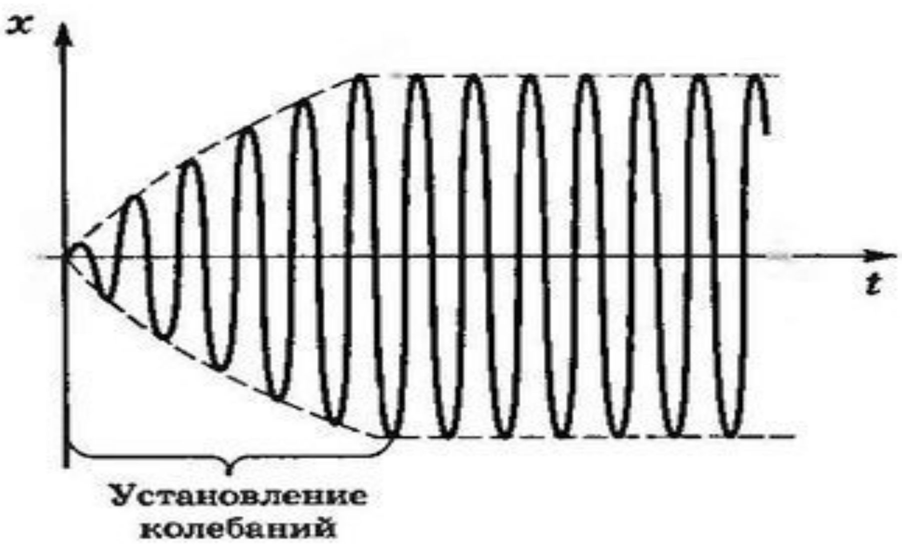
Отставание по фазе

Для ЭМ колебаний – аналогично

График вынужденных колебаний



Переходный режим

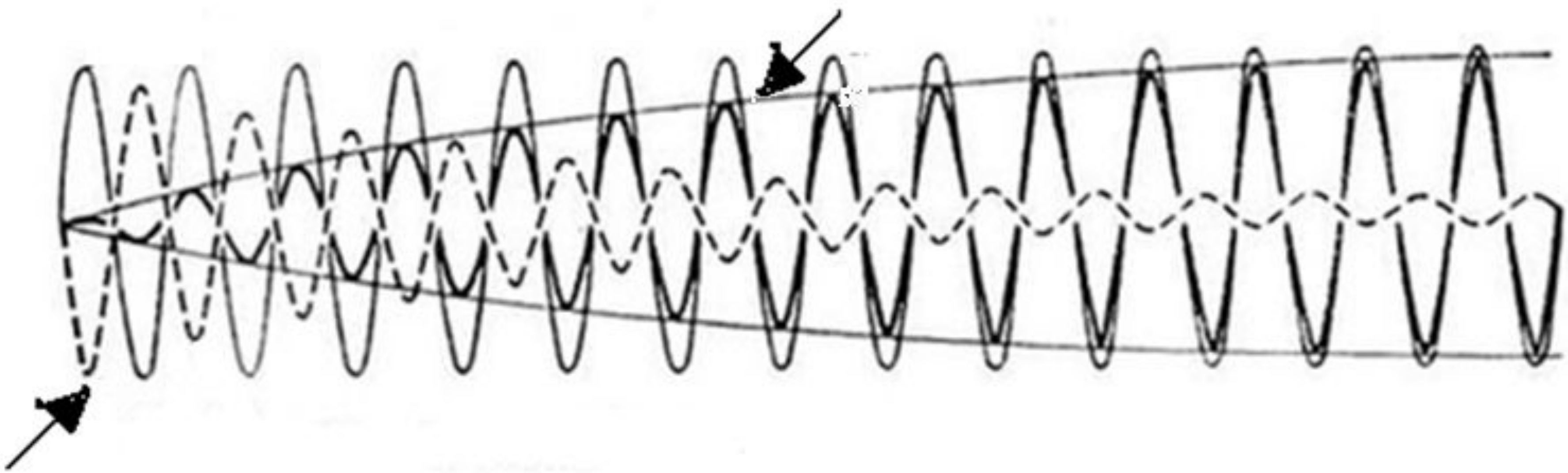


Стационарный режим

Математика и физический опыт показывают, что **через некоторое время в системе устанавливаются гармонические колебания с частотой вынуждающей силы, но отстающие от нее по фазе**

График вынужденных колебаний

Установившиеся
вынужденные колебания



Собственные колебания

Параметры вынужденных колебаний

Установившиеся вынужденные колебания

$$x(t) = A\cos(\omega t - \varphi_1)$$

Частота вынужденных колебаний

$$\omega(t) = \omega$$

частота вынуждающей силы

Амплитуда вынужденных колебаний

$$f_0 = \frac{F_0}{m}$$

$$A(\omega) = \frac{\boxed{f_0}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

амплитуда вынуждающей силы

частота вынуждающей силы

вспомним, что амплитуда при:

- незатухающих колебаниях $A = \text{const}$
- затухающих колебаниях $A = f(t \text{ и } \beta)$

Отставание по фазе вынужденных колебаний от вынуждающей силы

$$\varphi_1 = arctg\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

величина отставания зависит от частоты вынуждающей силы

Амплитудно-частотная зависимость

$$A(\omega) = \frac{f_0}{\boxed{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}}$$

$A(\omega)$ – *max*

при

min

собственная частота системы

частота вынуждающей силы

Резонанс **явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к резонансной частоте**

$$\boxed{A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}}$$

$$\boxed{\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$$

Характеристика системы

Колебательная система оказывается особенно **отзывчивой на действие вынуждающей силы при этой частоте**

Резонансная частота

$$A(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

при $\sqrt{4\beta^2\omega^2 + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2} \to 0$

$A(\omega) \to \infty$

При каких ω ?

Продифференцируем это выражение по ω и приравняем нулю, получим условия для определения $\omega_{\text{рез}}$

$$-4\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\omega + 8\beta^2\omega = 0$$

Полученное уравнение имеет два решения:

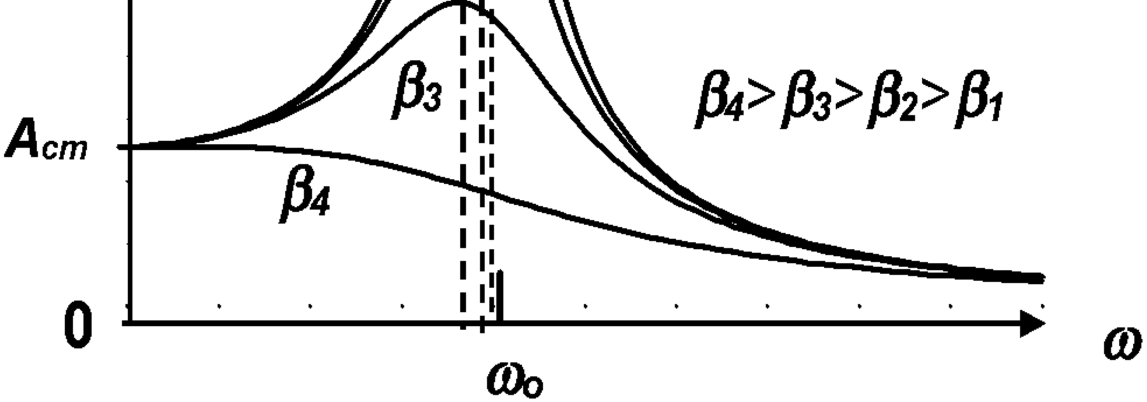
$$\omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

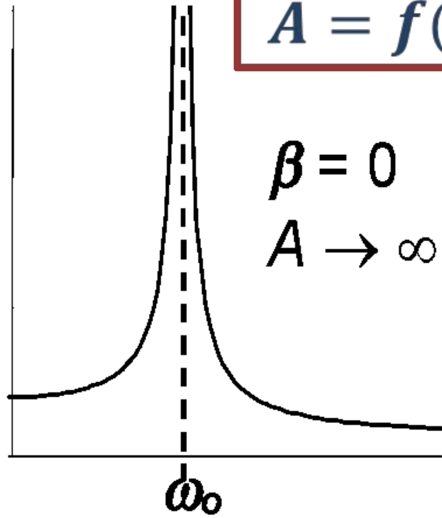
«-» не имеет физического смысла, остается со знаком «+»

Резонансные кривые

Зависимость амплитуды ***A*** вынужденных колебаний от частоты ***ω*** вынуждающей силы называется **резонансной характеристикой** или **резонансной кривой**

$$A = f(\omega)$$

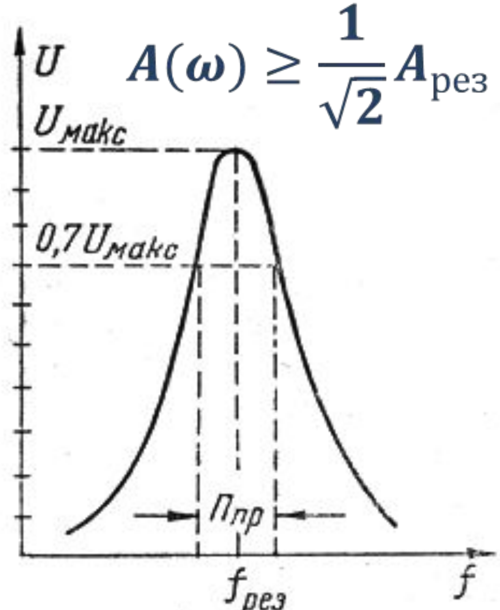




Полоса пропускания

область частот $\Delta\omega$, внутри которой **амплитуда вынужденных колебаний**

$$A(\omega) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} A_{\text{рез}}$$

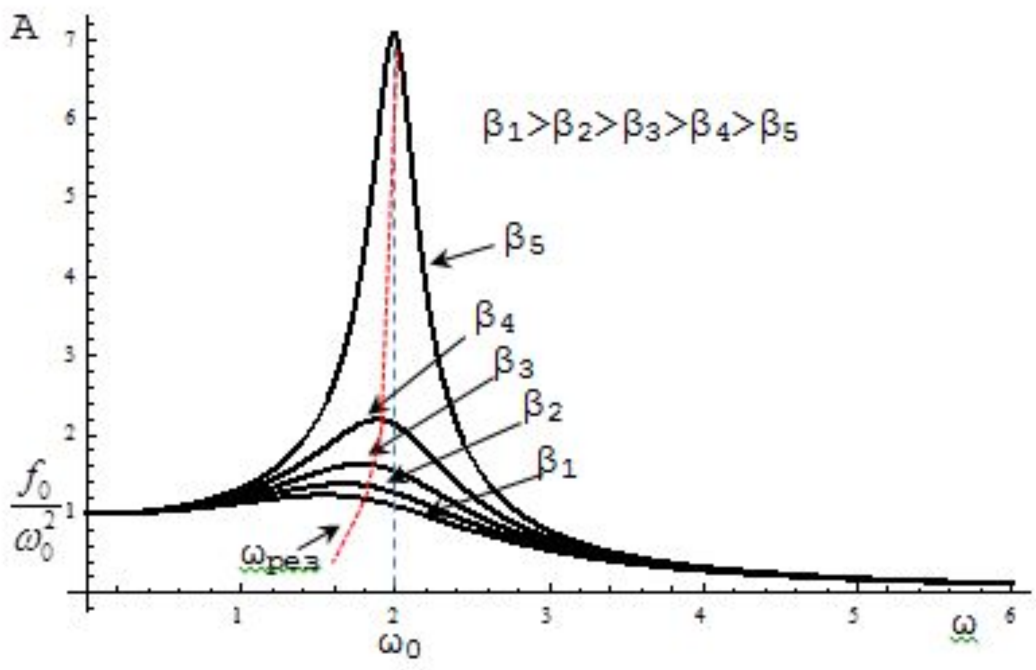


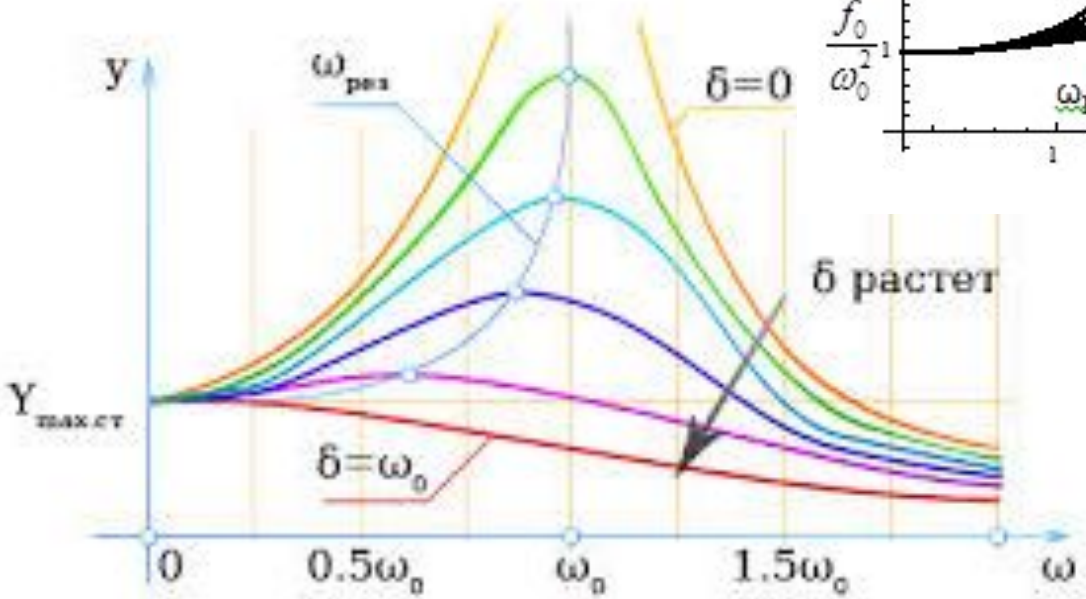
ширина резонансной кривой

Вид резонансной кривой зависит от f_0 и β:

чем > β, тем шире кривая и левее ее max

Резонансные кривые





Анализ фазово-частотной характеристики

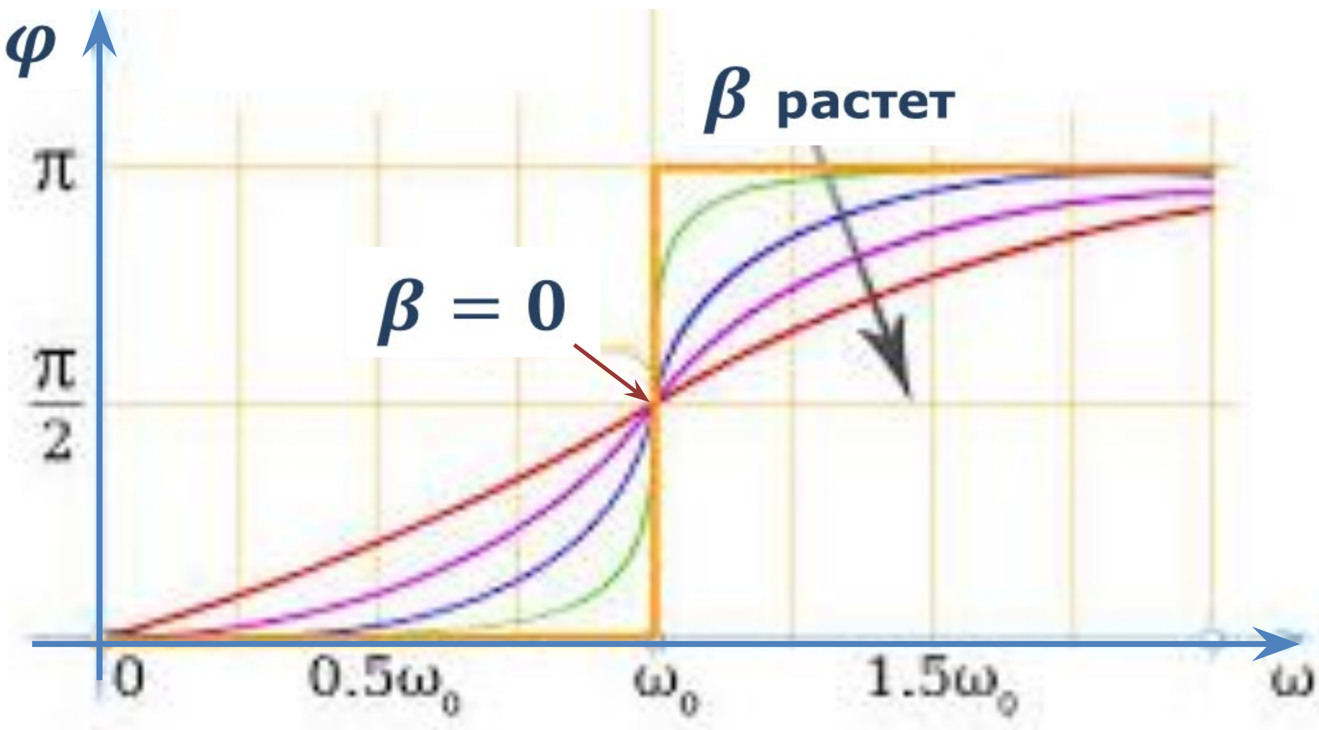
Демонстрация зависимости фазы вынужденных колебаний от коэффициента затухания

$$x = A(\omega)\cos(\omega t - \varphi)$$

$$F = F_0 \cos\omega t$$

$$\varphi = f(\omega)$$

$$\varphi_1 = arctg\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$



Резонанс

- Явления резонанса играют **большую роль в технике, как положительную, так и отрицательную**
- На основе использования резонанса основаны **прием и передача сигнала в радиотехнике, важен учет явления резонанса в акустике**
- **Отрицательную роль явления резонанса могут играть при эксплуатации механизмов и сооружений**

Собственная частота колебаний этих устройств не должна быть близка к частотам возможных внешних воздействий, иначе это может привести к их разрушению

Случай малого затухания. Добротность

$\beta \ll \omega_0$ $$A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}} =$$

Учитывая, что

$$m\omega_0^2 = k \Rightarrow A_{\text{рез}} = \frac{F_0\omega_0}{2k\beta} =$$

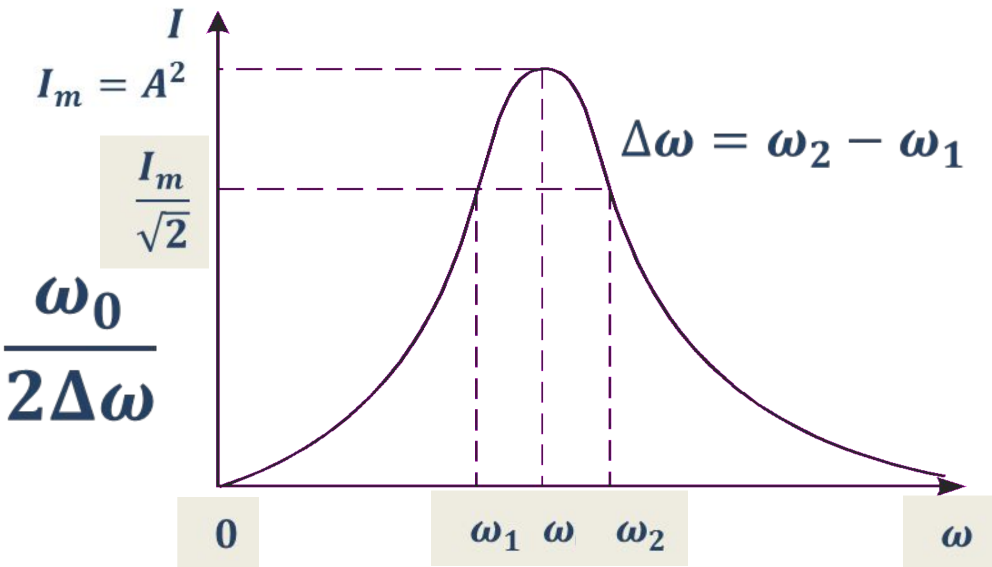
$F_0 = kA_0$ $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$

Учитывая, что

$$\beta T_0 = \lambda \Rightarrow A_{\text{рез}} = \frac{A_0\pi}{\lambda} \Rightarrow \frac{A_{\text{рез}}}{A_0} = \frac{\pi}{\lambda} = Q$$

Физический смысл добротности:

Добротность показывает во сколько раз амплитуда при резонансе больше статической амплитуды



Добротность можно определить по резонансной кривой:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega}$$

Вынужденные колебания в реальных условиях

В реальных условиях амплитуда установившихся вынужденных колебаний определяется условием:

- **работа внешней силы** в течение периода колебаний должна равняться **потерям механической энергии** за то же время из-за трения
- **чем < трение** (чем выше добротность *Q*), **тем > амплитуда вынужденных колебаний при резонансе**
- **при Q< 10 $\omega_{\text{рез}}$ смещается в сторону низких частот**

Повторение и обобщение

Дифференциальные уравнения колебаний

гармонические $$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

затухающие $$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

вынужденные $$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

Решения дифференциальных уравнений колебаний

гармонические $$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$ $\boxed{A = const}$

затухающие $$x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0)$$

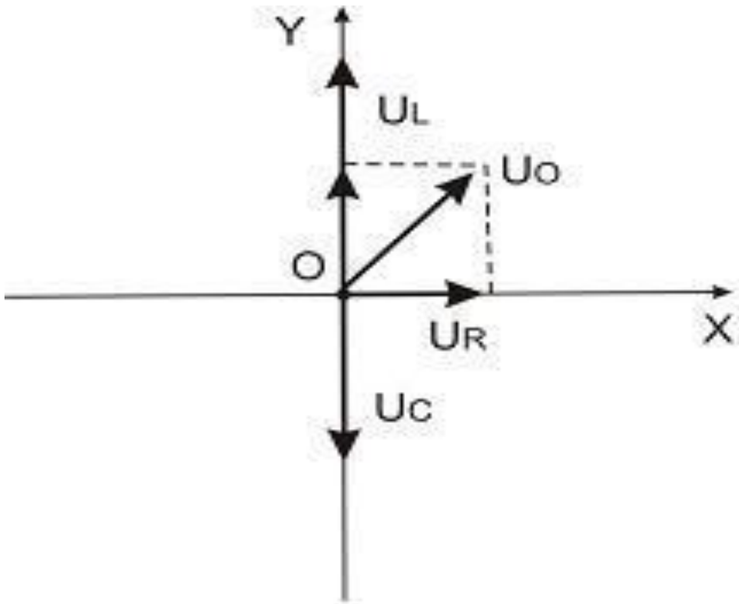
вынужденные $$x(t) = A(\omega)\cos(\omega t - \varphi_1)$$

Задача

Сопротивление, катушка индуктивности и конденсатор соединены последовательно и подключены к источнику переменного напряжения, изменяющегося по закону

$$U = U_0 \cos \omega t$$

На рис. представлена фазовая диаграмма падений напряжений на указанных элементах



Установите соответствие между амплитудными значениями напряжений на этих элементах и амплитудным значением напряжения источника

$$U_R = 4B, U_L = 5B, U_C = 2B$$

$$U_0 - ?$$

Автоколебания

Автоколебательная система

Колебательная система,
совершающая незатухающие колебания за счет действия источника энергии, не обладающего колебательными свойствами (периодичностью)

Примеры: **часы, орган, духовые инструменты, паровые машины и двигатели внутреннего сгорания**

В системе предполагается специальный механизм, который в такт с собственными колебаниями "поставляет" в систему небольшие порции энергии из некоторого резервуара энергии

⇨ **тем самым поддерживаются собственные колебания, которые не затухают**

⇨ **система** как бы **сама себя подталкивает**

Схема автоколебательной системы

В состав любой автоколебательной системы входят:

1. **Колебательная система**
2. **Источник энергии** — компенсирует потери на преодоление сопротивления
3. **Клапан** — устройство, регулирующее поступление энергии в колебательную систему определенными порциями и в определенный промежуток времени
4. **Обратная связь** — устройство, регулирующее поступление энергии в колебательную систему определенными порциями и в определенный промежуток времени

Пример автоколебательной системы

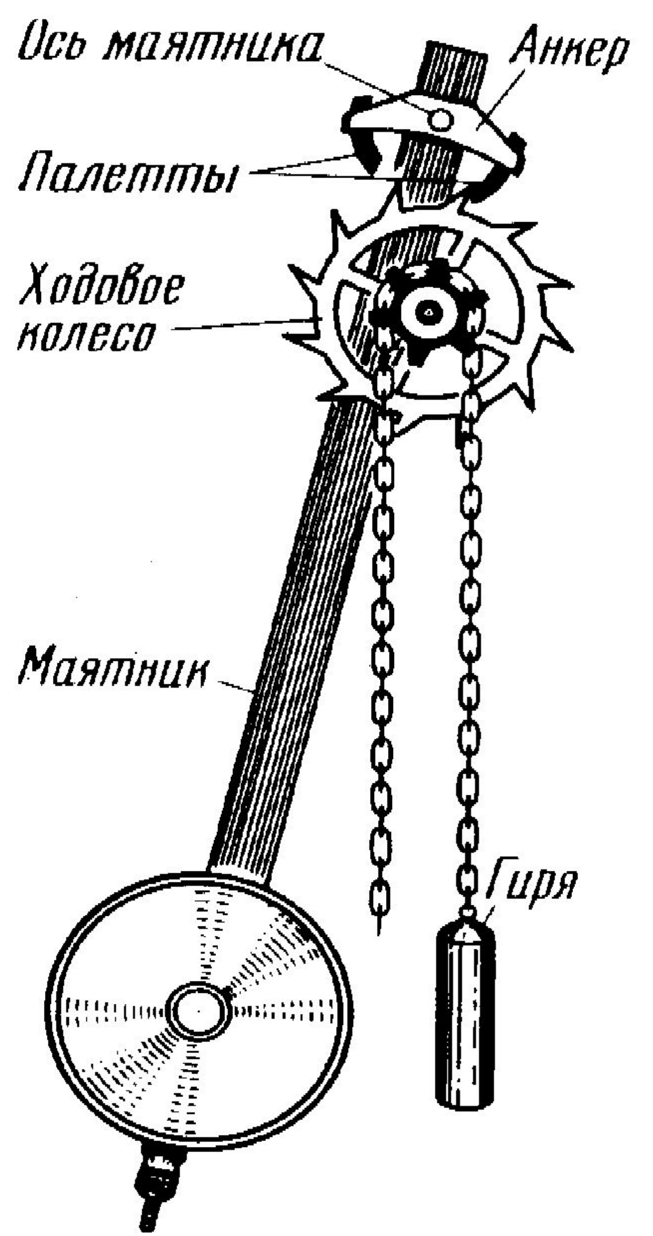
Часы с анкерным ходом

Колебательная система
маятник

Источник энергии
поднятая гиря

Клапан
анкер

Обратная связь
взаимодействие анкера
с ходовым колесом



Параметрический резонанс

Параметрический резонанс — **явление периодического изменения какого-либо параметра системы в такт с колебаниями**

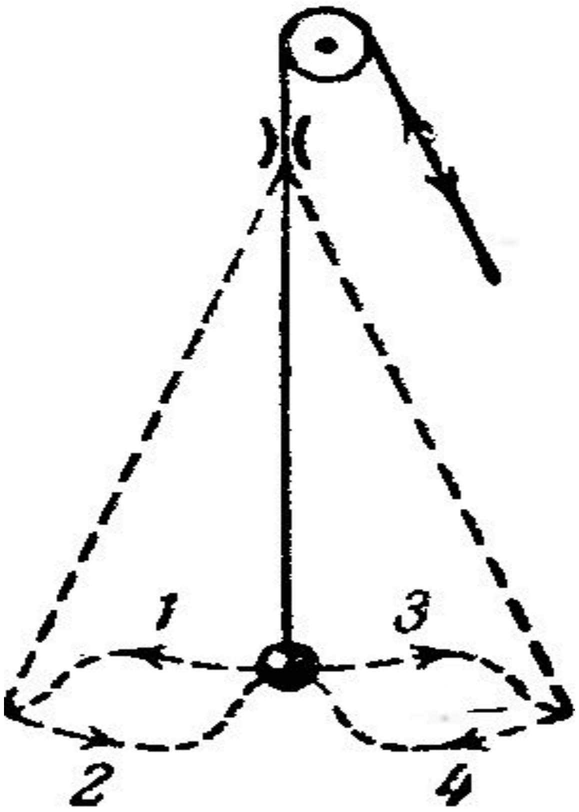
Пример:
маятник на нити переменной длины

- **Увеличение энергии маятника происходит за счет работы,** которую **совершает сила, действующая на нить**
- **Сила натяжения нити при колебаниях маятника непостоянна:**

– она меньше в крайних положениях ($v = 0$) и больше в среднем положении ($v = max$)

Поэтому **«-» работа внешней силы при удлинении маятника** оказывается **меньше по величине, чем «+» работа, совершаемая при укорочении маятника**

В итоге **работа внешней силы за период оказывается > 0**



Контрольные вопросы и задача

1. Дайте определение вынужденных колебаний
2. Дайте определение резонанса
3. Какую частоту называют резонансной?

4. Маятник совершает вынужденные колебания согласно уравнению

$$\ddot{x} + 0,5\dot{x} + 900x = 0,1\cos 150t$$

Как нужно изменить частоту вынуждающей силы, чтобы амплитуда стала максимальной?

Контрольные вопросы

1. Назовите параметры затухающих колебаний
2. Нарисуйте зависимость амплитуды затухающих колебаний от времени
3. Дайте определение вынужденных колебаний
4. Дайте определение резонанса
5. Какую частоту называют резонансной?
6. Нарисуйте зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы в случае резонанса