Лекция 36. Свертка функций. Формулы обращения. Теоремы разложения.

Изображения элементарных функций.

Изображение функции $e^{\lambda t} \risingdotseq \frac{1}{p-\lambda}$

ω – действительное чсло

$$\sin\omega t = \frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i} = \frac{1}{2i}[e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}] \risingdotseq$$

$$\risingdotseq \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right] = \frac{1}{2i}\,\frac{p+i\omega-p+i\omega}{p^{2+}\omega^2} = \frac{\omega}{p^{2+}\omega^2}$$

$$\sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^{2+}\omega^2}$$

$$\cos\omega t = \frac{1}{2}[e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}] \risingdotseq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right] =$$

$$= \frac{p}{p^{2+}\omega^2}$$

$$\cos\omega t \risingdotseq \frac{p}{p^{2+}\omega^2}$$

Для того чтобы описывать апериодические процессы применяют функции $sh\ \omega t, ch\ \omega t$

$$\left.\begin{matrix} sh\ \omega t \\ ch\ \omega t \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left[e^{\omega t} \mp e^{-\omega t}\right] \doteqdot \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-\omega} \mp \frac{1}{p+\omega}\right] =$$

$$= \frac{\left\{\begin{matrix} \omega \\ p \end{matrix}\right\}}{p^2-\omega^2}$$

$$sh\ \omega t \doteqdot \frac{\omega}{p^2-\omega^2} \qquad ch\ \omega t \doteqdot \frac{p}{p^2-\omega^2}$$

Если встречается функция $t \sin \omega t$

$$t \sin \omega t = \{t^n f(t) \doteqdot (-1)^n F^{(n)}(p)\} \doteqdot$$

применяется теорема дифференцирования изображения.

$$\doteqdot -\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)' = \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$$

Найти оригинал $e^{-at} \cdot \cos \omega t$

$$e^{+\lambda t} \cos \omega t \risingdotseq \left\{ \underset{\text{смещение}}{e^{-\lambda t} f(t) \risingdotseq F(p-\lambda)} \right\} \risingdotseq$$

λ- некоторое число.

$$\risingdotseq \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2} \quad , \ \lambda > 0$$

Найти изображение функции

$$sh\,\omega(t-\tau) = \left\{ \begin{matrix} f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p), \tau > 0 \\ \textit{теорема запаздывания} \end{matrix} \right\} \risingdotseq$$

$$\risingdotseq \frac{\omega}{p^2-\omega^2} e^{-p\tau}$$

Таблица оригиналов и их изображений

$$1 \risingdotseq \frac{1}{p} \qquad \sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

$$t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}} \qquad \cos\omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2-\omega^2}$$

$$e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{p-\alpha} \qquad sh\,\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2-\omega^2}$$

$$ch\,\omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2-\omega^2}$$

$$t\sin\omega t \risingdotseq \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$$

$$t\cos\omega t \risingdotseq -\frac{\omega^2-p^2}{(p^2+\omega^2)^2} = \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$$

$$\sin\omega\,(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}\frac{\omega}{p^2+\omega^2} \;;$$

$$\cos\omega\,(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}\frac{\omega}{p^2+\omega^2} \;;$$

$$e^{at}\sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2} \qquad e^{at}\cos\omega t \risingdotseq \frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$$

Свертка, её свойство, формула Дюамеля.

Пусть дано 2 оригинала $f_1(t), f_2(t),$ t меняется от 0 до +∞.

Сверткой этих оригиналов называется интеграл вида:

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2\ (t-\tau)d\tau$$

Свертка обозначается в виде:

$$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau$$

<u>Основное свойство свертки:</u>

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)\ f_2(\tau)d\tau$$

Доказательство.

$$\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau = \begin{cases} t-\tau = u => d\tau = -du \\ \tau = -u + t\ ;\ \tau = 0, u = t \\ \qquad\qquad\qquad \tau = t, u = 0 \end{cases} =$$

$$= \int_t^0 f_1(-u+t)f_2(u)(-du) = \int_0^t f_1(t-u)f_2(u)du =$$

$$= \{du = d\tau\} = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$$

Формула Дюамеля

Пусть $f_1(t), f_2(t)$ имеет своими изображениями функции:

$f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$, $f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$

Тогда справедлива формула Дюамеля:

$$p\,F_1(p)\cdot F_2(p) \risingdotseq f_1(t)\cdot f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau) f_2'(t-\tau)d\tau.$$

Доказательство.

Известно, что свертка 2-х оригиналов

$$f_1(t) * f_2(t) \risingdotseq F_1(p)\cdot F_2(p)$$

Воспользуемся этой формулой и свойством дифференцирования оригинала:

$f_1(t) \risingdotseq p \cdot F_1(p) - f(0)$

$f\cdot [F_1(p)\cdot F_2(p) \risingdotseq (f_1 * f_2)' + f_1 * f_2\big|_{t=0}$

$$p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p) \risingdotseq \left(\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau\right)' + \int_0^{t=0} f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau$$

При дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом имеем

$$\left(\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau\right)' = \int_0^t f_1(\tau)\, f_2'(t-\tau)d\tau + f_1(t)\cdot f_2(0)$$

Формула Дюамеля применяется при решении дифференциальных уравнений.

Нахождение оригиналов по изображению.

$F(p) = \dfrac{Q_m(p)}{P_n(p)}$ - рациональная дробь.

Пусть это правильная рациональная дробь. Докажем, что в этом случае рациональная дробь всегда будет иметь оригинал.

Теорема (о существовании оригинала правильной рациональной дроби)

Если $\dfrac{Q_m(p)}{P_n(p)}$ такова, что $m < n$, то используя теорему о разложении многочлена на множители имеем:

$$P_n(p) = (p-\lambda_1)^{k_1}(p-\lambda_2)^{k_2}\ldots(p-\lambda_s)^{k_s}\cdot$$
$$\cdot\ \underbrace{(p^2+\alpha_1 p+\beta_1)^{m_1}}_{D_1<0}\ldots\underbrace{(p^2+\alpha_e p+\beta_e)^{m_e}}_{D_e<0}$$

Причём каждому из этих множителей в разложении дроби на элементарные соответствуют дроби 1,2,3 и 4 типа, т. е.

$$\frac{Q_m(p)}{P_n(p)} = \frac{A_1}{p-\lambda_1} + \frac{A_2}{(p-\lambda_2)^2} + \cdots + \frac{Ak_1}{(p-\lambda_1)^{k-1}} + \cdots +$$

$$+ \frac{M_1 p + N_1}{p^2 + \alpha_1 p + \beta_1} + \cdots + \frac{Mm_1 p + Nm_1}{(p^2 + \alpha_1 p + \beta_1)^{m_1}}$$

Вспоминая, что

$$e^{\lambda t} \doteqdot \frac{1}{p - \lambda}$$

$$t \cdot e^{\lambda t} \doteqdot - \frac{1}{(p-\lambda)^2}$$

$$t^{k_1 - 1} e^{\lambda t} \doteqdot (-1)^{k_1 - 1} \frac{1}{(p - \lambda_1)^{k_1}}$$

$$\frac{M_1 p + N_1}{p^2 + \alpha_1 p + \beta_1} = \frac{M_1 p + N_1}{(p + \frac{\alpha_1}{2})^2 + \beta_1 - \frac{\alpha^2}{4}} = \underline{M_1 \frac{p}{(p + \frac{\alpha}{2})^2 - \frac{\mathcal{D}^2}{4}}} +$$

$$\underline{\underline{+\frac{N_1}{(p+\frac{\alpha}{2})^2 - \frac{\mathcal{D}^2}{4}}}}$$

$$e^{\lambda t} \cos \omega t \risingdotseq \underline{\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2 + \omega^2}}$$

Подчёркнутые выражения дадут $e^{\lambda t} \cos \omega t$

$$e^{\lambda t} \sin \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p-\lambda)^2 + \omega^2}\ ; \quad e^{\lambda t} \cos \omega t \risingdotseq \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2} + \omega^2$$

Если дискриминант $\mathcal{D} > 0$ получается chx, shx.
Дробям 3 и 4 типа будут соответствовать оригиналы, представляющие собой произведение экспонент, гиперболических или тригонометрических $\sin$ и $\cos$ и степеней t (в зависимости от дискриминанта).