

**Лекция 36. Свертка функций.  
Формулы обращения. Теоремы  
разложения.**

# Изображения элементарных функций.

Изображение функции

$$e^{\lambda t} \doteq \frac{1}{p-\lambda}$$

$\omega$  – действительное число

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} = \frac{1}{2i} [e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}] \doteq$$

$$\doteq \frac{1}{2i} \left[ \frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega} \right] = \frac{1}{2i} \frac{p+i\omega - p+i\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$\cos \omega t = \frac{1}{2} [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}] \doteq \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega} \right] =$$

$$= \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

$$\cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

Для того чтобы описывать апериодические процессы применяют функции  $sh \omega t, ch \omega t$

$$\left. \begin{matrix} sh \omega t \\ ch \omega t \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} [e^{\omega t} \mp e^{-\omega t}] \doteq \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{p-\omega} \mp \frac{1}{p+\omega} \right] =$$

$$= \frac{\left\{ \frac{\omega}{p} \right\}}{p^2 - \omega^2}$$

$$sh \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$$

$$ch \omega t \doteq \frac{p}{p^2 - \omega^2}$$

Если встречается функция  $t \sin \omega t$

$$t \sin \omega t = \{t^n f(t) \doteq (-1)^n F^{(n)}(p)\} \doteq$$

применяется теорема дифференцирования изображения.

$$\doteq - \left( \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \right)' = \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$$

Найти оригинал  $e^{-at} \cdot \cos \omega t$

$$e^{+\lambda t} \cos \omega t \doteq \{e^{-\lambda t} f(t) \doteq F(p - \lambda)\} \doteq$$

смещение

$\lambda$ - некоторое число.

$$\doteq \frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}, \quad \lambda > 0$$

Найти изображение функции

$$\text{sh } \omega(t - \tau) = \left\{ \begin{array}{l} f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} F(p), \tau > 0 \\ \text{теорема запаздывания} \end{array} \right\} \doteq$$
$$\doteq \frac{\omega}{p^2 - \omega^2} e^{-p\tau}$$

# Таблица оригиналов и их изображений

$$1 \doteq \frac{1}{p}$$

$$t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}$$

$$e^{at} \doteq \frac{1}{p-a}$$

$$\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$\cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2 - \omega^2}$$

$$\operatorname{sh} \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$$

$$\operatorname{ch} \omega t \doteq \frac{p}{p^2 - \omega^2}$$

$$t \sin \omega t \doteq \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$$

$$t \cos \omega t \doteq -\frac{\omega^2 - p^2}{(p^2 + \omega^2)^2} = \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$$

$$\sin \omega (t - \tau) \doteq e^{-p\tau} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} ;$$

$$\cos \omega (t - \tau) \doteq e^{-p\tau} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} ;$$

$$e^{at} \sin \omega t \doteq \frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}$$

$$e^{at} \cos \omega t \doteq \frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}$$

## Свертка, её свойство, формула Дюамеля.

Пусть дано 2 оригинала  $f_1(t), f_2(t)$ ,  $t$  меняется от 0 до  $+\infty$ .

Сверткой этих оригиналов называется интеграл вида:

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

Свертка обозначается в виде:

$$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau$$

### Основное свойство свертки:

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau$$

### Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau &= \left. \begin{array}{l} t - \tau = u \Rightarrow d\tau = -du \\ \tau = -u + t; \tau = 0, u = t \\ \tau = t, u = 0 \end{array} \right\} = \\ &= \int_t^0 f_1(-u + t) f_2(u) (-du) = \int_0^t f_1(t - u) f_2(u) du = \\ &= \{du = d\tau\} = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau \end{aligned}$$

## Формула Дюамеля

Пусть  $f_1(t), f_2(t)$  имеет своими изображениями функции:

$$f_1(t) \doteq F_1(p), f_2(t) \doteq F_2(p)$$

Тогда справедлива формула Дюамеля:

$$p F_1(p) \cdot F_2(p) \doteq f_1(t) \cdot f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau) f_2'(t - \tau) d\tau.$$

### **Доказательство.**

Известно, что свертка 2-х оригиналов

$$f_1(t) * f_2(t) \doteq F_1(p) \cdot F_2(p)$$

Воспользуемся этой формулой и свойством дифференцирования оригинала:

$$f_1(t) \doteq p \cdot F_1(p) - f_1(0)$$

$$p \cdot [F_1(p) \cdot F_2(p) \doteq (f_1 * f_2)'] + f_1 * f_2 \Big|_{t=0}$$

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \doteq \left( \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right)' + \int_0^{t=0} f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau$$

При дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом имеем

$$\left( \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right)' = \int_0^t f_1(\tau) f_2'(t - \tau) d\tau + f_1(t) \cdot f_2(0)$$

Формула Дюамеля применяется при решении дифференциальных уравнений.

## Нахождение оригиналов по изображению.

$F(p) = \frac{Q_m(p)}{P_n(p)}$  - рациональная дробь.

Пусть это правильная рациональная дробь. Докажем, что в этом случае рациональная дробь всегда будет иметь оригинал.

### Теорема (о существовании оригинала правильной рациональной дроби)

Если  $\frac{Q_m(p)}{P_n(p)}$  такова, что  $m < n$ , то используя

теорему о разложении многочлена на множители имеем:

$$P_n(p) = (p - \lambda_1)^{k_1} (p - \lambda_2)^{k_2} \dots (p - \lambda_s)^{k_s} \cdot (p^2 + \alpha_1 p + \beta_1)^{m_1} \dots (p^2 + \alpha_e p + \beta_e)^{m_e}$$

$D_1 < 0$   $D_e < 0$



Причём каждому из этих множителей в разложении дроби на элементарные соответствуют дроби 1, 2, 3 и 4 типа, т. е.

$$\frac{Q_m(p)}{P_n(p)} = \frac{A_1}{p-\lambda_1} + \frac{A_2}{(p-\lambda_2)^2} + \dots + \frac{Ak_1}{(p-\lambda_1)^{k-1}} + \dots +$$

$$+ \frac{M_1p+N_1}{p^2+\alpha_1p+\beta_1} + \dots + \frac{Mm_1p+Nm_1}{(p^2+\alpha_1p+\beta_1)^{m_1}}$$

Вспомогая, что

$$e^{\lambda t} \doteq \frac{1}{p-\lambda}$$

$$t \cdot e^{\lambda t} \doteq - \frac{1}{(p-\lambda)^2}$$

$$t^{k_1-1} e^{\lambda t} \doteq (-1)^{k_1-1} \frac{1}{(p-\lambda_1)^{k_1}}$$

$$\frac{M_1 p + N_1}{p^2 + \alpha_1 p + \beta_1} = \frac{M_1 p + N_1}{(p + \frac{\alpha_1}{2})^2 + \beta_1 - \frac{\alpha_1^2}{4}} = M_1 \frac{p}{(p + \frac{\alpha}{2})^2 - \frac{\mathcal{D}^2}{4}} +$$

$$+ \frac{N_1}{(p + \frac{\alpha}{2})^2 - \frac{\mathcal{D}^2}{4}}$$

$$e^{\lambda t} \cos \omega t \equiv \frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$$

Подчёркнутые выражения дадут  $e^{\lambda t} \cos \omega t$

$$e^{\lambda t} \sin \omega t \equiv \frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}; \quad e^{\lambda t} \cos \omega t \equiv \frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$$

Если дискриминант  $\mathcal{D} > 0$  получается  $chx, shx$ .

Дробям 3 и 4 типа будут соответствовать оригиналы, представляющие собой произведение экспонент, гиперболических или тригонометрических  $\sin$  и  $\cos$  и степеней  $t$  (в зависимости от дискриминанта).