# Ассиметричное шифрование

# Определение

Способ шифрования, в котором для шифрования и расшифровывания применяются различные ключи, причём один не может быть простым способом получен из другого.

# Открытый и закрытый ключи

- Открытый(публичный) ключ – это ключ, который известен каждому и не является секретной частью алгоритма шифрования. С его помощью, любой желающий может зашифровать сообщение.

- Закрытый ключ – это часть алгоритма, которая является секретной, только обладая этим ключом можно расшифровать сообщение, полученное с помощью открытого ключа и криптографического преобразования.

# Другими словами

- Любой желающий может с помощью открытого ключа зашифровать своё послание и отправить его владельцу секретного ключа
- Имеет место следующее преобразование:
  - Сообщение + открытый ключ пользователя = шифртекст
  - Шифртекст + секретный ключ пользователя = сообщение

# Односторонняя(вычислительно необратимая функция)

- Функция реализующая преобразование, которое сложно обратить, без знания некоторой секретной информации.

# Вариант алгоритма асимметричного шифрования

1. Выбрать два простых числа p и q
2. Вычислить N=p•q
3. Выбрать E, такое, что

$$НОД(E,(p-1)\cdot(q-1))=1$$

4. Найти D, такое, что

$$D=E^{-1}(\mathrm{mod}(p-1)\cdot(q-1))$$

Т.е.

$$D\cdot E=1(\mathrm{mod}(p-1)\cdot(q-1))$$

| p | q | N | E | D |
|---|---|---|---|---|
| Держать в строгом секрете или забыть вовсе | Держать в строгом секрете или забыть вовсе | Держать в общем доступе, для зашифровывания | Держать в общем доступе, для зашифровывания | Держать в строгом секрете |

# Вариант алгоритма ассиметричного шифрования

- Положим
  - p=7
  - q=11
- Тогда
  - N=77
  - E=13
  - D=37
- Следовательно для зашифровывания числа 8

$$8^{13} (\mathrm{mod}\, 77) = 50$$

- А для расшифровывания

$$50^{37} (\mathrm{mod}\, 77) = 8$$

# Это так, потому что

- Все сравнимые по модулю числа, мы считаем равными друг другу
- При возведении числа в степени в степень, степени умножаются

$$(2^2)^3 = (4)^3 = 64 = (2^2)^3 = 2^{2\cdot 3} = 2^6 = 64$$

- Произведение числа с обратным ему, в кольце вычетов даёт 1
- Следовательно

$$m^e = m^e \pmod N$$

$$(m^e)^d = m^{e\cdot d} = m^{e\cdot d} \pmod N = m^1$$

# В чём проблема

- Эффективность такого рода алгоритмов базируется на сложности некоторых математических проблем, так в данном случае эксплуатируется сложность разложения числа на простые множители.
- В тоже время перемножение двух простых чисел для получения числа N не представляется сложной задачей
- Без знания p и q не возможно найти обратное(«d») к известному «e», т.к. зная «e» можно вычислить обратное к нему, только зная модуль, а он в свою очередь равен (p-1)•(q-1), найти это значение, можно только зная p и q, но чтобы их найти, надо разложить N на простые множители

# Экскурс в прошлое(или откуда (p-1)•(q-1))

- Число элементов кольца вычетов взаимнопростых с модулем, даётся ф-ей Эйлера $\varphi(N)$
- По аналогии с Малой теоремой Ферма, теорема Лагранжа в частности позволяет нам утверждать, что

$$N = p \cdot q$$

$$\varphi(N) = (p-1)\cdot(q-1)$$

$$e^{(p-1)\cdot(q-1)-1} = e^{-1} \bmod ((p-1)\cdot(q-1))$$

# Как происходит шифрование

- Открытый текст разбивается на блоки длинны меньше N
- Например текст «crypt» можно разбить так

| c | r | y | p | t |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 18 | 25 | 16 | 20 |

- Каждый блок зашифровывается по вышеописанной схеме, т.е.

| N=77 | E=13 | D=37 |
|---|---|---|
| Модуль | Открытый ключ | Закрытый ключ |

- Первые два(N,E) известны всем, D - хранится в тайне

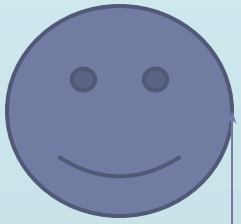
# Процедура шифрования

| | | | |
|---|---|---|---|
| C | 3 | $3^{13}(\mathrm{mod}\ 77)$ | 38 |
| R | 18 | $18^{13}(\mathrm{mod}\ 77)$ | 46 |
| Y | 25 | $25^{13}(\mathrm{mod}\ 77)$ | 60 |
| P | 16 | $16^{13}(\mathrm{mod}\ 77)$ | 37 |
| T | 20 | $20^{13}(\mathrm{mod}\ 77)$ | 69 |
| Итоговое сообщение | | {38,46,60,37,69} | |

# Процедура расшифровывания

| | | | |
|---|---|---|---|
| 38 | $38^{37}(\mathrm{mod}\ 77)$ | 3 | C |
| 46 | $46^{37}(\mathrm{mod}\ 77)$ | 18 | R |
| 60 | $60^{37}(\mathrm{mod}\ 77)$ | 25 | Y |
| 37 | $37^{37}(\mathrm{mod}\ 77)$ | 16 | P |
| 69 | $69^{37}(\mathrm{mod}\ 77)$ | 20 | T |
| Итоговое сообщение | | {C,R,Y,P,T} | |

# Как выглядит переписка при использовании шифрования с закрытым ключом

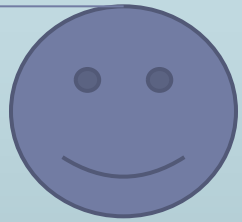


А Алиса расшифрует его ответ своим закрытым ключом

Алиса

Потом он зашифрует ответ для Алисы, её открытым ключом

Сообщение зашифрованное открытым ключом Боба



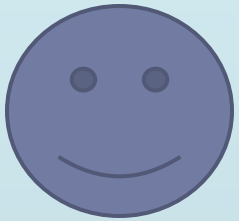
Алиса и Боб обменяются открытыми ключами по не защищённому каналу

Боб

У себя на компьютере Боб расшифрует его своим закрытым ключом и прочтёт

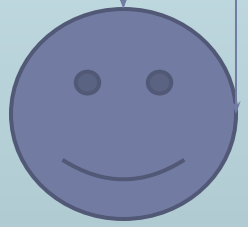
# Как работает ЭЦП

В данном случае закрытый ключ используется для зашифровывания, а открытый для расшифровывания



Алиса

Её важный документ → ХЭШ её важного документа → Зашифрованный Алисиным закрытым ключом ХЭШ



Боб

Боб расшифрует ХЭШ документа открытым ключом Алисы, а потом вычислит ХЭШ документа, который пришёл вместе с зашифрованным. Если значения ХЭШ функций совпадут, БОБ может быть уверен в подлинности документа.

# *Знать*

- Что такое вычислительно необратимые ф-и
- Что такое ассиметричное шифрование
- Что такое закрытый и открытый ключи
- Знать приведённый в презентации примитив RSA
- Уметь объяснять почему это работает
- Знать как происходит процесс шифрования
- Уметь строить простые примеры зашифровывания аналогичные приведённым в презентации

# Атаки на симметричные шифры

- В нашем примере длинна ключа не могла превысить

$$2^6 = 64 < N = 77 > 2^7 = 128$$

- Т.е. ключ представляется 7 битами, в свою очередь длинна шифруемого блока не могла превышать 6 бит.