

Ассиметричное шифрование

Определение

Способ шифрования, в котором для шифрования и расшифровывания применяются различные ключи, причём один не может быть простым способом получен из другого.



Открытый и закрытый ключи

- Открытый(публичный) ключ – это ключ, который известен каждому и не является секретной частью алгоритма шифрования. С его помощью, любой желающий может зашифровать сообщение.
- Закрытый ключ – это часть алгоритма, которая является секретной, только обладая этим ключом можно расшифровать сообщение, полученное с помощью открытого ключа и криптографического преобразования.

Другими словами

- Любой желающий может с помощью открытого ключа зашифровать своё послание и отправить его владельцу секретного ключа
- Имеет место следующее преобразование:
 - Сообщение + открытый ключ пользователя = шифртекст
 - Шифртекст + секретный ключ пользователя = сообщение

Односторонняя (вычислительно необратимая функция)

- Функция реализующая преобразование, которое сложно обратить, без знания некоторой секретной информации.

Вариант алгоритма асимметричного шифрования

1. Выбрать два простых числа p и q
2. Вычислить $N=p \cdot q$
3. Выбрать E , такое, что

$$\text{НОД}(E, (p-1) \cdot (q-1)) = 1$$

4. Найти D , такое, что

$$D = E^{-1} \pmod{(p-1) \cdot (q-1)}$$

Т.е.

$$D \cdot E = 1 \pmod{(p-1) \cdot (q-1)}$$

p	q	N	E	D
Держать в строгом секрете или забыть вовсе	Держать в строгом секрете или забыть вовсе	Держать в общем доступе, для зашифровывания	Держать в общем доступе, для зашифровывания	Держать в строгом секрете

Вариант алгоритма асимметричного шифрования

□ Положим

□ $p=7$

□ $q=11$

□ Тогда

□ $N=77$

□ $E=13$

□ $D=37$

□ Следовательно для зашифровывания числа 8

$$8^{13} \pmod{77} = 50$$

□ А для расшифровывания

$$50^{37} \pmod{77} = 8$$



Это так, потому что

- Все сравнимые по модулю числа, мы считаем равными друг другу
- При возведении числа в степени в степень, степени умножаются

$$(2^2)^3 = (4)^3 = 64 = (2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$$

- Произведение числа с обратным ему, в кольце вычетов даёт 1
- Следовательно

$$m^e = m^e \pmod{N}$$

$$(m^e)^d = m^{e \cdot d} = m^{e \cdot d} \pmod{N} = m^1$$

В чём проблема

- Эффективность такого рода алгоритмов базируется на сложности некоторых математических проблем, так в данном случае эксплуатируется сложность разложения числа на простые множители.
- В тоже время перемножение двух простых чисел для получения числа N не представляется сложной задачей
- Без знания p и q не возможно найти обратное (« d ») к известному « e », т.к. зная « e » можно вычислить обратное к нему, только зная модуль, а он в свою очередь равен $(p-1) \cdot (q-1)$, найти это значение, можно только зная p и q , но чтобы их найти, надо разложить N на простые множители

Экскурс в прошлое (или откуда $(p-1) \cdot (q-1)$)

- Число элементов кольца вычетов взаимнопростых с модулем, даётся ф-ей Эйлера ($\varphi(N)$)
- По аналогии с Малой теоремой Ферма, теорема Лагранжа в частности позволяет нам утверждать, что

$$N = p \cdot q$$

$$\varphi(N) = (p-1) \cdot (q-1)$$

$$e^{(p-1) \cdot (q-1)-1} = e^{-1} \pmod{((p-1) \cdot (q-1))}$$

Как происходит шифрование

- Открытый текст разбивается на блоки длины меньше N
- Например текст «срут» можно разбить так

с	р	у	р	т
3	18	25	16	20

- Каждый блок зашифровывается по вышеописанной схеме, т.е.

$N=77$	$E=13$	$D=37$
Модуль	Открытый ключ	Закрытый ключ

- Первые два (N, E) известны всем, D - хранится в тайне

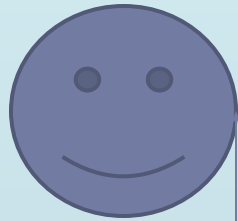
Процедура шифрования

С	3	$3^{13}(\text{mod } 77)$	38
Р	18	$18^{13}(\text{mod } 77)$	46
У	25	$25^{13}(\text{mod } 77)$	60
Р	16	$16^{13}(\text{mod } 77)$	37
Т	20	$20^{13}(\text{mod } 77)$	69
Итоговое сообщение			{38,46,60,37,69}

Процедура расшифровывания

38	$38^{37} \pmod{77}$	3	C
46	$46^{37} \pmod{77}$	18	R
60	$60^{37} \pmod{77}$	25	Y
37	$37^{37} \pmod{77}$	16	P
69	$69^{37} \pmod{77}$	20	T
Итоговое сообщение		{C,R,Y,P,T}	

Как выглядит переписка при использовании шифрования с закрытым ключом

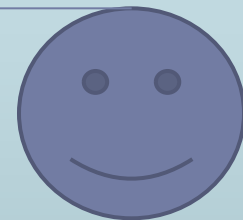


Алиса

А Алиса расшифрует его ответ своим закрытым ключом

Сообщение зашифрованное
открытым ключом Боба

Потом он
зашифрует ответ
для Алисы, её
открытым ключом



Боб

Алиса и Боб обменяются
открытыми ключами по не
защищённому каналу

У себя на компьютере Боб расшифрует
его своим закрытым ключом и прочтёт

Как работает ЭЦП



Алиса

В данном случае закрытый ключ используется для зашифровывания, а открытый для расшифровывания

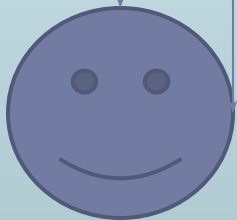
Её важный документ



ХЭШ её важного документа



Зашифрованный Алисиным закрытым ключом ХЭШ



Боб

Боб расшифрует ХЭШ документа открытым ключом Алисы, а потом вычислит ХЭШ документа, который пришёл вместе с зашифрованным. Если значения ХЭШ функций совпадут, БОБ может быть уверен в подлинности документа.

Знать

- Что такое вычислительно необратимые ф-и
- Что такое асимметричное шифрование
- Что такое закрытый и открытый ключи
- Знать приведённый в презентации примитив RSA
- Уметь объяснять почему это работает
- Знать как происходит процесс шифрования
- Уметь строить простые примеры зашифровывания аналогичные приведённым в презентации



Атаки на симметричные шифры

- В нашем примере длина ключа не могла превысить

$$2^6 = 64 < N = 77 > 2^7 = 128$$

- Т.е. ключ представляется 7 битами, в свою очередь длина шифруемого блока не могла превышать 6 бит.