

Решение неравенств (метод интервалов)

При решении неравенств широко используется разложение на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Метод интервалов

(для решения квадратного неравенства)

$$ax^2+bx+c>0$$

$$[ax^2+bx+c\geq 0]$$

$$ax^2+bx+c<0$$

$$[ax^2+bx+c\leq 0]$$

1) Разложить данный многочлен на множители, т.е. представить его в виде

$$a(x-x_1)(x-x_2)>0 \quad [a(x-x_1)(x-x_2)\geq 0]$$

$$a(x-x_1)(x-x_2)<0 \quad [a(x-x_1)(x-x_2)\leq 0]$$

2) Корни многочлена нанести на числовую ось;

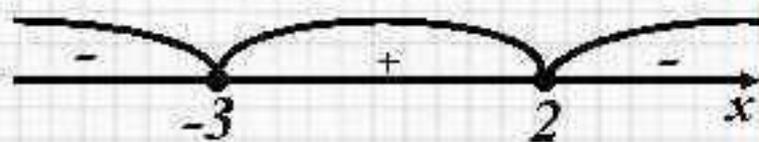
3) Определить знак функции в каждом из промежутков;

4) Выбрать подходящие промежутки и записать ответ

$$x^2 + x - 6 \leq 0$$
$$x^2 + x - 6 = 0;$$

$$(x-2)(x+3)=0;$$

$$x_1 = -3; x_2 = 2.$$



Ответ:

$$x \in (-\infty; -3] \cup [2; +\infty).$$

Решение неравенств

Решить квадратное неравенство:

2 способ (метод интервалов): $x^2+6x+8<0$

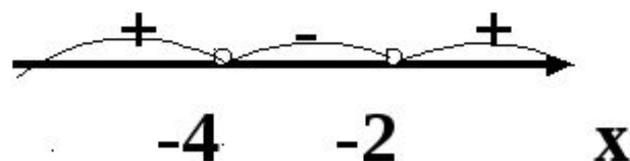
Рассмотрим функцию $y = x^2+6x+8$

Нули функции

$$x^2+6x+8=0$$

$$x_1=-4; \quad x_2=-2$$

$$(x+4)(x+2)<0$$

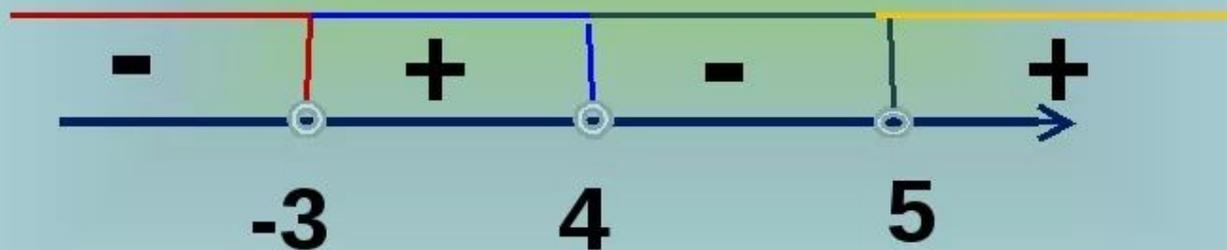


Ответ: $-4 < x < -2$

Решите неравенство:

$$(x-4)(3+x)(x-5) > 0$$

$$x=4, \quad x=-3, \quad x=5$$



Ответ: $(-3; 4) \cup (5; +\infty)$

Замечание: Неравенства вида $(x+2)(x-1)(x-3) > 0$,

$$\frac{(x+2)(x-1)}{x-3} > 0, \quad \frac{(x-1)(x-3)}{x+2} > 0, \quad \frac{x-1}{(x+2)(x-3)} > 0 \text{ и т. п.}$$

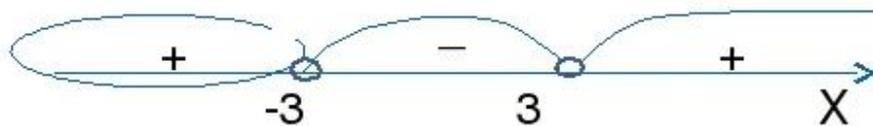
имеют одинаковые решения.

Решение неравенств методом интервалов

Решите неравенство $\frac{x + 3}{x - 3} > 0$

Решение

1. Отметим на оси Ox точки -3 и 3
2. расставим знаки «+» и «-» над интервалами $(-\infty; -3)$, $(-3; 3)$ и $(3; +\infty)$
3. Выберем решение



$$(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$

Алгоритм решения неравенств методом интервалов

1. Обозначить функцию, стоящую в левой части неравенства, через $f(x)$.
2. Записать ОДЗ.
3. Найти нули функции.
4. Отметить ОДЗ на числовой прямой, а на ОДЗ найденные нули функции.
5. Определить знаки $f(x)$ в каждом промежутке.
6. Записать ответ, учитывая знак неравенства.



Самостоятельная работа

Решите неравенства методом интервалов:

Вариант 1.

а) $(2x-5)(x+3) \geq 0$

б) $4x^2+4x-3 < 0$

в) $\frac{(x-3)(x+1)}{x} \leq 0$

Вариант 2.

а) $(5x-2)(x+4) < 0$

б) $9x^2+3x-2 \geq 0$

в) $\frac{(x+2)(x-4)}{x} \leq 0$

