

Урок 74

Тема урока:

Метод неопределенных коэффициентов

The theme of the lesson:

Method of undetermined coefficients

Цели обучения:

10.2.1.13 - знать метод неопределённых коэффициентов и применять его при разложении многочлена на множители

Lesson's objective:

10.2.1.13 Multiply the polynomial from one variable by the method of undetermined coefficients

Критерии оценивания:

Учащийся достиг цели обучения, если:

- знает указанный метод разложения многочлена на множители и составляет систему уравнений
- использует метод для разложения многочлена на множители

Метод неопределенных коэффициентов

Метод неопределенных коэффициентов. Суть метода неопределённых коэффициентов состоит в том, что вид сомножителей, на которые разлагается данный многочлен, угадывается, а коэффициенты этих сомножителей (также многочленов) определяются путём перемножения сомножителей и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях переменной. Теоретической основой метода являются следующие утверждения.

1. Два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты.
2. Любой многочлен третьей степени имеет хотя бы один действительный корень, а потому разлагается в произведение линейного и квадратичного сомножителя.
3. Любой многочлен четвёртой степени разлагается в произведение многочленов второй степени.

Пример 1. Разложите на множители многочлен: $6x^2 + 5x + 1$

Допустим, что данный многочлен второй степени можно представить в виде произведения $6x^2 + 5x + 1 = (ax + b)(cx + d)$, где коэффициенты a, b, c, d - неизвестные нам целые числа. Тогда $6x^2 + 5x + 1 = acx^2 + x(bc + ad) + bd$. Это будет верно, если

$$\begin{cases} ac = 6, \\ ad + bc = 5, \\ bd = 1. \end{cases}$$

Начнем с наиболее простого уравнения $bd = 1$ т.к. b и d целые числа. то возможны лишь два варианта: $b = d = 1$ или $b = d = -1$.

Если $b = d = 1$, $a + c = 5$ и $ac = 6$.

Подбором находим, что $a = 2$ и $c = 3$ или $a = 3$ и $c = 2$.

$$6x^2 + 5x + 1 = (2x + 1)(3x + 1) \quad \text{или} \quad 6x^2 + 5x + 1 = (3x + 1)(2x + 1)$$

Пример 2. Решите уравнение $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0$

Разложим левую часть уравнения на множители используя метод неопределенных коэффициентов

$$\begin{aligned}x^3 + 4x^2 + 5x + 2 &= (x + a)(x^2 + bx + c) = x^3 + ax^2 + bx^2 + abx + ac + xc = \\ &= x^3 + x^2(a + b) + x(ab + c) + ac.\end{aligned}$$

Т.к., старший коэффициент равен 1, то

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = x^3 + x^2(a + b) + x(ab + c) + ac.$$

$$\begin{cases} a + b = 4, \\ ab + c = 5, \\ ac = 2, \end{cases}$$

Учитывая равенство многочленов, получим систему:

$$a = 2, c = 1; a = 1, c = 2; a = -2, c = -1 \text{ или } a = -1; c = -2.$$

При $a = 2, c = 1$ имеем $b = 4 - 2 = 2$, тогда $2 \cdot 2 + 1 = 4 + 1 = 5$.

Значит $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = (x - 2)(x^2 + 2x + 1)$. И тогда $(x - 2)(x^2 + 2x + 1) = 0$,

$$x^2 + 2x + 1 = 0,$$

$$x - 2 = 0 \quad (x + 1)^2 = 0,$$

$$x_1 = 2 \quad \text{или} \quad x_2 = -1.$$

Ответ: 2; -1.

Пример 3

Example 1.3.2

If $4x^3 + 2x^2 + 3 \equiv (x - 2)(Ax^2 + Bx + C) + R$, find A , B , C and R .

Multiplying out the right side gives

$$4x^3 + 2x^2 + 3 \equiv Ax^3 + (-2A + B)x^2 + (-2B + C)x + (-2C + R).$$

Equating coefficients of x^3 : $4 = A$.

Equating coefficients of x^2 : $2 = -2A + B = -2 \times 4 + B = -8 + B$, so $B = 10$.

Equating coefficients of x : $0 = -2B + C = -20 + C$, so $C = 20$.

Equating coefficients of x^0 : $3 = -2C + R = -40 + R$, giving $R = 43$.

Therefore $A = 4$, $B = 10$, $C = 20$ and $R = 43$, so

$$4x^3 + 2x^2 + 3 \equiv (x - 2)(4x^2 + 10x + 20) + 43.$$

In practice, people often use the symbol for equality, $=$, when they really mean the symbol for identity, \equiv . The context usually suggests which meaning is intended.

Фронтальная работа

1 In each of the following quadratic polynomials one factor is given. Find the other factor.

$$(c) \quad 3x^2 + 5x - 22 \equiv (x - 2)(\quad)$$

$$(e) \quad 2x^2 - x - 15 \equiv (2x + 5)(\quad)$$

Answer:

$$(c) \quad 3x + 11$$

$$(e) \quad x - 3$$

Фронтальная работа

3 In each of the following identities find the values of A , B , C and R .

(a) $x^3 - x^2 - x + 12 \equiv (x + 2)(Ax^2 + Bx + C) + R$

(b) $x^3 - 5x^2 + 10x + 10 \equiv (x - 3)(Ax^2 + Bx + C) + R$

Answer:

3 (a) 1, -3, 5, 2

(b) 1, -2, 4, 22