Урок 74

Тема урока:

Метод неопределенных коэффициентов

The theme of the lesson:

Method of undetermined coefficients

Цели обучения:

10.2.1.13 - знать метод неопределённых коэффициентов и применять его при разложении многочлена на множители

Lesson's objective:

10.2.1.13 Multiply the polynomial from one variable by the method of undetermined coefficients

Критерии оценивания:

Учащийся достиг цели обучения, если:

– знает указанный метод разложения многочлена на множители и составляет систему уравнений
– использует метод для разложения многочлена на множители

Метод неопределенных коэффициентов

Метод неопределенных коэффициентов. Суть метода неопределённых коэффициентов состоит в том, что вид сомножителей, на которые разлагается данный многочлен, угадывается, а коэффициенты этих сомножителей (также многочленов) определятся путём перемножения сомножителей и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях переменной. Теоретической основой метода являются следующие утверждения.

1. Два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты.
2. Любой многочлен третьей степени имеет хотя бы один действительный корень, а потому разлагается в произведение линейного и квадратичного сомножителя.
3. Любой многочлен четвёртой степени разлагается в произведение многочленов второй степени.

Пример 1. Разложите на множители многочлен: $6x^2+5x+1$

Допустим, что данный многочлен второй степени можно представить в виде произведения $6x^2+5x+1=(ax+b)(cx+d)$, где коэффициенты a, b, c, d - неизвестные нам целые числа.

Тогда $6x^2+5x+1=acx^2+x(bc+ad)+bd$. Это будет верно, если

$$\begin{cases} ac=6, \\ ad+bc=5, \\ bd=1. \end{cases}$$

Начнем с наиболее простого уравнения $bd=1$ т.к. b и d целые числа, то возможны лишь два варианта: $b=d=1$ или $b=d=-1$.

Если $b=d=1$, $a+c=5$ и $ac=6$.

Подбором находим, что $a=2$ и $c=3$ или $a=3$ и $c=2$.

$6x^2+5x+1=(2x+1)(3x+1)$ или $6x^2+5x+1=(3x+1)(2x+1)$

Пример 2. Решите уравнение $x^3+4x^2+5x+2=0$

Разложим левую часть уравнения на множители используя метод неопределенных коэффициентов

$$x^3+4x^2+5x+2=(x+a)(x^2+bx+c)=x^3+ax^2+bx^2+abx+ac+xc=$$
$$=x^3+x^2(a+b)+x(ab+c)+ac.$$

Т.к., старший коэффициент равен 1, то

$$x^3+4x^2+5x+2=x^3+x^2(a+b)+x(ab+c)+ac.$$

$$\begin{cases} a+b=4, \\ ab+c=5, \\ ac=2, \end{cases}$$

Учитывая равенство многочленов, получим систему:

$a = 2, c = 1; a = 1, c = 2; a = -2, c = -1$ или $a = -1; c = -2.$

При $a = 2, c = 1$ имеем $b = 4 - 2 = 2$, тогда $2 \cdot 2 + 1 = 4 + 1 = 5.$

Значит $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = (x-2)(x^2 + 2x + 1).$ И тогда $(x-2)(x^2 + 2x + 1) = 0,$

$$x^2 + 2x + 1 = 0,$$

$$x - 2 = 0 \qquad (x+1)^2 = 0,$$

$$x_1 = 2 \quad \text{или} \quad x_2 = -1.$$

Ответ: 2; -1.

Пример 3

Example 1.3.2

If $4x^3+2x^2+3 \equiv (x-2)\left(Ax^2+Bx+C\right)+R$, find A, B, C and R.

Multiplying out the right side gives

$$4x^3+2x^2+3 \equiv Ax^3+(-2A+B)x^2+(-2B+C)x+(-2C+R).$$

Equating coefficients of x^3: $\quad 4=A$.
Equating coefficients of x^2: $\quad 2=-2A+B=-2\times 4+B=-8+B$, so $B=10$.
Equating coefficients of x: $\quad 0=-2B+C=-20+C$, so $C=20$.
Equating coefficients of x^0: $\quad 3=-2C+R=-40+R$, giving $R=43$.

Therefore $A=4$, $B=10$, $C=20$ and $R=43$, so

$$4x^3+2x^2+3 \equiv (x-2)\left(4x^2+10x+20\right)+43.$$

In practice, people often use the symbol for equality, $=$, when they really mean the symbol for identity, $\equiv$. The context usually suggests which meaning is intended.

Фронтальная работа

1 In each of the following quadratic polynomials one factor is given. Find the other factor.

(c) $3x^2 + 5x - 22 \equiv (x-2)(\qquad)$

(e) $2x^2 - x - 15 \equiv (2x+5)(\qquad)$

Answer:

(c) $3x+11$

(e) $x-3$

Фронтальная работа

3 In each of the following identities find the values of A, B, C and R.

(a) $x^3 - x^2 - x + 12 \equiv (x+2)(Ax^2 + Bx + C) + R$

(b) $x^3 - 5x^2 + 10x + 10 \equiv (x-3)(Ax^2 + Bx + C) + R$

Answer:

3 (a) $1, -3, 5, 2$ (b) $1, -2, 4, 22$