

Решение уравнений и неравенств с модулем



Гадирова Натаван Яхьяевна,
учитель математики
МБОУ «Лицей № 4»
г.о. Королев

Содержание

1. Определение модуля

2. Виды уравнений

3. Методы решения уравнений

4. Задания для самостоятельного решения

5. Выводы

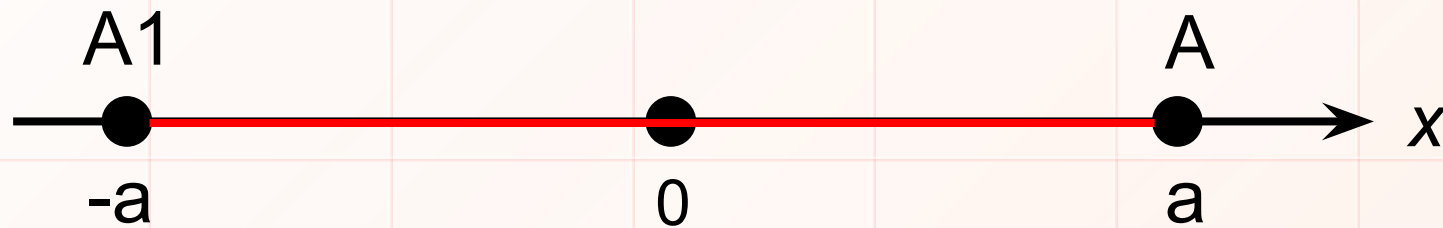
Большинство уравнений с модулем можно решить исходя из определения модуля:

Модулем или абсолютной величиной действительного числа a называется неотрицательное число $|a|$, равное числу a , если $a \geq 0$, и числу $(-a)$, если $a < 0$.

Таким образом,

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

Геометрический смысл модуля



Модуль – расстояние от начала отсчета на координатной прямой до точки, изображающей число.

Модуль разности двух чисел a и b равен расстоянию между точками координатной прямой с координатами a и b .

Свойства модуля - абсолютной величины:

1. $|a| \geq 0$

2. $|a| = |-a|;$

3. $|a| \geq a$ и $|a| \geq -a;$ или $-|a| \leq a \leq |a|$

4. $|ab| = |a| \cdot |b|;$ $|a/b| = |a|/|b|;$ ($b \neq 0$),

5. $|a + b| \leq |a| + |b|,$ причем $|a + b| = |a| + |b|,$ если $a \geq 0;$

$$|a - b| \geq |a| - |b|;$$

6. $|a|^2 = a^2 = |a^2|$

Уравнение, содержащее неизвестную под знаком модуля, называется уравнением с модулем.

Виды уравнений:

* $|f(x)| = a, \quad a = \text{const}$

* $|f(x)| = g(x)$

* $|f(x)| = |g(x)|$

* $|f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_n(x)| = g(x)$

Из определения и свойств модуля вытекают основные методы решения уравнений и неравенств с модулем:

1. “раскрытие” модуля (т.е. использование определения);
2. использование геометрического смысла модуля;
3. метод интервалов;
4. использование равносильных преобразований;
5. замена переменной.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ.

Уравнение вида:

$$|f(x)| = a, a = \text{const}$$

Равносильно :

1. \emptyset , если $a < 0$

2. $f(x) = 0$, если $a = 0$

3.
$$\begin{cases} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{cases}, \text{ если } a > 0$$

Пример 1.

Решить уравнение

$$|x^2 + 3x - 2| = 1$$

Решение:

$$|x^2 + 3x - 2| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 2 = 1 \\ x^2 + 3x - 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 3 = 0; \\ x^2 + 3x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2} \\ x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Ответ: $\frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}, \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$

Заметим, что если бы мы решали уравнение по определению, то у нас возникли бы затруднения при подстановке корней в соответствующие неравенства.

Рассмотрим уравнения вида

$$|f(x)| = g(x)$$

Такие уравнения можно решать двумя способами:

I способ:

Если $f(x)$ имеет более простой вид, чем $g(x)$, то

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) = g(x). \end{cases} \end{cases}$$

Пример 2

Решить уравнение

$$|x - 7| = x^3 - 15x^2 + x + 7$$

Решение:

$$|x - 7| = x^3 - 15x^2 + x + 7 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 7 \geq 0, \\ x - 7 = x^3 - 15x^2 + x + 7; \\ x - 7 < 0, \\ -x + 7 = x^3 - 15x^2 + x + 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7, \\ x^3 - 15x^2 + 14 = 0; \\ x < 7, \\ x^3 - 15x^2 + 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7, \\ (x^3 - x^2) - 14(x^2 - 1) = 0; \\ x < 7, \\ x(x^2 - 15x + 2) = 0 \end{cases}$$

Решим уравнение первой системы:

$$(x^3 - x^2) - 14(x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x - 1) - 14(x - 1)(x + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 14x + 14) = 0$$

$$x = 1; \quad x = 7 \pm \sqrt{63}$$

Решим уравнение второй системы:

$$x(x^2 - 15x + 2) = 0$$

$$x = 0; \quad x = \frac{15 \pm \sqrt{217}}{2}$$

Вернемся к совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \geq 7, \\ x = 1, \\ x = 7 + \sqrt{63}, \\ x = 7 - \sqrt{63}, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x < 7, \\ x = 0, \\ x = \frac{15 + \sqrt{217}}{2}, \\ x = \frac{15 - \sqrt{217}}{2} \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 7 + \sqrt{63}, \\ x = 0, \\ x = \frac{15 - \sqrt{217}}{2} \end{array} \right.$$

Ответ: $0; 7 + \sqrt{63}, \frac{15 - \sqrt{217}}{2}$.

II способ: Если $g(x)$ имеет более простой вид, чем $f(x)$.

Если $g(x) < 0$, то уравнение $|f(x)| = g(x)$ не имеет решений

Если $g(x) \geq 0$, то

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{array} \right. \end{cases}$$

Пример 3

Решить уравнение $|6x^3 - 2x^2 + 4x - 33| = 10x - 35$

Решение:

$$|6x^3 - 2x^2 + 4x - 33| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 35 \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} 6x^3 - 2x^2 + 4x - 33 = 10x - 35, \\ 6x^3 - 2x^2 + 4x - 33 = -10x + 35 \end{array} \right. \end{cases}$$

Решим первое уравнение совокупности:

$$6x^3 - 2x^2 + 4x - 33 = 10x - 35 \Leftrightarrow 6x^3 - 2x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x(x^2 - 1) - 2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 1)(3x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1, \\ x = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Решим второе уравнение совокупности:

$$6x^3 - 2x^2 + 4x - 33 = -10x + 35 \Leftrightarrow 6x^3 - 2x^2 + 14x - 68 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x^3 - 48 - 2x^2 + 8 + 14x - 28 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6(x-2)(x^2 + 2x + 4) - 2(x-2)(x+2) + 14(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(3x^2 + 5x + 17) = 0 \quad \Leftrightarrow x = 2$$

Вернемся к системе:

$$\begin{cases} 10x - 35 \geq 0, \\ x = \pm 1, \\ x = \frac{1}{3}, \\ x = 2 \end{cases}$$

Система решений не имеет, следовательно, уравнение решений не имеет.

Рассмотрим уравнения вида

$$|f(x)| = |g(x)|$$

Так как обе части уравнения неотрицательны, то

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x)$$

$$\Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{cases}$$

И мы получаем следующую равносильность:

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{cases}$$

Пример 4

Решить уравнение

$$\text{Решение: } |x^5 - 6x^2 + 9x - 6| = |x^5 - 2x^3 + 6x^2 - 13x + 6|$$

$$|x^5 - 6x^2 + 9x - 6| = |x^5 - 2x^3 + 6x^2 - 13x + 6|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^5 - 6x^2 + 9x - 6 = x^5 - 2x^3 + 6x^2 - 13x + 6, \\ x^5 - 6x^2 + 9x - 6 = -x^5 + 2x^3 - 6x^2 + 13x - 6. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^5 - 2x^3 - 4x = 0, \\ 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x^4 - x^2 - 2) = 0, \\ 2(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = 0. \end{cases}$$

Решим первое уравнение совокупности:

$$2x(x^4 - x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x(x^4 - 1 - x^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x((x^2 - 1)(x^2 + 1) - (x^2 + 1)) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1)(x^2 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{cases}$$

Решим второе уравнение совокупности:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 2, \\ x = 3. \end{cases}$$

Вернемся к совокупности:

$$\begin{cases} x = 0, \\ x = \pm\sqrt{2}, \\ x = 1, \\ x = 2, \\ x = 3. \end{cases}$$

Ответ: $0, \pm\sqrt{2}, 1, 2, 3.$

Рассмотрим уравнения вида

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_n(x)| = g(x)$$

Для решения уравнений такого вида удобно воспользоваться следующим алгоритмом:

- 1) Найти нули подмодульных выражений;
- 2) Провести столько параллельных прямых, сколько содержится модулей в данном уравнении;
- 3) Нанести на каждую прямую знаки, соответствующие подмодульной функции;
- 4) Через точки, соответствующие подмодульным нулям, провести вертикальные прямые, которые разобьют параллельные прямые на интервалы;
- 5) Раскрыть модули на каждом интервале и решить на этом интервале уравнение.

Пример 5

Решить уравнение

$$|x + 1| + |2 - x| - |x + 3| = 4$$

Решение:

$$|x + 1| = 0$$

$$|2 - x| = 0$$

$$|x + 3| = 0$$

$$x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = -3$$

	I	II	III	IV
$ x + 1 $	-	-	+	+
$ 2 - x $	+	+	+	-
$ x + 3 $	-	+	+	+

-3 -1 2

x

Раскрывая модули на каждом интервале, получим совокупность

систем:

$$|x+1| + |2-x| - |x+3| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3, \\ -x-1+2-x+x+3=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3, \\ x=0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} -3 < x \leq -1, \\ -x-1+2-x-x-3=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x \leq -1, \\ x=-2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} -1 < x \leq 2, \\ x+1+2-x-x-3=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x \leq 2, \\ x=-4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x > 2, \\ x+1-2+x-x-3=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x=8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -2, x = 8.$$

Ответ: -2; 8

В некоторых случаях удобнее использовать метод замены переменной.

Пример 6

Решить уравнение $(x - 2)^2 + 2|x - 2| - 8 = 0$

Решение:

Данное уравнение может быть решено несколькими способами.

Например:

Способ 1. Используя определение модуля.

Способ 2. Свести уравнение к равносильности $|f(x)| = g(x)$

Способ 3. Замена переменной.

Заметим, что $(x - 2)^2 = |x - 2|^2$ Замена: $|x - 2| = t, t \geq 0$

Уравнение принимает вид: $t^2 + 2t - 8 = 0, t_1 = -4$ (п.к.), $t_2 = 2$

Обратная замена: $|x - 2| = 2 \Leftrightarrow x = 4, x = 0$

Ответ: 0; 4

Бывает и так, что уравнение нельзя отнести ни к одному из рассмотренных типов, а так затруднительно решить его исходя из определения. В этом случае удобно воспользоваться **графическим** способом решения.

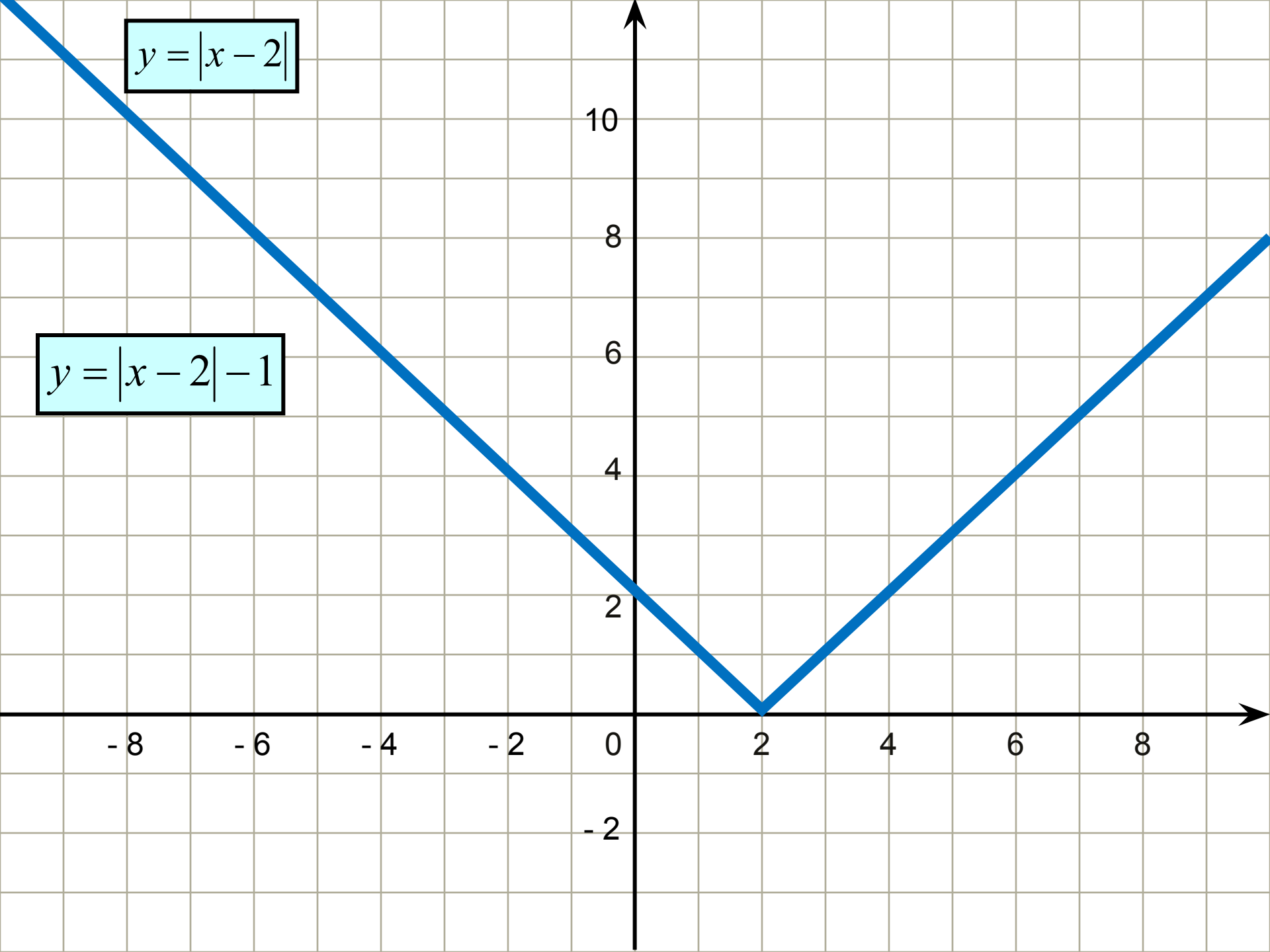
Пример 7

Решить уравнение $\left| \left| \left| x - 2 \right| - 1 \right| - 2 \right| = x + 1$

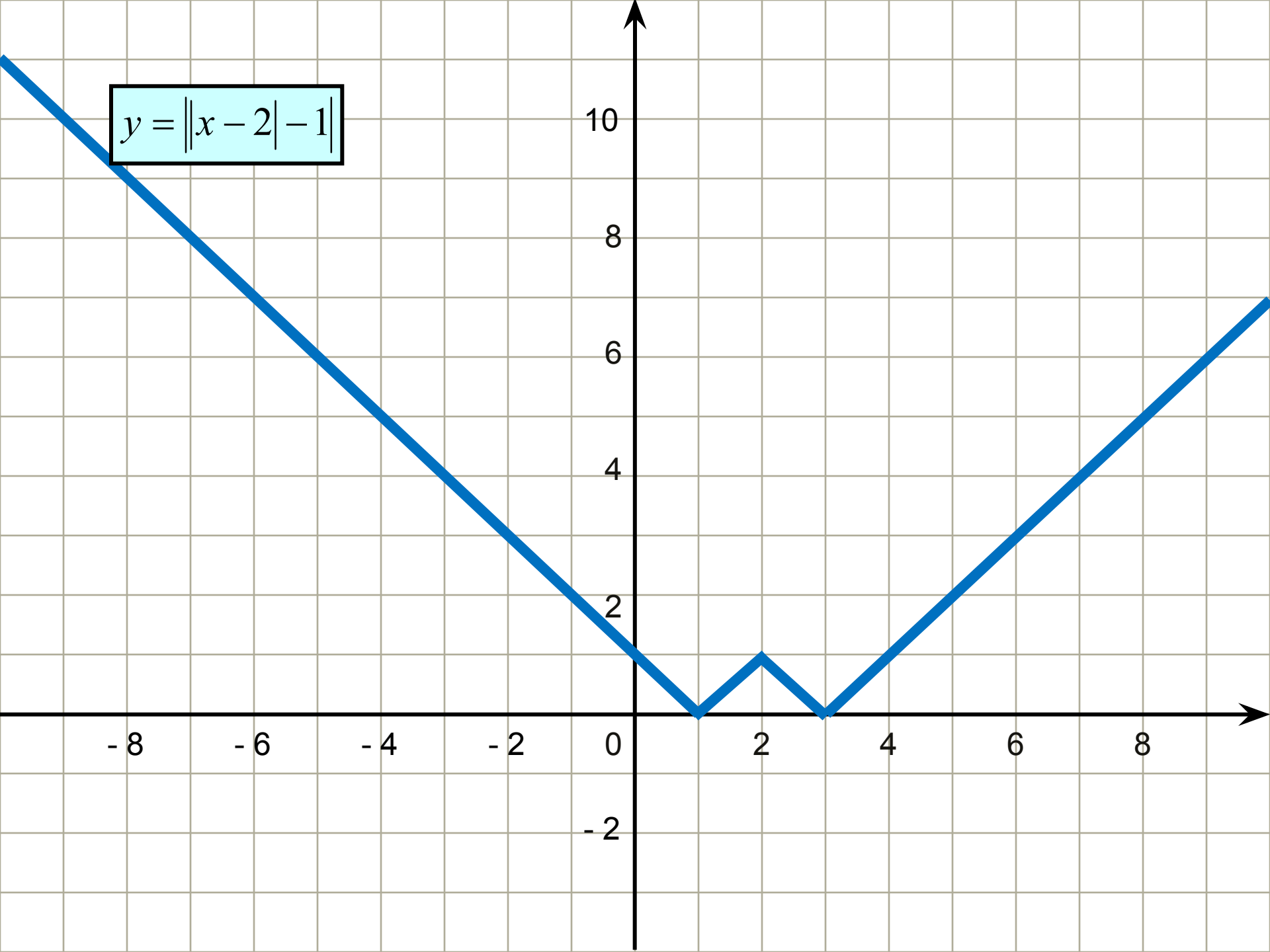
Решение:

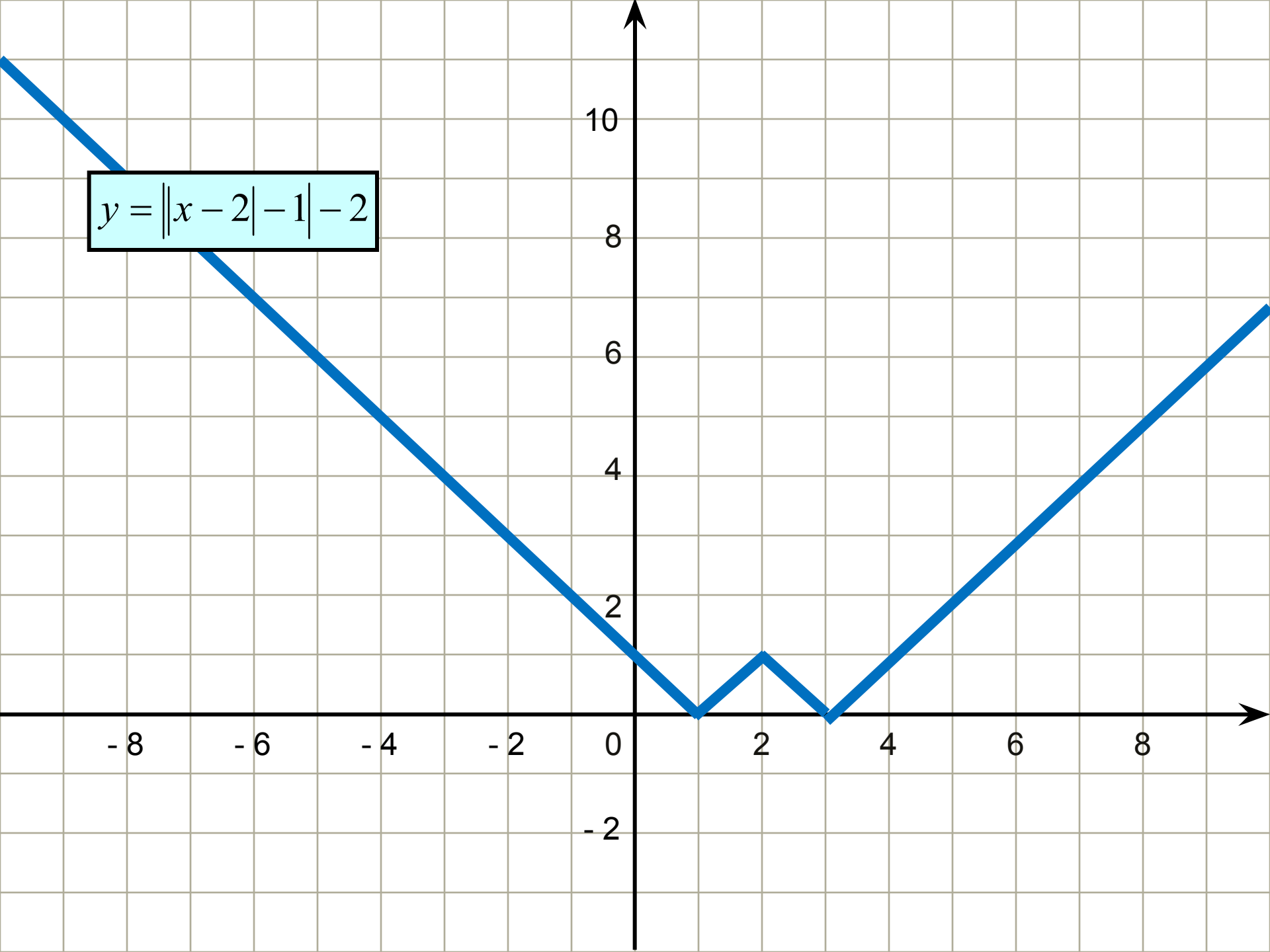
Построим в одной системе координат графики функций

$$y = \left| \left| \left| x - 2 \right| - 1 \right| - 2 \right|, \quad y = x + 1$$



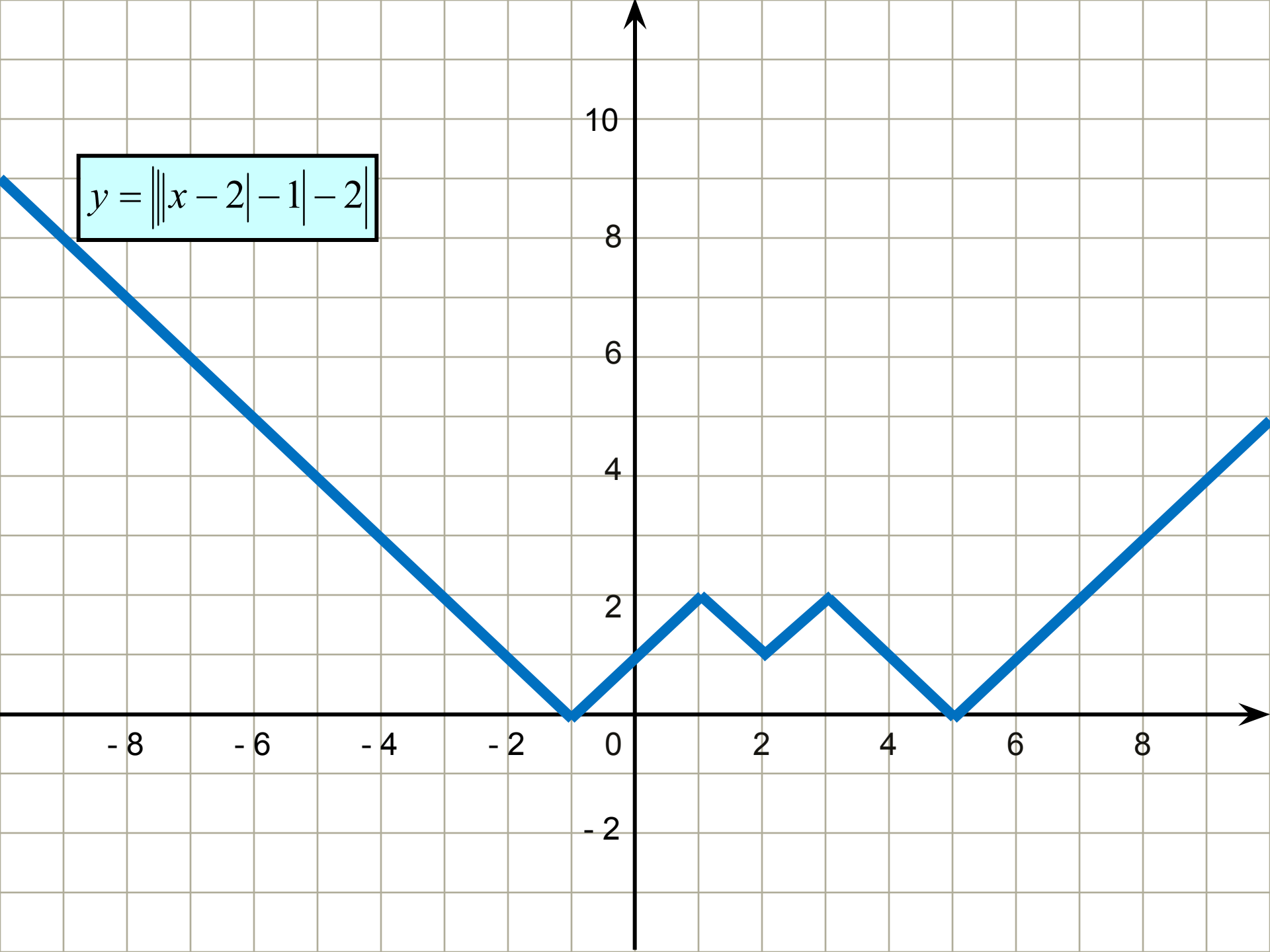
$$y = ||x - 2| - 1|$$

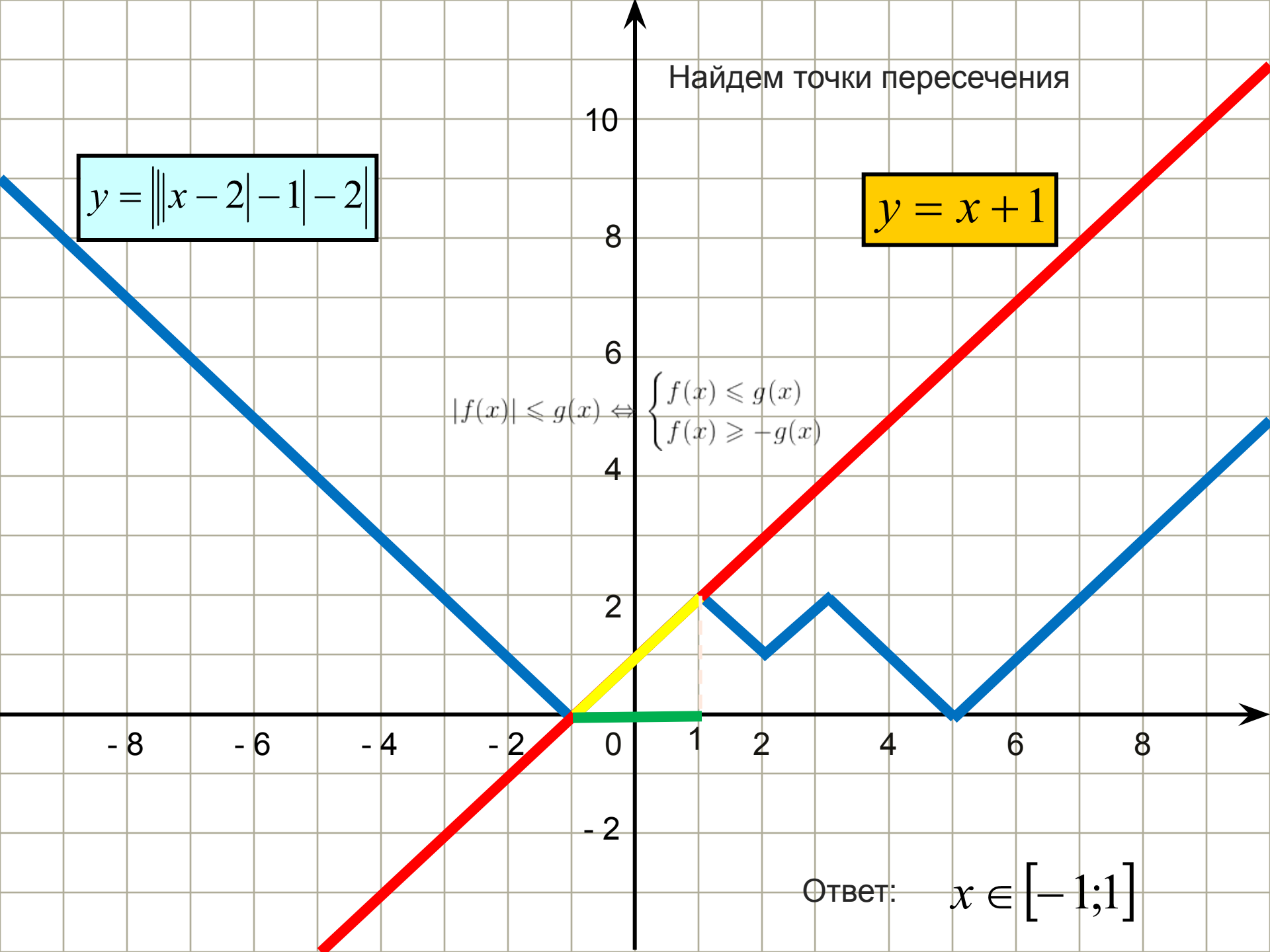




$$y = ||x - 2| - 1| - 2$$

$$y = |||x - 2| - 1| - 2|$$





Задания для самостоятельного решения:

$$1) |x^2 + x - 3| = x$$

$$2) |x - 2| + |x - 3| + |2x - 8| = 9$$

$$3) |x - x^2 - 1| = |2x - 3 - x^2|$$

$$4) (x + 1)^2 - 2|x + 1| + 1 = 0$$

$$5) x^2 + 2x - 3|x + 1| + 3 = 0$$

Выводы

1. Виды уравнений:

$$|f(x)| = a, a = \text{const}$$

$$|f(x)| = g(x)$$

$$|f(x)| = |g(x)|$$

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_n(x)| = g(x)$$

2. Методы решения уравнений

- Аналитический:
 - по определению
 - использование равносильности
 - разбиение на промежутки
 - замена переменной
- Функционально – графический или Графический

**Спасибо за
внимание!**

