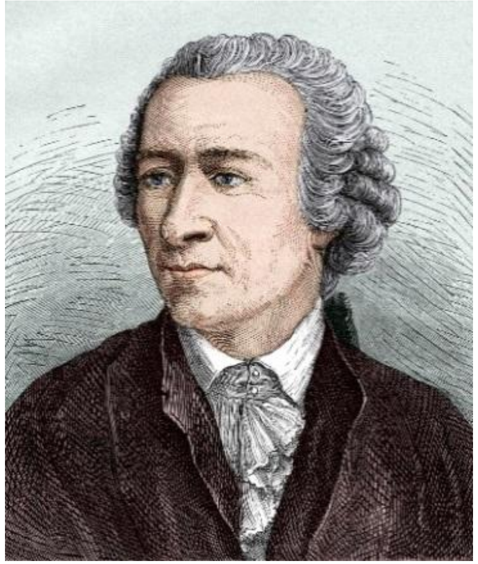


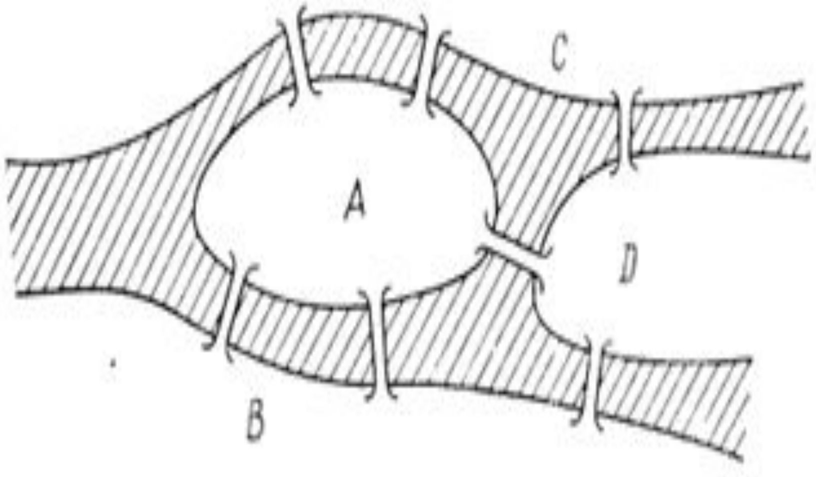


Рис. 1.1.1

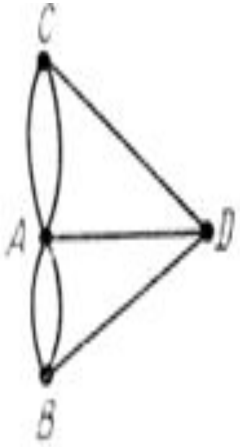


Рис. 1.1.2

Родоначальником теории графов является математик Леонард Эйлер, решивший в 1736 г. широко известную в то время задачу, называвшуюся проблемой кенигсбергских мостов. В городе Кенигсберге (ныне Калининград) было два острова, соединенных семью мостами с берегами реки Преголя и друг с другом так, как показано на рис. 1.1.1. Задача состояла в следующем: найти маршрут прохождения всех четырех частей суши, который начинался бы с любой их них, кончался бы на этой же части и ровно один раз проходил по каждому мосту. Легко, конечно, попытаться решить эту задачу эмпирически (зрительно), производя перебор всех маршрутов, но все попытки окончатся неудачей. Исключительный вклад Эйлера в решение этой задачи заключается в том, что он доказал невозможность такого маршрута.

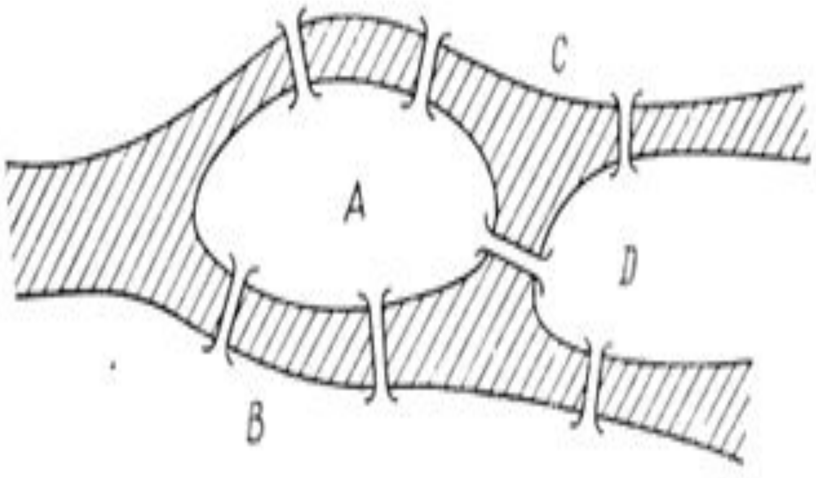


Рис. 1.1.1

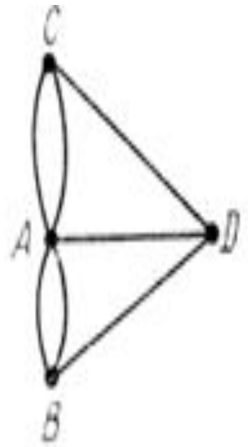


Рис. 1.1.2

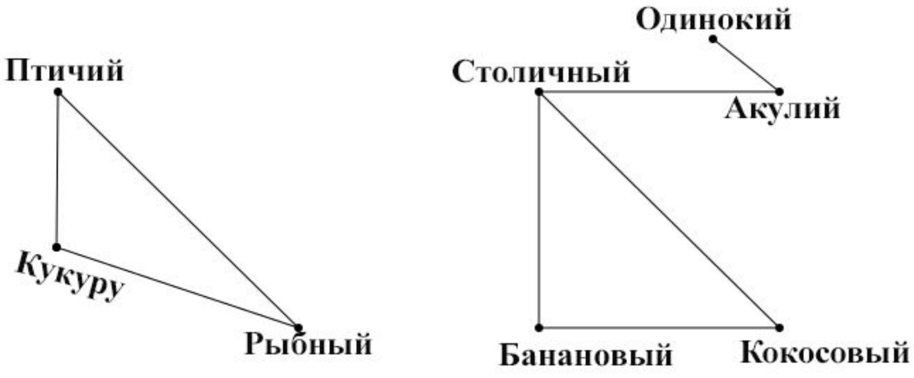
Для доказательства того, что задача не имеет решения, Эйлер обозначил каждую часть суши точкой (вершиной), а каждый мост - линией (ребром), соединяющий соответствующие точки. Получился «граф». Он показан на рис. 1.1.2, где точки отмечены теми же буквами, что и четыре части суши на рис. 1.1.1.

Утверждение о не существовании «положительного» решения у этой задачи эквивалентно утверждению о невозможности обойти специальным образом граф, представленный на рис. 1.1.2

Для знакомства с понятием ***графа*** рассмотрим несколько наглядных задач.

Задача 1. В государстве Морляндия находятся 8 крупных островов, некоторые из которых соединены радиосвязью. Связь есть между следующими островами:

Банановый – Кокосовый;
Кукуру – Рыбный;
Столичный – Акулий;
Птичий – Кукуру;
Одинокий – Столичный;
Акулий – Одинокий;
Столичный – Кокосовый;
Птичий – Рыбий.



Можно ли послать сообщение с острова Банановый на остров Акулий? А с острова Акулий на Рыбный?

Решение. Нарисуем схему радиосвязи. Острова обозначим точками (вершинами), радиосвязь линиями (ребрами). Из схемы видно, что с острова Банановый на остров Акулий послать сообщение, а с острова Акулий на Рыбный – нет. Отсюда делаем вывод:

Понятие графа

Граф - это множество точек или вершин и множество линий или ребер, соединяющих между собой все или часть этих точек.
Вершины, прилегающие к одному и тому же ребру, называются смежными. Два ребра, у которых есть общая вершина, также называются смежными (или соседними).

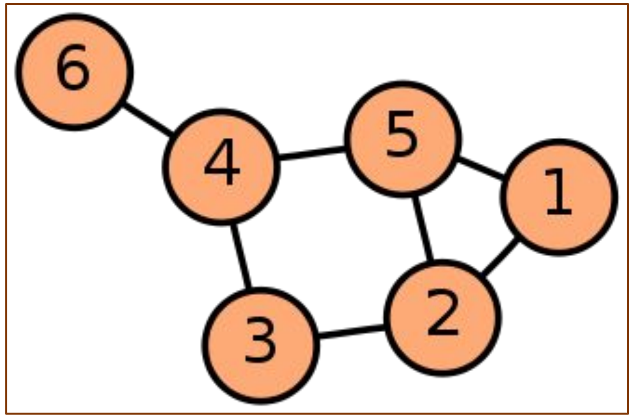


Рис. 1. Граф с шестью вершинами и семью ребрами

Элементы графа

Петля это дуга, начальная и конечная вершина которой совпадают.
Пустым (нулевым)называется граф без ребер.
Полным называется граф, в котором каждые две вершины смежные.

Нулевой граф

Граф, состоящий из «изолированных» вершин, называется нулевым графом

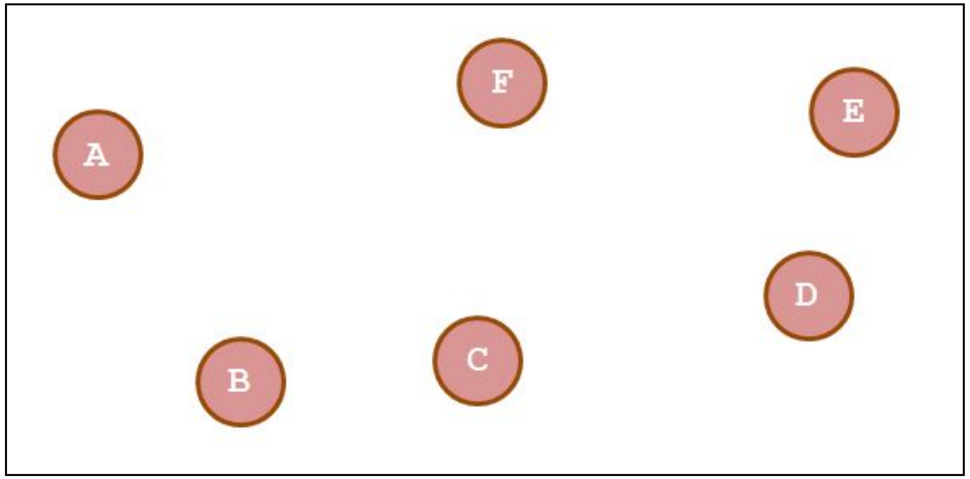


Рис. 2. Нулевой граф

Неполный граф

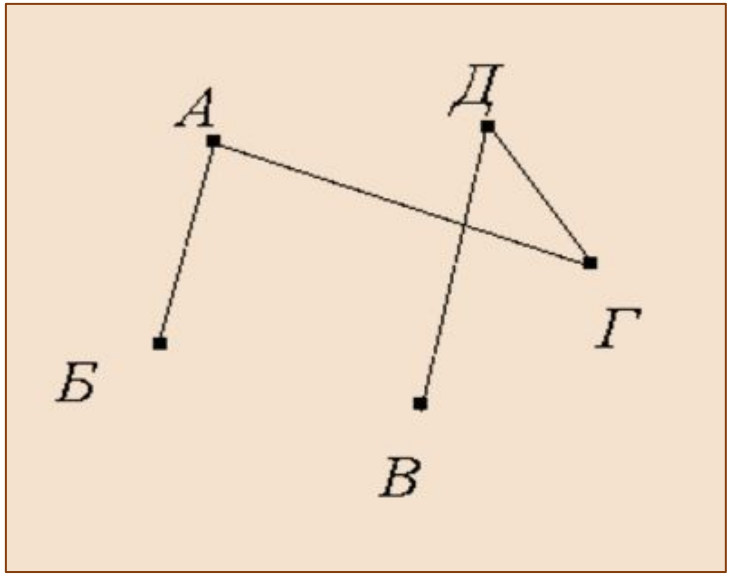


Рис. 3. Неполный граф

Графы, в которых не построены все возможные ребра, называются неполными графами.

Степень графа

Количество рёбер, выходящих из вершины графа, называется степенью вершины. Вершина графа, имеющая нечётную степень, называется нечетной, а чётную степень – чётной.

Если степени всех вершин графа равны, то граф называется однородным. Таким образом, любой полный граф – однородный.

Заметим, что если полный граф имеет <u>n</u> вершин, то количество ребер равно

$$n(n-1)/2$$

<u>Задание 1</u>. Существует ли полный граф с семью ребрами?

ОТВЕТ

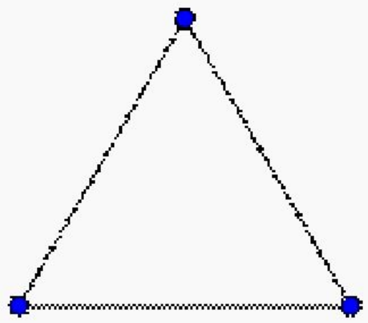
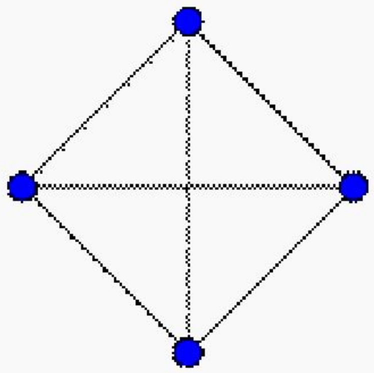
<u>Решение</u>: Зная количество ребер, узнаем количество вершин.

$$n(n-1)/2=7.$$

$$n(n-1)=14.$$

Заметим, что n и (n-1) – это два последовательных натуральных числа. Число 14 нельзя представить в виде произведения двух последовательных натуральных чисел, значит, данное уравнение не имеет решений. <u>Следовательно, такого графа не существует.</u>

Примеры полных графов

K_1: 0	K_2: 1	K_3: 3	K_4: 6
			

Задание 2.Построить полный граф для 5 вершин.

Ориентированный граф

Граф называется ориентированным (или орграфом), если некоторые ребра имеют направление. Это означает, что в орграфе некоторая вершина может быть соединена с другой вершиной, а обратного соединения нет. Если ребра ориентированы, что обычно показывают стрелками, то они называются дугами.

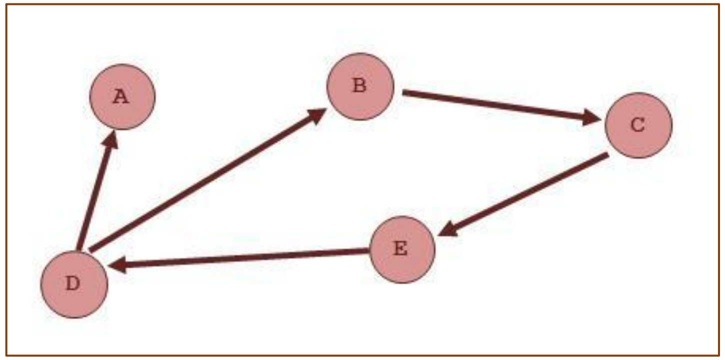


Рис. 4. Ориентированный граф

Ориентированный и неориентированный графы

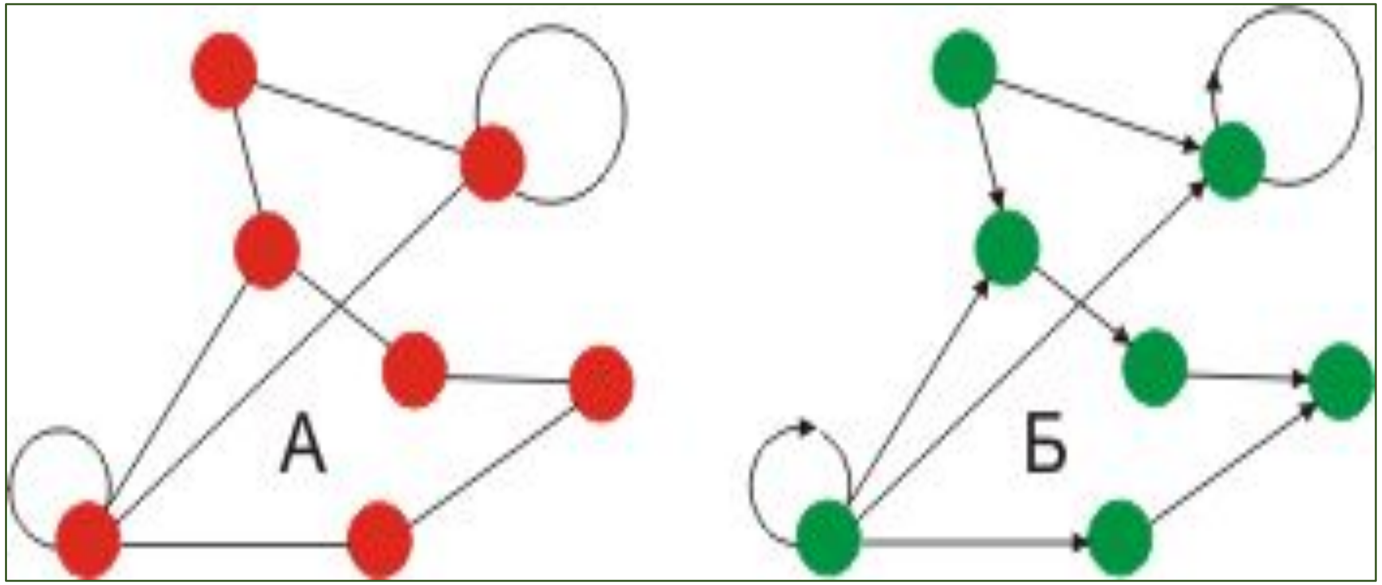


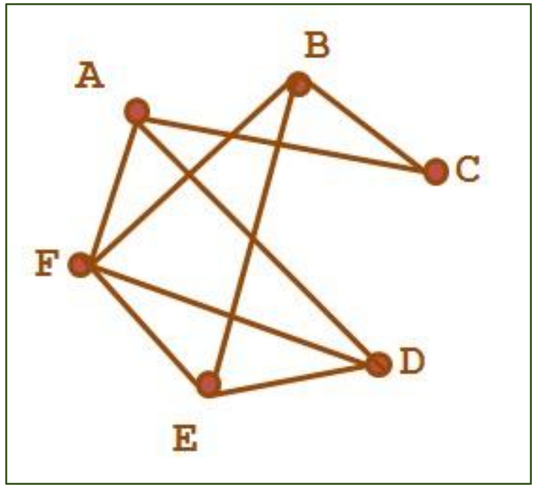
Рис. 5. Примеры неориентированного
и ориентированного графов (А и Б)

Задание. Построить граф по заданному условию:

В соревнованиях по футболу участвуют 6 команд. Каждую из команд обозначили буквами A, B, C, D, E и F. Через несколько недель некоторые из команд уже сыграли друг с другом:

A с C, D, F;
B с C, E, F;
C с A, B;
D с A, E, F;
E с B, D, F;
F с A, B, D.

ОТВЕТ



Запомнить!

Не следует путать изображение графа с собственно графом (абстрактной структурой), поскольку одному графу можно сопоставить не одно графическое представление. Изображение призвано лишь показать, какие пары вершин соединены рёбрами, а какие — нет.

Изображение графа

Один и тот же граф может выглядеть на рисунках по-разному. На рисунке 6 (а, б, в) изображен один и тот же граф.

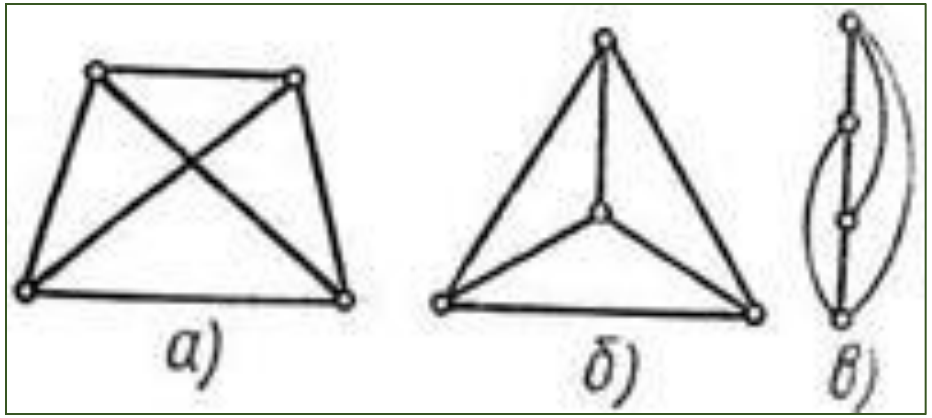
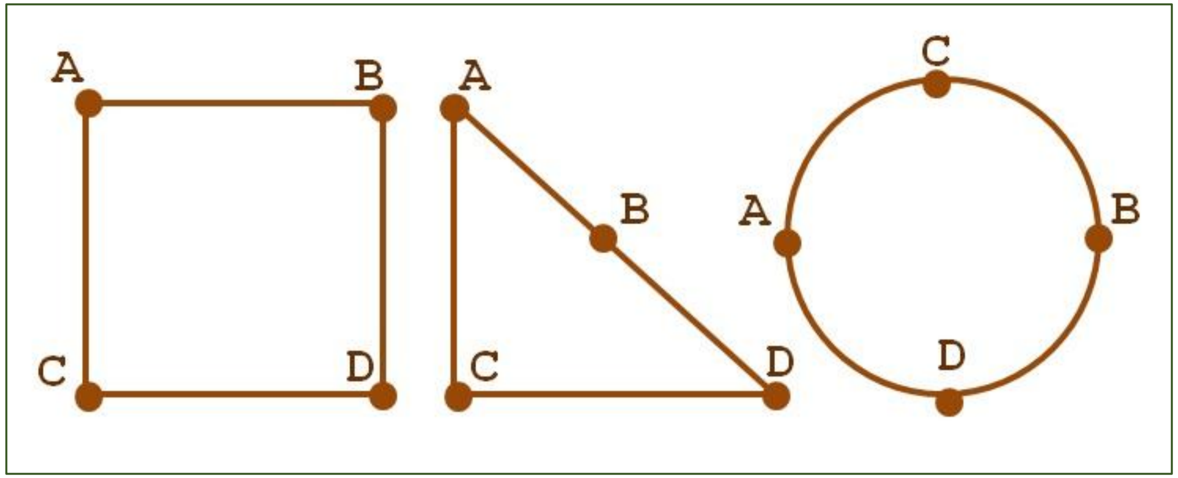


Рис. 6. Примеры изображения графа

Задание 4.

Определить изображают ли фигуры на рисунке один и тот же граф или нет.

1) 2) 3)



ОТВЕТ

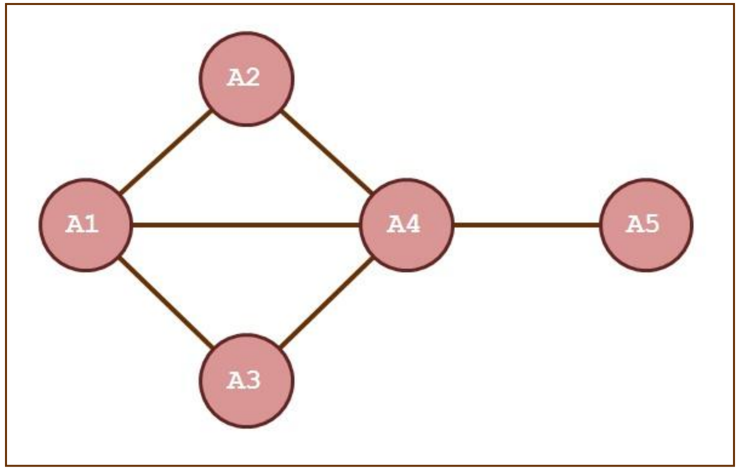
Рисунок 1 и рисунок 2 являются изображениями одного графа.
Рисунок 3 изображением другого графа

Путь в графе

Путём в графе называется такая последовательность ребер, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину и никакое ребро не встречается более одного раза.

Задание 5.

1. (А1 А4); (А4 А5).
2. (А1 А2); (А2 А4); (А4 А5).
3. (А1 А4); (А4 А2); (А2 А1); (А1 А4); (А4, А5).
4. (А1 А4); (А4 А2); (А2 А1); (А1 А3); (А3 А4); (А4, А5).



Определить какая из перечисленных последовательностей путём не является.

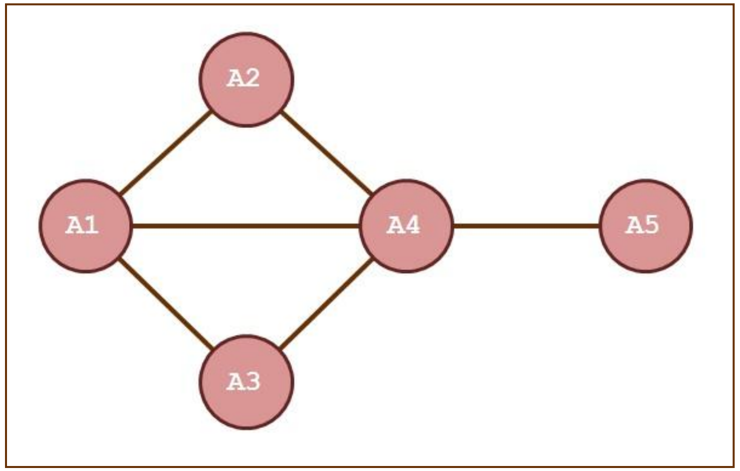
ОТВЕТ

Третья последовательность (А1 А4); (А4 А2); (А2 А1); (А1 А4); (А4, А5).

Путь называется простым, если он не проходит ни через одну из вершин графа более одного раза.

Задание 6.

1. (A1 A4); (A4 A5).
2. (A1 A2); (A2 A4); (A4 A5).
3. (A1 A4); (A4 A2); (A2 A1); (A1 A4); (A4, A5).
4. (A1 A4); (A4 A2); (A2 A1); (A1 A3); (A3 A4); (A4, A5).



Первая, вторая и четвертая последовательности являются путями, а третья нет, т.к. ребро (A1, A4) повторяется. Первая и вторая последовательность являются простыми путями, а четвертая нет, т.к. вершины A1 и A4 повторяются.

ОТВЕТ

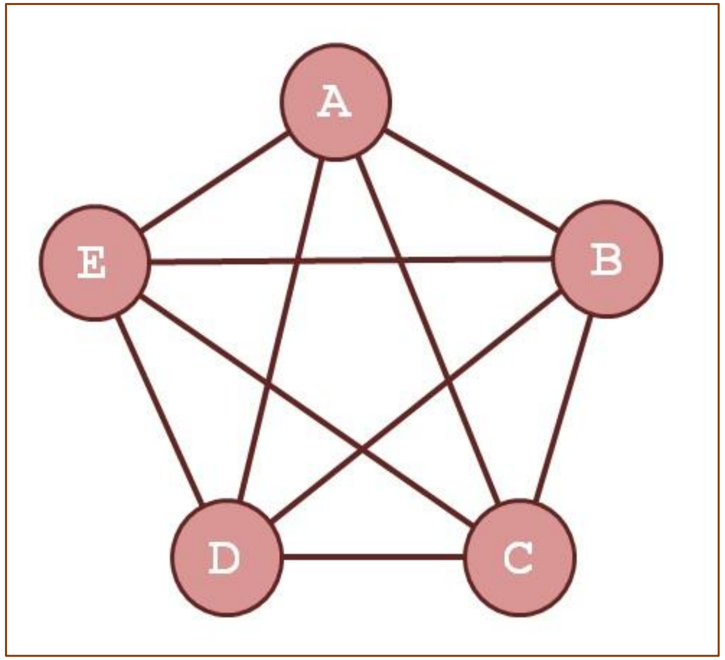
Понятие цикла в графе

Циклом называется путь, в котором совпадают его начальная и конечная вершины.

Простым циклом в графе называется цикл, не проходящий ни через одну из вершин графа более одного раза.

Задание 7.

Назовите в графе циклы, содержащие



a) 4 ребра;
b) 6 ребер;
c) 5 ребер;
d) 10 ребер.
Какие из этих циклов являются простыми?

ОТВЕТ

ОТВЕТ

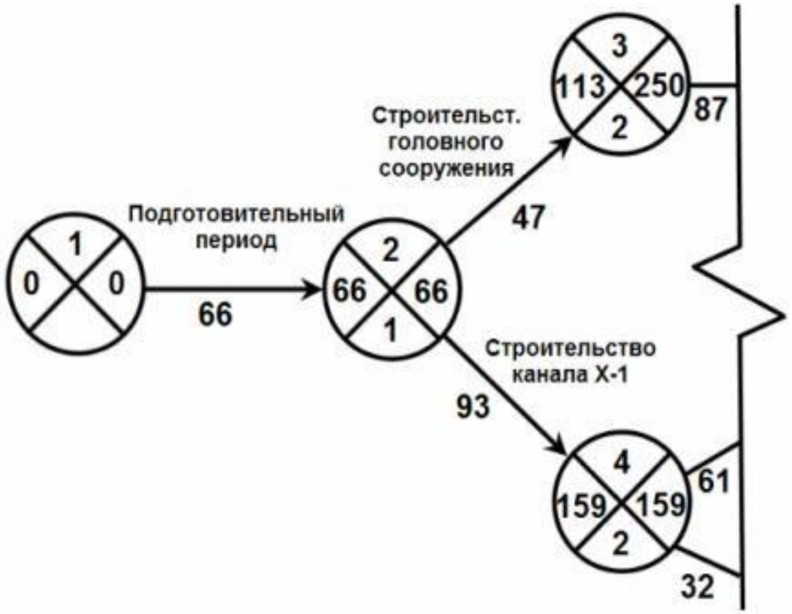
Решение:

a) (AB, BC, CE, EA), (CD, DA, AB, BC), (EB, BC, CD, DE) и т.д. – простые циклы.
b) (DB, BE, EA, AB, BC, CD), (EC, CA, AB, BC, CD, DE) и т.д. – циклы.
c) (AB, BC, CD, DE, EA), (AC, CE, EB, BD, DA) и т.д. – простые циклы.
d) (AC, CE, EB, BD, DA, AB, BC, CD, DE, EA), (EB, BD, DA, AC, CE, EA, AB, BC, CD, DE) и т.д. – циклы.

Теория графов нашла свое применение и в архитектуре и строительстве.

При составлении больших проектов, содержащих различные виды работ, часто возникает ситуация, когда ту или иную работу можно начать лишь по окончании других. Так при строительстве дома нельзя приступить к отделочным работам, пока не возведены стены, и нельзя возводить стены до укладки фундамента.

Последовательность работ изображается в виде сетевых графиков (рис.). Они применяются при планировании деятельности предприятия.



Теория графов является частью многих наук. Без нее в химии сложно было бы проиллюстрировать строение молекул, в физике описать электрическую цепь, а в повседневной жизни быстро разобраться с маршрутами автобусов, самолетов, поездов.

Домашнее задание

1. Построить полный граф, если известно что он содержит в себе 7 вершин.
2. Составьте схему проведения розыгрыша кубка по олимпийской системе, в которой участвуют 10 команд.