

Рис. 1.1.1

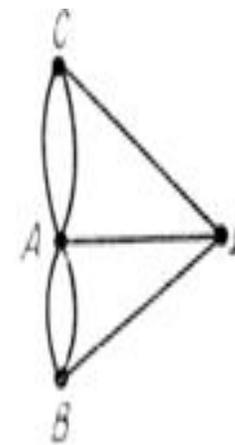


Рис. 1.1.2

Родоначальником теории графов является математик Леонард Эйлер, решивший в 1736 г. широко известную в то время задачу, называвшуюся проблемой кенигсбергских мостов. В городе Кенигсберге (ныне Калининград) было два острова, соединенных семью мостами с берегами реки Преголя и друг с другом так, как показано на рис. 1.1.1. Задача состояла в следующем: найти маршрут прохождения всех четырех частей суши, который начинался бы с любой из них, кончался бы на этой же части и ровно один раз проходил по каждому мосту. Легко, конечно, попытаться решить эту задачу эмпирически (зрительно), производя перебор всех маршрутов, но все попытки окончатся неудачей. Исключительный вклад Эйлера в решение этой задачи заключается в том, что он доказал невозможность такого маршрута.

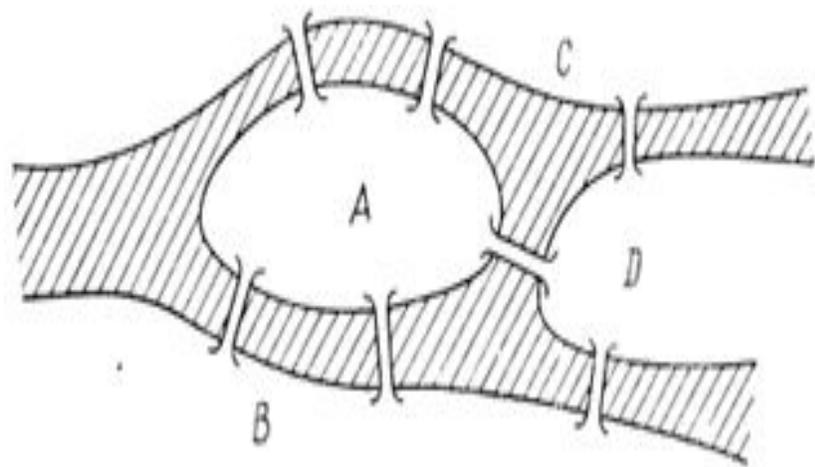


Рис. 1.1.1

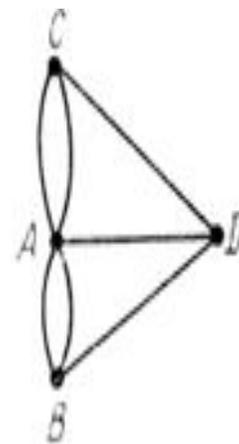


Рис. 1.1.2

Для доказательства того, что задача не имеет решения, Эйлер обозначил каждую часть суши точкой (вершиной), а каждый мост - линией (ребром), соединяющий соответствующие точки. Получился «граф». Он показан на рис. 1.1.2, где точки отмечены теми же буквами, что и четыре части суши на рис. 1.1.1.

Утверждение о не существовании «положительного» решения у этой задачи эквивалентно утверждению о невозможности обойти специальным образом граф, представленный на рис. 1.1.2

Для знакомства с понятием **графа** рассмотрим несколько наглядных задач.

Задача 1. В государстве Морляндия находятся 8 крупных островов, некоторые из которых соединены радиосвязью. Связь есть между следующими островами:

Банановый – Кокосовый;

Кукуру – Рыбный;

Столичный – Акулий;

Птичий – Кукуру;

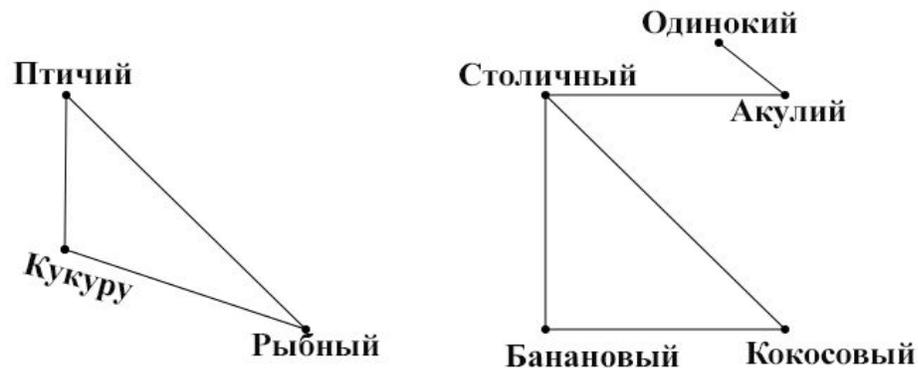
Одинокий – Столичный;

Акулий – Одинокий;

Столичный – Кокосовый;

Птичий – Рыбий.

Можно ли послать сообщение с острова Банановый на остров Акулий? А с острова Акулий на Рыбный?



Решение. Нарисуем схему радиосвязи. Острова обозначим точками (вершинами), радиосвязь линиями (ребрами). Из схемы видно, что с острова Банановый на остров Акулий послать сообщение, а с острова Акулий на Рыбный — нет. Отсюда делаем вывод:

Понятие графа

Граф - это множество точек или вершин и множество линий или ребер, соединяющих между собой все или часть этих точек.

Вершины, прилегающие к одному и тому же ребру, называются смежными. Два ребра, у которых есть общая вершина, также называются смежными (или соседними).

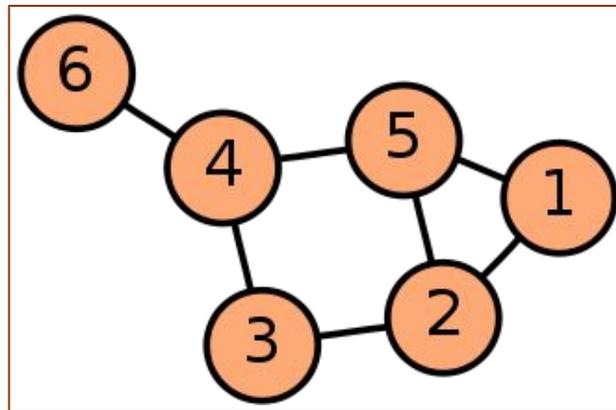


Рис. 1. Граф с шестью вершинами и семью ребрами

Элементы графа

Петля это дуга, начальная и конечная вершина которой совпадают.

Пустым (нулевым) называется граф без ребер.

Полным называется граф, в котором каждые две вершины смежные.

Нулевой граф

Граф, состоящий из «изолированных»
вершин, называется нулевым графом

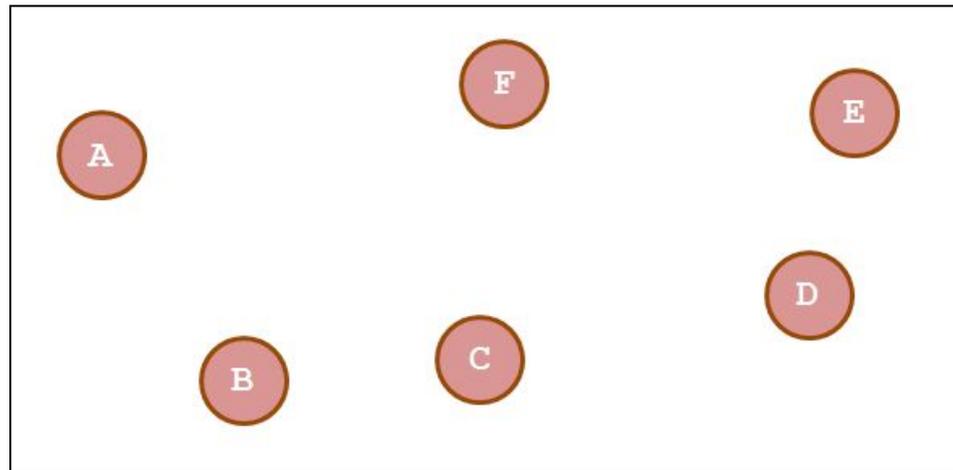


Рис. 2. Нулевой граф

Неполный граф

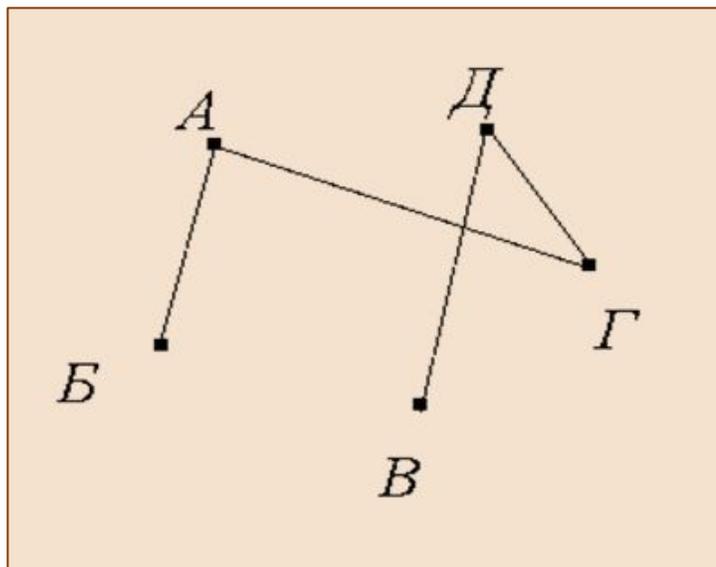


Рис. 3. Неполный граф

Графы, в которых не построены все возможные ребра, называются **неполными графами**.

Степень графа

Количество рёбер, выходящих из вершины графа, называется степенью вершины. Вершина графа, имеющая нечётную степень, называется нечетной, а чётную степень – чётной.

Если степени всех вершин графа равны, то граф называется однородным.

Таким образом, любой полный граф – однородный.

Заметим, что если полный граф имеет n вершин, то количество ребер равно

$$n(n-1)/2$$

Задание 1. Существует ли полный граф с семью ребрами?

ОТВЕТ

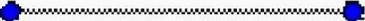
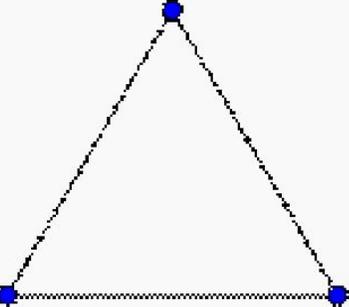
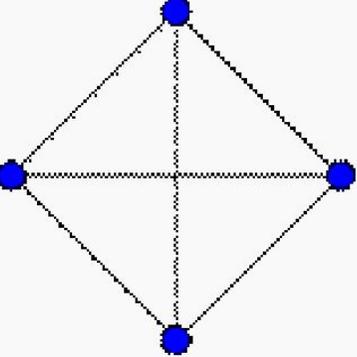
Решение: Зная количество ребер, узнаем количество вершин.

$$n(n-1)/2=7.$$

$$n(n-1)=14.$$

Заметим, что n и $(n-1)$ – это два последовательных натуральных числа. Число 14 нельзя представить в виде произведения двух последовательных натуральных чисел, значит, данное уравнение не имеет решений. Следовательно, такого графа не существует.

Примеры полных графов

$K_1: 0$	$K_2: 1$	$K_3: 3$	$K_4: 6$
			

Задание 2. Построить полный граф для 5 вершин.

Ориентированный граф

Граф называется ориентированным (или оргграфом), если некоторые ребра имеют направление. Это означает, что в оргграфе некоторая вершина может быть соединена с другой вершиной, а обратного соединения нет. Если ребра ориентированы, что обычно показывают стрелками, то они называются дугами.

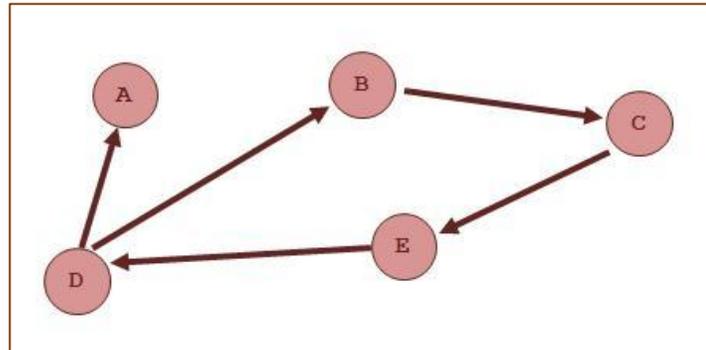


Рис. 4. Ориентированный граф

Ориентированный и неориентированный графы

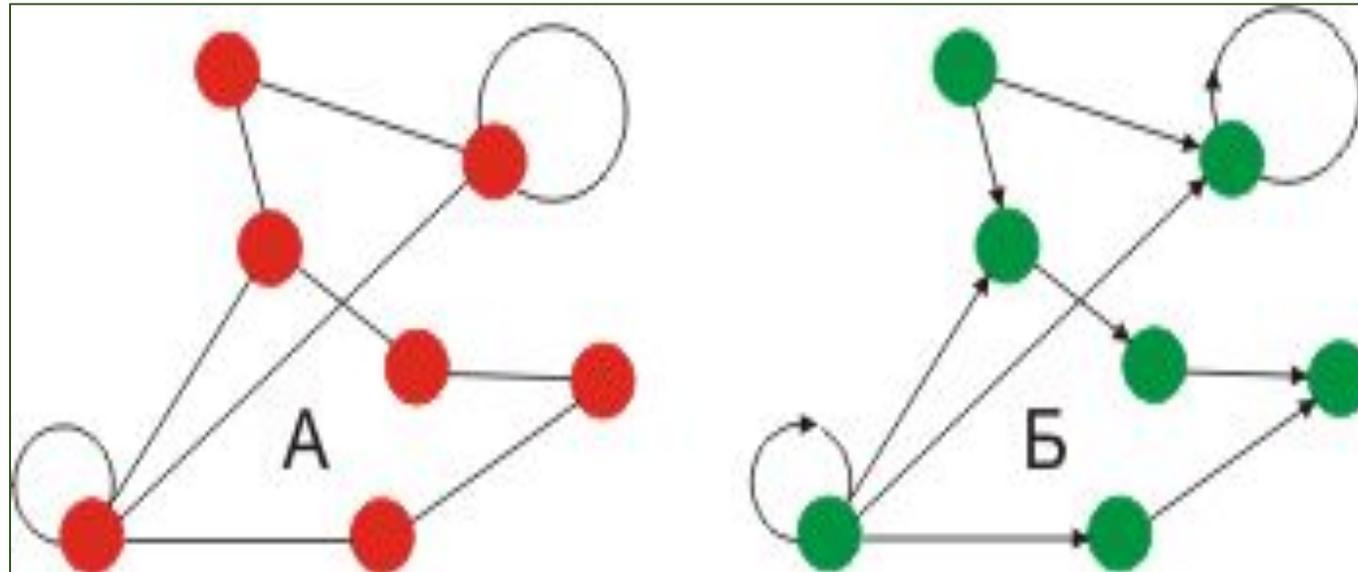


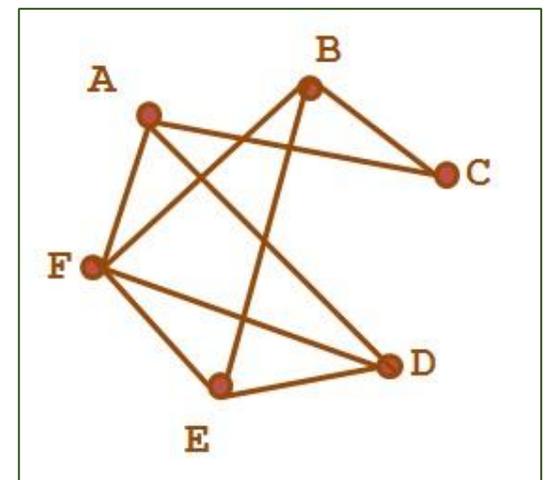
Рис. 5. Примеры неориентированного
и ориентированного графов (А и Б)

Задание. Построить граф по заданному условию:

В соревнованиях по футболу участвуют 6 команд. Каждую из команд обозначили буквами А, В, С, D, E и F. Через несколько недель некоторые из команд уже сыграли друг с другом:

А с С, D, F;
В с С, E, F;
С с А, В;
D с А, E, F;
E с В, D, F;
F с А, В, D.

ОТВЕТ



Запомнить!

Не следует путать изображение графа с собственно графом (абстрактной структурой), поскольку одному графу можно сопоставить не одно графическое представление. Изображение призвано лишь показать, какие пары вершин соединены рёбрами, а какие — нет.

Изображение графа

Один и тот же граф может выглядеть на рисунках по-разному. На рисунке 6 (а, б, в) изображен один и тот же граф.

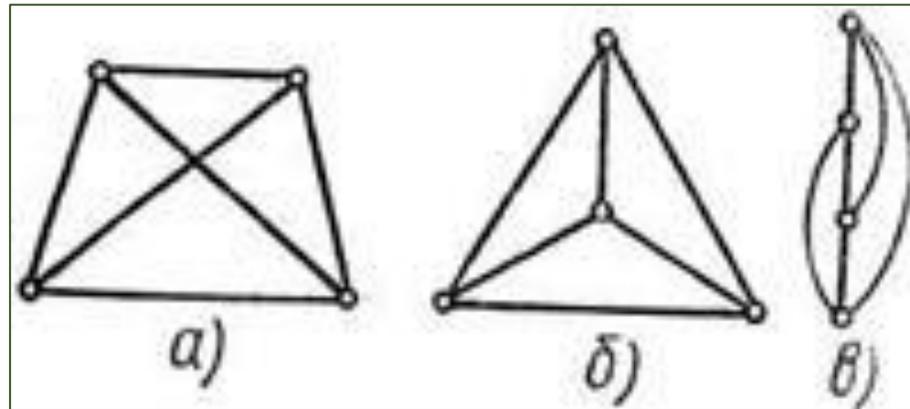
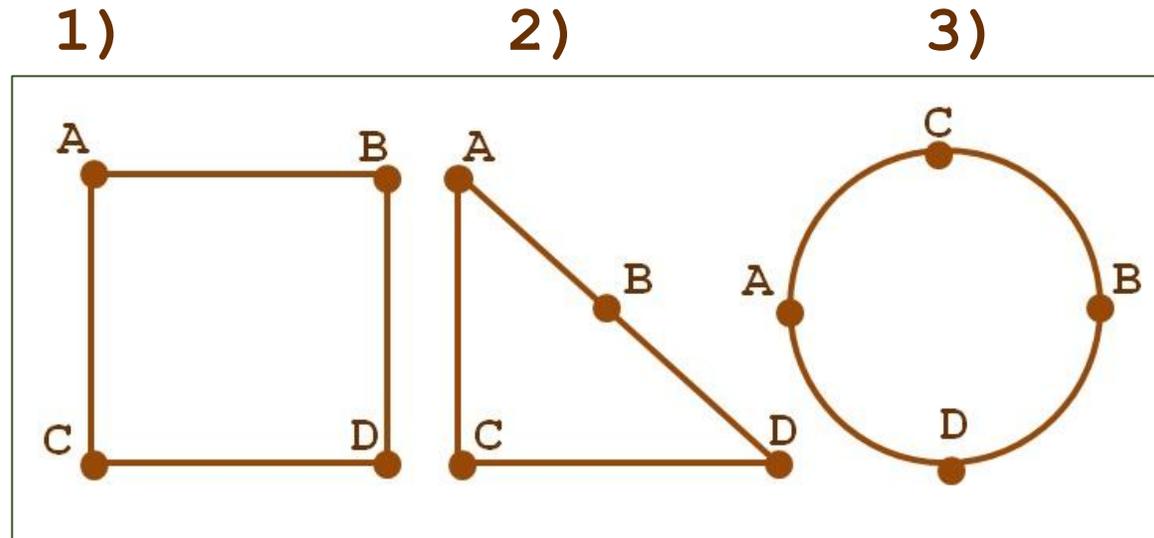


Рис. 6. Примеры изображения графа

Задание 4.

Определить изображают ли фигуры на рисунке один и тот же граф или нет.



ОТВЕТ

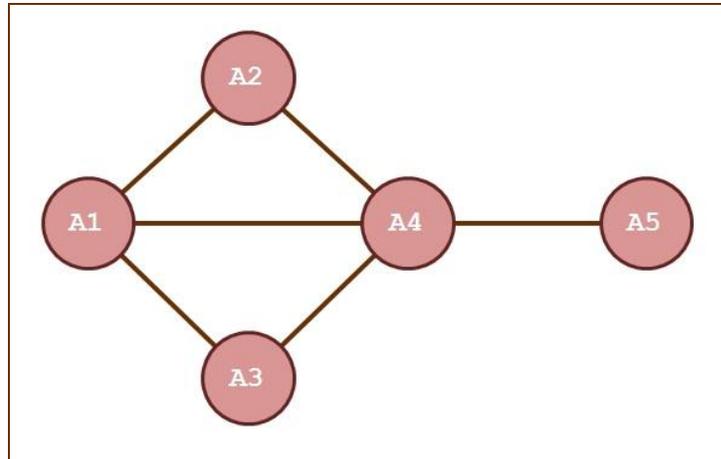
Рисунок 1 и рисунок 2 являются изображениями одного графа.
Рисунок 3 изображением другого графа

Путь в графе

Путём в графе называется такая последовательность ребер, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину и никакое ребро не встречается более одного раза.

Задание 5.

1. (A1 A4) ; (A4 A5) .
2. (A1 A2) ; (A2 A4) ; (A4 A5) .
3. (A1 A4) ; (A4 A2) ; (A2 A1) ; (A1 A4) ; (A4, A5) .
4. (A1 A4) ; (A4 A2) ; (A2 A1) ; (A1 A3) ; (A3 A4) ; (A4, A5) .



Определить какая из перечисленных последовательностей путём не является.

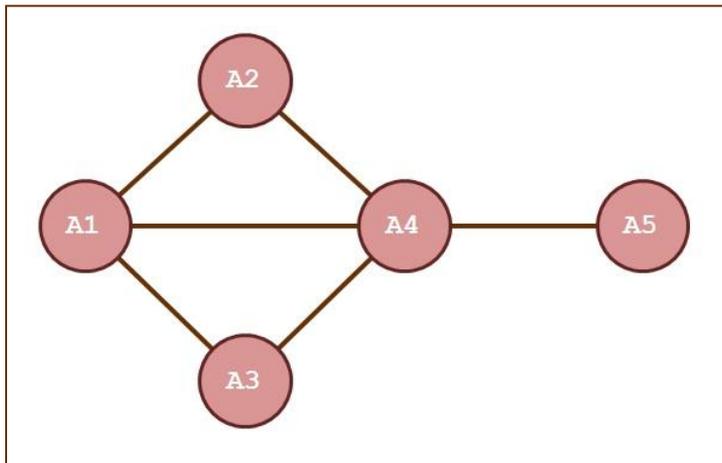
ОТВЕТ

Третья последовательность (A1 A4) ;
(A4 A2) ; (A2 A1) ; (A1 A4) ; (A4, A5) .

Путь называется простым, если он не проходит ни через одну из вершин графа более одного раза.

Задание 6.

1. (A1 A4) ; (A4 A5) .
2. (A1 A2) ; (A2 A4) ; (A4 A5) .
3. (A1 A4) ; (A4 A2) ; (A2 A1) ; (A1 A4) ; (A4, A5) .
4. (A1 A4) ; (A4 A2) ; (A2 A1) ; (A1 A3) ; (A3 A4) ; (A4, A5) .



Первая, вторая и четвертая последовательности являются путями, а третья нет, т.к. ребро (A1, A4) повторяется. Первая и вторая последовательность являются простыми путями, а четвертая нет, т.к. вершины A1 и A4 повторяются.

ОТВЕТ

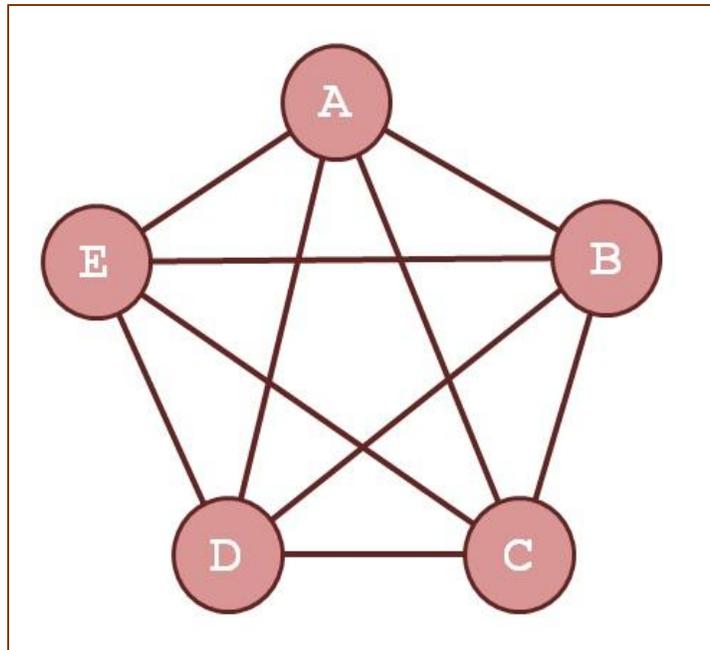
Понятие цикла в графе

Циклом называется путь, в котором совпадают его начальная и конечная вершины.

Простым циклом в графе называется цикл, не проходящий ни через одну из вершин графа более одного раза.

Задание 7.

Назовите в графе циклы, содержащие



- a) 4 ребра;
- b) 6 ребер;
- c) 5 ребер;
- d) 10 ребер.

Какие из этих циклов являются простыми?

ОТВЕТ

ОТВЕТ

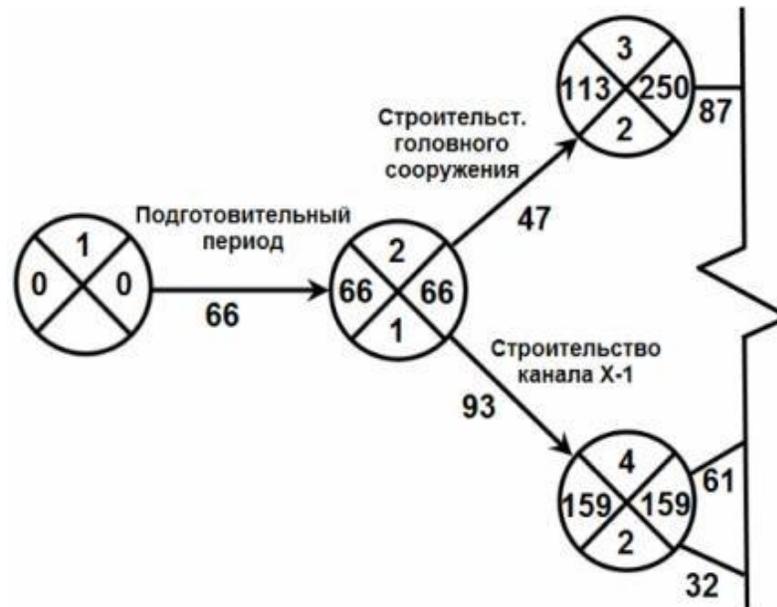
Решение :

- a) (AB, BC, CE, EA), (CD, DA, AB, BC), (EB, BC, CD, DE) и т.д. – простые циклы.
- b) (DB, BE, EA, AB, BC, CD), (EC, CA, AB, BC, CD, DE) и т.д. – циклы.
- c) (AB, BC, CD, DE, EA), (AC, CE, EB, BD, DA) и т.д. – простые циклы.
- d) (AC, CE, EB, BD, DA, AB, BC, CD, DE, EA), (EB, BD, DA, AC, CE, EA, AB, BC, CD, DE) и т.д. – циклы.

Теория графов нашла свое применение и в архитектуре и строительстве.

При составлении больших проектов, содержащих различные виды работ, часто возникает ситуация, когда ту или иную работу можно начать лишь по окончании других. Так при строительстве дома нельзя приступить к отделочным работам, пока не возведены стены, и нельзя возводить стены до укладки фундамента.

Последовательность работ изображается в виде сетевых графиков (рис.). Они применяются при планировании деятельности предприятия.



Теория графов является частью многих наук. Без нее в химии сложно было бы проиллюстрировать строение молекул, в физике описать электрическую цепь, а в повседневной жизни быстро разобраться с маршрутами автобусов, самолетов, поездов.

Домашнее задание

1. Построить полный граф, если известно что он содержит в себе 7 вершин.
2. Составьте схему проведения розыгрыша кубка по олимпийской системе, в которой участвуют 10 команд.