Высшая математика

Преподаватель: Лучникова Н.И.

Уравнение прямой на плоскости.

Тема. Элементы аналитической геометрии. Уравнение прямой на плоскости.

Расстояние d между двумя точками $M_1(x_1;0)$ *и* $M_2(x_2;0)$ *координатной оси:*

$$d = |x_2 - x_1| \qquad (1.1)$$

Расстояние между двумя точками $M_1(x_1;y_1)$ *и* $M_2(x_2;y_2)$ *плоскости:*

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1.2)$$

Координаты (x,y) точки M – середины отрезка с концами $M_1(x_1;y_1)$ *и* $M_2(x_2;y_2)$*:*

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases} \qquad (1.3)$$

Координаты (x,y) точки M, делящей отрезок с концами $M_1(x_1;y_1)$ *и* $M_2(x_2;y_2)$ *в отношении λ,* т.е. $\dfrac{|M_1M|}{|MM_2|} = \lambda$ находятся по формуле:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases} \qquad (1.4)$$

Уравнение прямой на плоскости.

Уравнение прямой :

- с угловым коэффициентом:

$$y=kx+b \tag{1.5}$$

- общее уравнение:

$$Ax+By+C=0 \tag{1.6}$$

- проходящей через данную точку в данном направлении (известен коэффициент k):

Пусть прямая проходит через точку $M_1(x_1;y_1)$ и образует с осью Ox угол $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$

$$y-y_1=k(x-x_1) \tag{1.7}$$

- проходящей через две данные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \tag{1.8}$$

(здесь угловой коэффициент $k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$) **(1.9)**

- в отрезках:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \tag{1.10}$$

(a и b – соответственно отрезки, отсекаемые на осях Ox и Oy).

Уравнение прямой на плоскости.

Расстояние от точки до прямой:

Даны точка $M_0(x_0;y_0)$ и прямая $Ax+By+C=0$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (1.11)$$

Угол между двумя прямыми $y=k_1x+b_1$ *и* $y=k_2+b_2$:

$$tg\,\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \qquad (1.12)$$

$A_1x+B_1y+C_1=0$ *и* $A_2x+B_2y+C_20$ (за угол между прямыми принимают меньший из двух углов,

поэтому косинус должен быть ≥ 0):

$$\cos\varphi = \frac{\pm(A_1A_2 + B_1B_2)}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad (1.13)$$

Уравнение прямой на плоскости.

Если две прямые $A_1 x+B_1 y+C_1=0$ *и* $A_2 x+B_2 y+C_2=0$ *(или* $y=k_1x+b_1$ *и* $y=k_2+b_2$*)* *параллельны*,

$$\text{то } \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2} \text{ (или } k_1=k_2\text{)} \qquad (1.14)$$

Если две прямые $A_1 x+B_1 y+C_1=0$ *и* $A_2 x+B_2 y+C_2=0$ *(или* $y=k_1x+b_1$ *и* $y=k_2+b_2$*)* *перпендикулярны*,

$$\text{то } A_1A_2+B_1B_2=0 \text{ (или } k_1*k_2=-1\text{)} \qquad (1.15)$$

Уравнение прямой на плоскости.

Точка пересечения прямых, заданных уравнениями $A_1 x+B_1 y+C_1=0$ *и*

$A_2 x+B_2 y+C_2=0$ *(или* $y=k_1x+b_1$ *и* $y=k_2+b_2$*)*, находится из системы:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=k_1x+b_1 \\ y=k_2x+b_2 \end{cases} \tag{1.16}$$

Расстояние между параллельными прямыми $A\,x+By+C_1=0$ *и*

$Ax+By+C_2=0$:

$$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{1.17}$$

Уравнение прямой на плоскости.

Информация которая пригодиться для решения задачи 6 (некоторых вариантов) контрольной работы №1

Центр описанной окружности около прямоугольного треугольника лежит на середине гипотенузы, т.е $c=2R$ или

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

Центр окружности вписанной в треугольник лежит на пересечении его биссектрис.

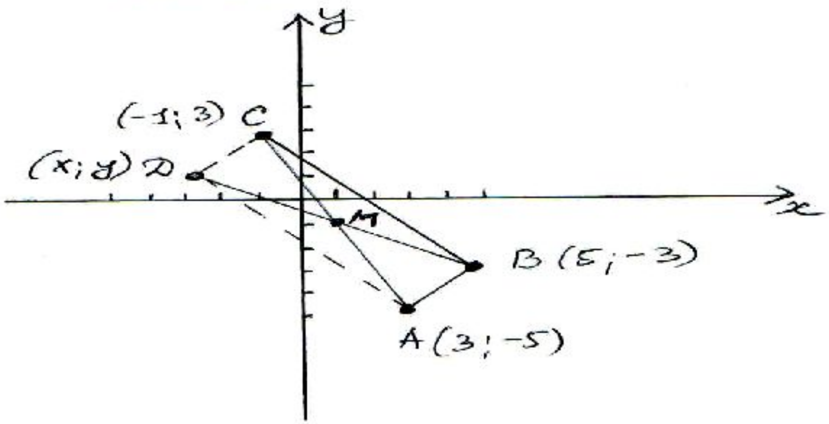
Площадь квадрата равна квадрату стороны, т.е. a^2.

Уравнение прямой на плоскости.

Примеры.

① Даны три вершины параллелограмма: A $(3; -5)$ B $(5; -3)$ C $(-1; 3)$. Определить четвертую вершину D, противоположную B. Сделать чертеж.

Решение.



Точка пересечения диагоналей — середина отрезков AC и BD, поэтому воспользуемся формулой (1.3).

1) Найдем координаты точки M из отрезка AC (т.к. координаты точек A и C известны):

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$$
$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-5+3}{2} = -1$$
$\Rightarrow M\ (1; -1)$

2) Теперь найдем координаты точки D из той же формулы (1.3). Взяв координаты точки M из отрезка BD:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_B + x_D}{2} \\ y_M = \dfrac{y_B + y_D}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} 1 = \dfrac{5 + x}{2} \\ -1 = \dfrac{-3 + y}{2} \end{cases}; \quad \begin{matrix} 2 = x + 5;\ x = 3 \\ -2 = y - 3;\ y = 1 \end{matrix}$$

Точка D имеет координаты $\boxed{(3; 1)}$ — ответ

Уравнение прямой на плоскости.

② Две стороны квадрата лежат на прямых $3x+4y+22=0$, $3x+4y-13=0$. Вычислить площадь квадрата. Сделать чертёж.

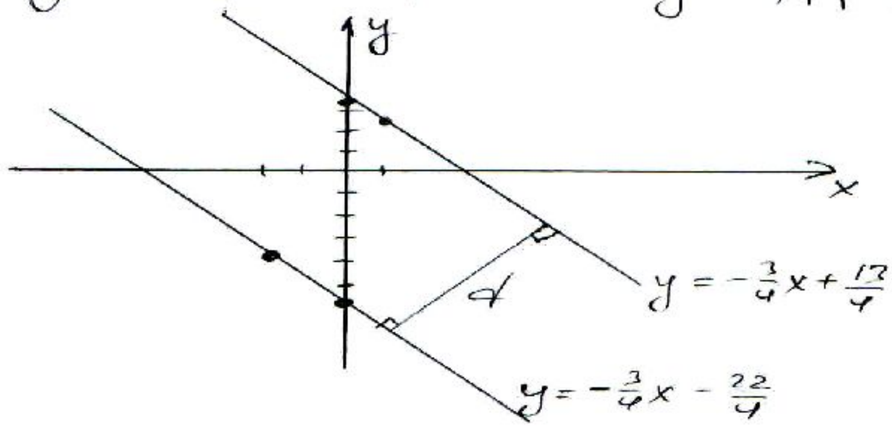
<u>Решение.</u> Сделаем чертёж.

$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{22}{4}$$

x	-2	0
y	-4	$-11/2$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$$

x	0	1
y	$13/4$	$10/4$



Используем формулу (1.17) – расстояние м/у двумя прямыми есть сторона квадрата, а площадь квадрата $= d^2$.

$3x+4y+22=0$ $\quad A_1=3 \quad B=4 \quad C_1=22$

$3x+4y-13=0$ $\quad A=3 \quad B=4 \quad C_2=-13$

$$d = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|-13-22|}{\sqrt{9+16}} = \frac{35}{5} = 7$$

$\boxed{S = 7^2 = 49}$ – площадь квадрата

Уравнение прямой на плоскости.

③ Даны вершины треугольника

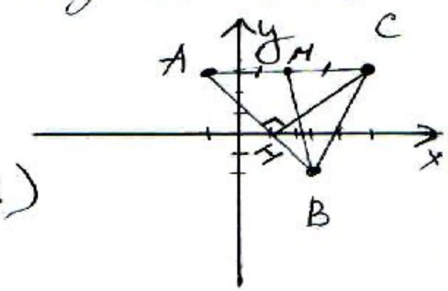
$A(-1; 3)$ $B(3; -2)$ $C(5; 3)$.

Составить уравнение: а) трёх его сторон;

б) медианы, проведённой из вершины B;

в) высоты, опущенной из вершины C на сторону AB. Найти координаты точки H – точки пересечения высоты AH и стороны AB.

Сделать чертёж.



Решение.

а) Используем формулу (1.8)

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

AB: $\dfrac{y-3}{-2-3} = \dfrac{x-(-1)}{3-(-1)}$; $\dfrac{y-3}{-5} = \dfrac{x+1}{4}$;

$4y - 12 = -5x - 5$; $\boxed{5x + 4y - 7 = 0}$ – AB

AC: $\dfrac{y-3}{3-3} = \dfrac{x-(-1)}{5-3}$ $\boxed{y = 3}$ – прямая, параллельная оси Ox (AC)

BC: $\dfrac{y-(-2)}{3-(-2)} = \dfrac{x-3}{5-3}$; $\dfrac{y+2}{5} = \dfrac{x-3}{2}$

$2y + 4 = 5x - 15$; $\boxed{5x - 2y - 19 = 0}$ – BC

Уравнение прямой на плоскости.

б) Найдём координаты точки M – середины отрезка AC по формуле (1.3)

$$x_M = \frac{-1+5}{2} = 2 \qquad M(2;3)$$

$$y_M = \frac{3+3}{2} = 3$$

Найдём уравнение медианы по формуле (1.8)

$$BM: \frac{y-(-2)}{3-(-2)} = \frac{x-3}{2-3}; \quad \frac{y+2}{5} = \frac{x-3}{-1}$$

$$-y-2 = 5x-15; \quad \boxed{5x+y-13} - BM$$

Уравнение прямой на плоскости.

в) Высота CH – это прямая $\perp AB$ и проходящая ч/з точку C.

Используем формулу (1.15)

$k_{AB} \cdot k_{CH} = -1$. $\quad AB: \ 5x+4y-7=0$

$$y = -\frac{5}{4}x + \frac{7}{4} \Rightarrow k_{AB} = -\frac{5}{4}.$$

$$k_{CH} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{\left(-\frac{5}{4}\right)} = \frac{4}{5}$$

Теперь используем формулу (1.7)

$$y-3 = \frac{4}{5}(x-5)$$

$$5y-15 = 4x-20 \quad ; \boxed{4x-5y-5=0} - CH$$

Найдём координату точки H; используем формулу (1.16), как точку пересечения прямых CH и AB:

$$\begin{cases} 5x+4y-7=0 \\ 4x-5y-5=0 \end{cases} ; \quad y = -\frac{5}{4}x + \frac{7}{4}; \quad 4x - 5\left(-\frac{5}{4}x + \frac{7}{4}\right) - 5 = 0$$

$$4x + \frac{25}{4}x - \frac{35}{4} - 5 = 0$$

$$\frac{41}{4}x - \frac{55}{4} = 0; \quad \frac{41}{4}x = \frac{55}{4}; \quad x = \frac{55}{41}$$

$$y = -\frac{5}{4} \cdot \frac{55}{41} + \frac{7}{4} = \frac{-275+287}{164} = \frac{12}{164} = \frac{3}{41}$$

$$H: \boxed{\left(\frac{55}{41}; \frac{3}{41}\right)}$$

Уравнение плоскости и прямой в пространстве.

Тема. Уравнение плоскости и прямой в пространстве

1. Уравнение плоскости перпендикулярной данному вектору $\vec{n} = (A, B, C)$ и проходящей через данную точку $M(x_0, y_0, z_0)$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$D = 0$	$Ax + By + Cz = 0$	Это уравнение определяет плоскость, проходящую через начало координат
$A = 0$	$By + Cz + D = 0$	Это уравнение определяет плоскость, параллельную оси Ox
$A = D = 0$	$By + Cz = 0$	Это уравнение определяет плоскость, проходящую через ось Ox
$A = B = 0$	$Cz + D = 0$	Это уравнение определяет плоскость, параллельную плоскости Oxy
$A = B = D = 0$	$Cz = 0$	Это уравнение определяет координатную плоскость Oxy

Расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Уравнение плоскости и прямой в пространстве.

Даны две плоскости

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad (1)$

и

$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \qquad (2)$

Угол φ, образованный двумя плоскостями

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Условие параллельности двух плоскостей

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Условие перпендикулярности двух плоскостей

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

где $\vec{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$ нормальные векторы плоскостей (1) и (2).

Уравнение плоскости и прямой в пространстве.

2. Уравнение прямой в пространстве задается как линия пересечения двух плоскостей, т.е. как множество точек удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_1, y_1, z_1)$ с направляющим вектором $\vec{s} = (m, n, p)$

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$$

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Если даны две прямые с направляющими векторами $\vec{s_1} = (m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{s_2} = (m_2, n_2, p_2)$, то угол между прямыми находится

$$\cos\varphi = \pm\frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

Условие параллельности двух прямых в пространстве

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Условие перпендикулярности прямых

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$$

Уравнение плоскости и прямой в пространстве.

3.Если дана прямая с направляющим вектором ($\vec{s}=(m,n,p)$)

$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ и плоскость $Ax+By+Cz+D=0$, то

угол между прямой и плоскостью есть

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Условия параллельности прямой и плоскости

$$Am+Bn+Cp=0$$

Условия перпендикулярности прямой и плоскости

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!