

# Высшая математика

Преподаватель: Лучникова Н.И.

# Уравнение прямой на плоскости.

*Тема. Элементы аналитической геометрии. Уравнение прямой на плоскости.*

*Расстояние  $d$  между двумя точками  $M_1(x_1; 0)$  и  $M_2(x_2; 0)$  координатной оси:*

$$d = |x_2 - x_1| \quad (1.1)$$

*Расстояние между двумя точками  $M_1(x_1; y_1)$  и  $M_2(x_2; y_2)$  плоскости:*

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1.2)$$

*Координаты  $(x, y)$  точки  $M$  – середины отрезка с концами  $M_1(x_1; y_1)$  и  $M_2(x_2; y_2)$ :*

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y &= \frac{y_1 + y_2}{2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

*Координаты  $(x, y)$  точки  $M$ , делящей отрезок с концами  $M_1(x_1; y_1)$  и  $M_2(x_2; y_2)$  в*

*отношении  $\lambda$ , т.е.  $\frac{|MM_1|}{|MM_2|} = \lambda$  находятся по формуле:*

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{aligned} \quad (1.4)$$

# Уравнение прямой на плоскости.

Уравнение прямой :

- с угловым коэффициентом:

$$y=kx+b \quad (1.5)$$

- общее уравнение:

$$Ax+By+C=0 \quad (1.6)$$

- проходящей через данную точку в данном направлении (известен коэффициент  $k$ ):

Пусть прямая проходит через точку  $M_1(x_1, y_1)$  и образует с осью  $Ox$  угол  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$

$$y-y_1=k(x-x_1) \quad (1.7)$$

- проходящей через две данные точки  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$ :

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \quad (1.8)$$

$$\left( \text{здесь угловой коэффициент } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) \quad (1.9)$$

- в отрезках:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1 \quad (1.10)$$

( $a$  и  $b$  – соответственно отрезки, отсекаемые на осях  $Ox$  и  $Oy$ ).

## Уравнение прямой на плоскости.

Расстояние от точки до прямой:

Даны точка  $M_0(x_0; y_0)$  и прямая  $Ax + By + C = 0$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (1.11)$$

Угол между двумя прямыми  $y = k_1x + b_1$  и  $y = k_2x + b_2$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad (1.12)$$

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  (за угол между прямыми принимают меньший из двух углов,

поэтому косинус должен быть  $\geq 0$ ):

$$\cos \varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (1.13)$$

## Уравнение прямой на плоскости.

Если две прямые  $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$  и  $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$  (или  $y = k_1 x + b_1$  и  $y = k_2 + b_2$ ) параллельны,

$$\text{то } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \text{ (или } k_1 = k_2) \quad (1.14)$$

Если две прямые  $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$  и  $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$  (или  $y = k_1 x + b_1$  и  $y = k_2 + b_2$ ) перпендикулярны,

$$\text{то } A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \text{ (или } k_1 * k_2 = -1) \quad (1.15)$$

## Уравнение прямой на плоскости.

Точка пересечения прямых, заданных уравнениями  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и

$A_2x + B_2y + C_2 = 0$  (или  $y = k_1x + b_1$  и  $y = k_2x + b_2$ ), находится из системы:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases} \quad (1.16)$$

Расстояние между параллельными прямыми  $Ax + By + C_1 = 0$  и

$Ax + By + C_2 = 0$ :

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (1.17)$$

## Уравнение прямой на плоскости.

*Информация которая пригодится для решения задачи 6 (некоторых вариантов) контрольной работы №1*

*Центр описанной окружности около прямоугольного треугольника*

лежит на середине гипотенузы, т.е  $c=2R$  или

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$$

*Центр окружности вписанной в треугольник* лежит на пересечении его биссектрис.

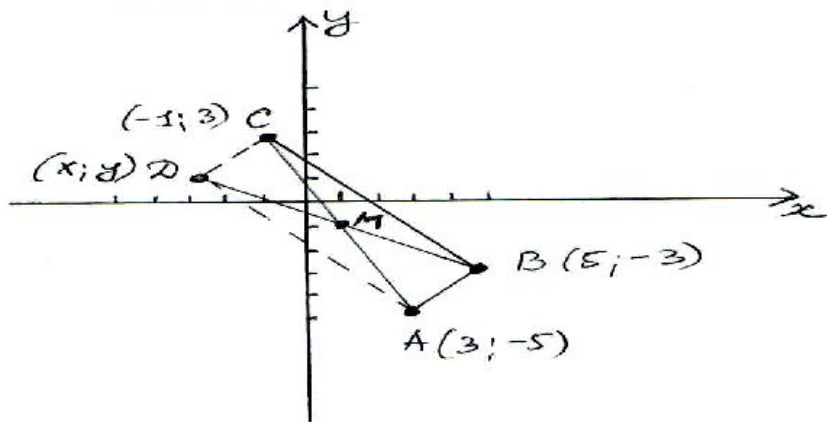
*Площадь квадрата равна квадрату стороны, т.е.  $a^2$ .*

# Уравнение прямой на плоскости.

## Примеры.

① Дано  $\triangle ABC$  вершины параллелограмма:  
 $A(3; -5)$   $B(5; -3)$   $C(-1; 3)$ .  
 Определить четвертую вершину  $D$ , про-  
 тивоположную  $B$ . Сформулировать

Решение.



Тогда пересечением диа-  
 agonалей — серединой  
 отрезков  $AC$  и  $BD$ ,  
 поэтому воспользуемся  
 формулой (1.3).

Найдем координаты  
 точки  $M$  — середины  
 $AC$  (т.к. координаты  
 точек  $A$  и  $C$  известны):

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-5 + 3}{2} = -1 \Rightarrow M(1; -1)$$

2) Теперь найдем координаты точки  $D$  по той же формуле (1.3). Выясним координаты точки  $M$  — середины отрезка  $BD$ :

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_D}{2} \\ y_M = \frac{y_B + y_D}{2} \end{cases}; \begin{cases} 1 = \frac{5 + x}{2} & 2 = x + 5; x = 3 \\ -1 = \frac{-3 + y}{2} & -2 = y - 3; y = 1 \end{cases}$$

Тогда  $D$  имеет координаты  $\boxed{(3; 1)}$  — ответ ①



## Уравнение прямой на плоскости.

② Две стороны квадрата лежат на прямых  $3x + 4y + 22 = 0$ ,  $3x + 4y - 13 = 0$ .  
 Вычислить площадь квадрата. Сделать чертеж.

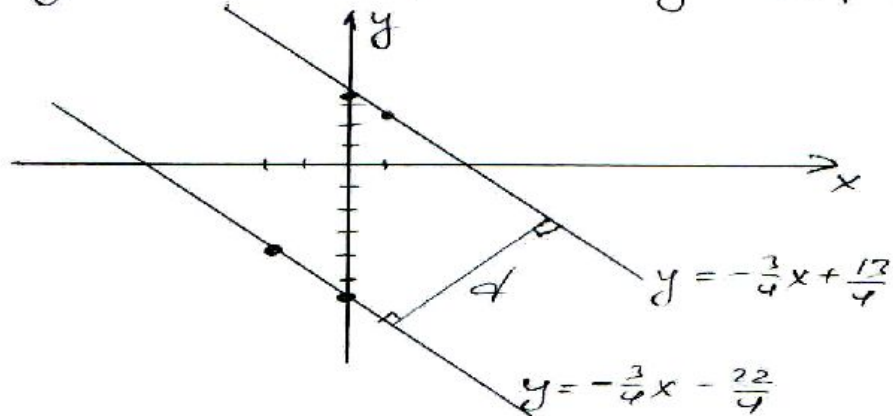
Решение. Сделаем чертеж.

$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{22}{4}$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$$

$$\begin{array}{l|l|l} x & -2 & 0 \\ y & -4 & -11/2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l} x & 0 & 1 \\ y & 13/4 & 10/4 \end{array}$$



Используем формулу (1.17) - расстояние между двумя параллельными линиями есть сторона квадрата, а площадь квадрата  $= d^2$ .

$$3x + 4y + 22 = 0$$

$$3x + 4y - 13 = 0$$

$$\begin{array}{lll} A_1 = 3 & B_1 = 4 & C_1 = 22 \\ A_2 = 3 & B_2 = 4 & C_2 = -13 \end{array}$$

$$d = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-13 - 22|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{35}{5} = 7$$

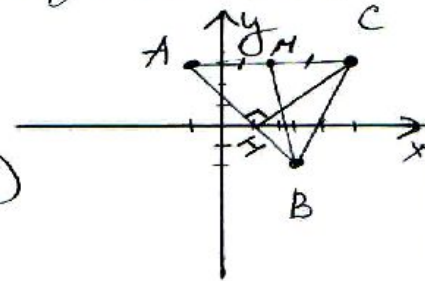
$$S = 7^2 = 49 \quad \text{— площадь квадрата}$$

## Уравнение прямой на плоскости.

③ Дано вершины треугольника

$$A(-1; 3) \quad B(3; -2) \quad C(5; 3).$$

Составить уравнение: а) трёх его сторон;  
б) медианы, проведённой из вершины B;  
в) высоты, опущенной из вершины C на сторону AB. Найти координаты точки H - точки пересечения высот AH и стороны AB. Сделать чертеж.



Решение.

а) Используем формулу (1.8)

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$AB: \frac{y - 3}{-2 - 3} = \frac{x - (-1)}{3 - (-1)}; \quad \frac{y - 3}{-5} = \frac{x + 1}{4};$$

$$4y - 12 = -5x - 5; \quad \boxed{5x + 4y - 7 = 0} - AB$$

$$AC: \frac{y - 3}{3 - 3} = \frac{x - (-1)}{5 - 3} \quad \boxed{y = 3} - \text{прямая, параллельная оси } Ox \text{ (AC)}$$

$$BC: \frac{y - (-2)}{3 - (-2)} = \frac{x - 3}{5 - 3}; \quad \frac{y + 2}{5} = \frac{x - 3}{2}$$

$$2y + 4 = 5x - 15; \quad \boxed{5x - 2y - 19 = 0} - BC$$

## Уравнение прямой на плоскости.

б) Найдём координаты точки  $M$  - середины отрезка  $AC$  по формуле (1.3)

$$x_M = \frac{-1+5}{2} = 2 \quad M(2; 3)$$

$$y_M = \frac{3+3}{2} = 3$$

Найдём уравнение прямой по формуле (1.8)

$$BM: \frac{y - (-2)}{3 - (-2)} = \frac{x - 3}{2 - 3}; \quad \frac{y + 2}{5} = \frac{x - 3}{-1}$$

$$-y - 2 = 5x - 15; \quad \boxed{5x + y - 13} - BM$$

## Уравнение прямой на плоскости.

в) Вспомогательная прямая  $CH$  — это прямая  $\perp$   $AB$  и проходящая через точку  $C$ .

Используем формулу (1.15)

$$k_{AB} \cdot k_{CH} = -1. \quad AB: 5x + 4y - 7 = 0 \\ y = -\frac{5}{4}x + \frac{7}{4} \Rightarrow k_{AB} = -\frac{5}{4}.$$

$$k_{CH} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{(-\frac{5}{4})} = \frac{4}{5}$$

Теперь используем формулу (1.7)

$$y - 3 = \frac{4}{5}(x - 5)$$

$$5y - 15 = 4x - 20 \quad ; \quad \boxed{4x - 5y - 5 = 0} - CH$$

Найдем координаты точки  $H$ ; используем формулу (1.16), как точку пересечения прямых  $CH$  и  $AB$ :

$$\begin{cases} 5x + 4y - 7 = 0 \\ 4x - 5y - 5 = 0 \end{cases} \quad y = -\frac{5}{4}x + \frac{7}{4}$$

$$4x + \frac{25}{4}x - \frac{35}{4} - 5 = 0$$

$$\frac{41}{4}x - \frac{55}{4} = 0 \quad ; \quad \frac{41}{4}x = \frac{55}{4} \quad ; \quad x = \frac{55}{41}$$

$$y = -\frac{5}{4} \cdot \frac{55}{41} + \frac{7}{4} = \frac{-275 + 287}{164} = \frac{12}{164} = \frac{3}{41}$$

$$H: \boxed{\left(\frac{55}{41}; \frac{3}{41}\right)}$$

# Уравнение плоскости и прямой в пространстве.

## Тема. Уравнение плоскости и прямой в пространстве

1. Уравнение плоскости перпендикулярной данному вектору  $\vec{n} = (A, B, C)$  и проходящей через данную точку  $M(x_0, y_0, z_0)$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$D = 0$	$Ax + By + Cz = 0$	Это уравнение определяет плоскость, проходящую через начало координат
$A = 0$	$By + Cz + D = 0$	Это уравнение определяет плоскость, параллельную оси $Ox$
$A = D = 0$	$By + Cz = 0$	Это уравнение определяет плоскость, проходящую через ось $Ox$
$A = B = 0$	$Cz + D = 0$	Это уравнение определяет плоскость, параллельную плоскости $Oxy$
$A = B = D = 0$	$Cz = 0$	Это уравнение определяет координатную плоскость $Oxy$

Расстояние от точки  $M(x_0, y_0, z_0)$  до плоскости  $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

# Уравнение плоскости и прямой в пространстве.

Даны две плоскости

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (1)$$

и

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (2)$$

Угол  $\varphi$ , образованный двумя плоскостями

$$\cos \varphi = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Условие параллельности двух плоскостей

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Условие перпендикулярности двух плоскостей

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

где  $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ ,  $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$  нормальные векторы плоскостей (1) и (2).

# Уравнение плоскости и прямой в пространстве.

2. Уравнение прямой в пространстве задается как линия пересечения двух плоскостей, т.е. как множество точек удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку  $M(x_1, y_1, z_1)$  с направляющим вектором  $\vec{s} = (m, n, p)$

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$$

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Если даны две прямые с направляющими векторами  $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$  и  $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ , то угол между прямыми находится

$$\cos \varphi = \pm \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

Условие параллельности двух прямых в пространстве

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Условие перпендикулярности прямых

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

# Уравнение плоскости и прямой в пространстве.

3. Если дана прямая с направляющим вектором ( $\vec{s} = (m, n, p)$ )

$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$  и плоскость  $Ax + By + Cz + D = 0$ , то

угол между прямой и плоскостью есть

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Условия параллельности прямой и плоскости

$$Am + Bn + Cp = 0$$

Условия перпендикулярности прямой и плоскости

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$



**СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!**