Раздел 2. Измерение и оценка систем

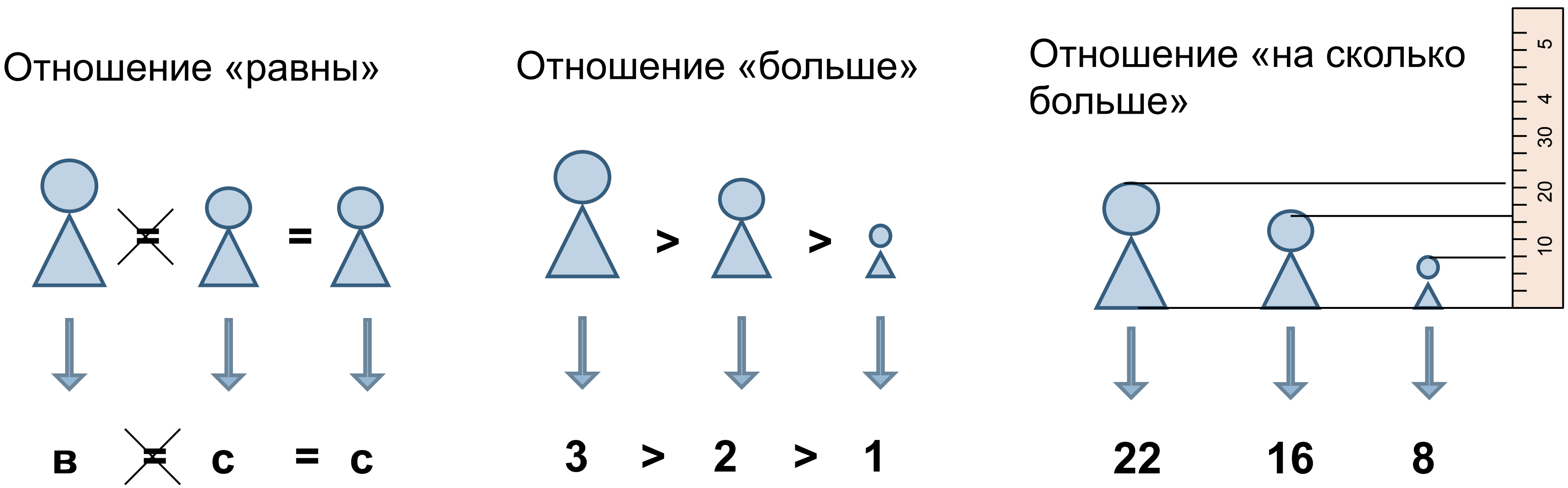
Тема 2.1. Измерение свойств систем

Тема 2.2. Оценка свойств систем

Тема 2.3. Оценка в условиях неопределенности

Понятие шкалы

При измерении систем значения измеряемого свойства отображаются на **шкалу** – определенную знаковую систему с соответствующими отношениями между знаками (числами).



Отношение между шкальными значениями такое же, как между измеряемыми свойствами

Формальное определение

Шкала:

$$< X, \varphi, Y >$$

$X = \{x_1, \ldots, x_n, R_x\}$ - эмпирическая система, включающая множество x_i на которых задано некоторое отношение R_x

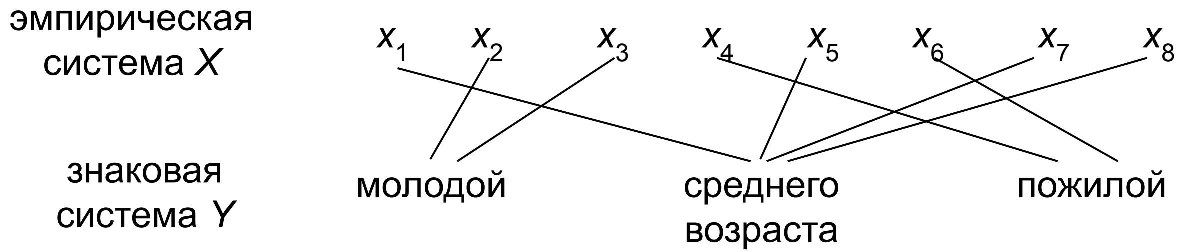
$Y = \{\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n), R_y\}$ – знаковая система, включающая значения измеряемых свойств φ (x_i) с отношением R_y

$\varphi \in \Phi$ – гомоморфное отображение X на Y, такое, что:

$\{\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)\} \in R_y$ только тогда, когда $\{x_1, \ldots, x_n\} \in R_x$

Шкала наименований (номинальная)

Каждому измеряемому объекту сопоставляется наименование (класс).



Измерение состоит в определении принадлежности объекта тому или иному ***классу эквивалентности***.

Обработка данных – операция проверки совпадения/несовпадения:

$$\delta_{ij} = \{1 : \varphi(x_i) = \varphi(x_j);\ 0 : \varphi(x_i) \neq \varphi(x_j)\}$$

δ_{ij} - символ Кронекера

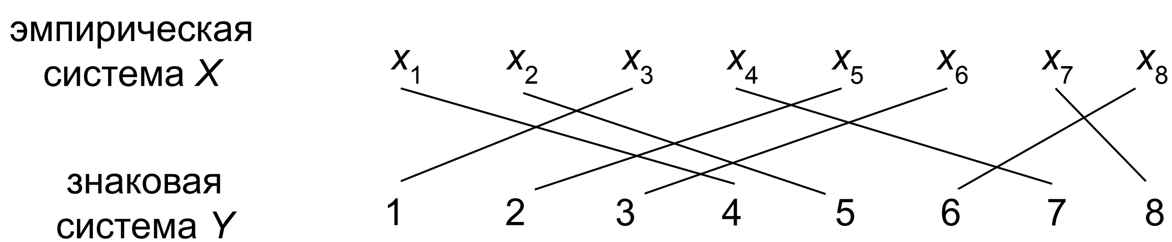
$\delta_{15} = \delta_{17} = \delta_{18} = \delta_{23} = \delta_{32} = \delta_{46} = \ldots = 1$, $\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{14} = \delta_{16} = \delta_{24} = \delta_{25} = \ldots = 0$

Можно вычислять частоты классов: $p_k = (\sum_{j=1}^{n} \delta_{kj}) / n$ $p_1 = p_3 = 2/8$, $p_2 = 4/8$

Мода – номер наиболее часто встречающегося класса: k = 2 (среднего возраста»)

Шкала порядка (ранговая)

Позволяет ***упорядочить*** объекты, расположить их в соответствии с возрастанием или убыванием какого-либо качества.



Кроме отношений эквивалентности сохраняются отношения предпочтения:

если $x_1 \succ x_2$ то $\varphi(x_1) \succ \varphi(x_2)$ $\varphi(x_i)$ - номер объекта в упорядоченном ряду (ранг)

Судя по рангам ничего нельзя сказать о расстояниях между объектами.

Над рангами нельзя производить арифметические операции. Допустимые операции:

- нахождение частот и мод, как и для номинальной шкалы;
- определение медианы - объекта с рангом, ближайшим к числу n/2 (x_1);
- разбиение всей выборки на части и др.

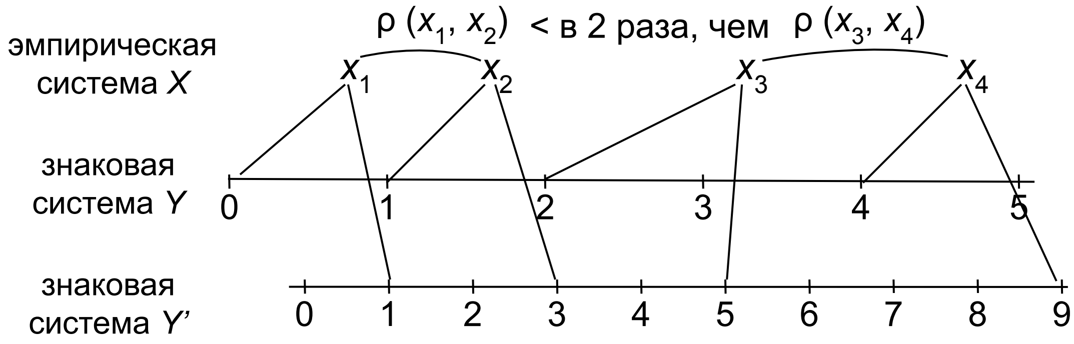
Шкала интервалов

Позволяет измерять ***расстояния*** в некоторых единицах, одинаковых по всей длине шкалы. Начало координат произвольно.

Используется для величин, не имеющих абсолютного нуля (температура, время, высота местности).

Можно определить, ***на сколько*** (но не во сколько раз) свойство одного объекта превосходит то же свойство другого объекта

При измерении в разных интервальных шкалах (температура по Цельсию и Фаренгейту) отношения двух интервалов должны быть одинаковыми для всех шкал:



$$\frac{\varphi(x_1)-\varphi(x_2)}{\varphi(x_3)-\varphi(x_4)}=\frac{\varphi'(x_1)-\varphi'(x_2)}{\varphi'(x_3)-\varphi'(x_4)}$$

$$\varphi'(x)=a\varphi(x)+b$$

Только интервалы имеют смысл настоящих чисел, и только над интервалами следует выполнять арифметические операции.

Шкала интервалов

Пример

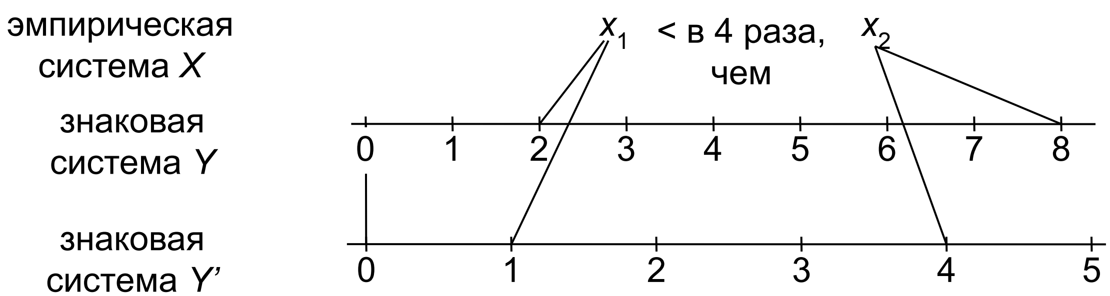
Воду нагрели от 9°C до 18°C, а молоко от 9° C до 36°C
Неправильно: t воды увеличилась в 2 раза, t молока – в 4 раза.
Правильно: изменение t воды в 3 раза меньше, чем изменение t молока.

Соотношение сохраняется при переходе от шкалы Цельсия к шкале Фаренгейта: t°F = 1,8 t°C + 32
t воды была: 9°C = 48,2°F , t воды стала: 18°C = 64,4°F,
t молока была: 9°C = 48,2°F , t молока стала: 36°C = 96,8°F.
Отношение изменений температур воды и молока по Цельсию:
(18 - 9) / (36 - 9) = 9 / 27 = 1/3.
Отношение изменений температур воды и молока по Фаренгейту:
(64,4 – 48,2) / (96,8 – 48,2) = 16,2 /48,6 = 1/3.
Соотношение интервалов сохранилось.

Шкала отношений

Позволяет оценить, ***во сколько раз*** свойство одного объекта превосходит то же свойство другого объекта.
Измеряемые величины имеют естественный абсолютный нуль (вес, длина).

Основное свойство - сохранение *отношения* двух шкальных значений при переходе от одной шкалы к другой



$$\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)} = \frac{\varphi'(x_1)}{\varphi'(x_2)}$$

$$\varphi'(x) = a\varphi(x)$$

Значения, измеренные в шкале отношений, являются «полноправными» числами, с ними можно выполнять любые арифметические действия.

Абсолютная шкала

Имеет абсолютный нуль и абсолютную единицу. Пример - числовая ось.

Выбор шкалы

Выбор шкалы зависит от определяющего отношения.

Шкала *наименований* используется, если выполняются *аксиомы тождества*:

1. *A = A* (рефлексивность).
2. *Если A= B, то B = A* (симметричность).
3. *Если A= B и B = C, то A = C* (транзитивность).

Ранговая шкала используется, если выполняются *аксиомы упорядоченности*:

4. *Если A ≠ B то либо A > B либо B > A.* (антисимметричность).
5. *Если A >B и B > C, то A > C* (транзитивность).

Шкала *интервалов* используется, если дополнительно известны расстояния между объектами

Для использования *абсолютной* шкалы необходимо наличие абсолютного нуля и абсолютной единицы

Шкала *отношений* используется, если в выполняются *аксиомы аддитивности*:

6. *Если A = P и B > 0, то A + B > P*
7. *A + B = B + A.*
8. *Если A = P и B =Q, то A + B = P+Q*
9. *(A + B)+ C= A + (B + C)*

Виды измерений

Объективные измерения – результат измерения объективен

Примеры: измерение времени, массы, температуры

Как правило, измерения производятся измерительными приборами

Субъективные измерения – результат мыслительной деятельности человека

Примеры: оценка качества продукции, комфортности условий труда, оценка важности показателей, степени соответствия требованиям

Как правило, измерения производятся экспертами или лицом, принимающим решения

Результатом является оценка – лингвистическое значение («плохо», «хорошо» ...) либо число, отражающее меру (интенсивность) выраженности качественного свойства или приоритет объекта среди множества других по данному свойству.

Интеграция измерений

Объекты могут быть измерены по *множеству* различных признаков (критериев).

Для удобства сравнения объектов необходима **обобщенная** (**интегральная**) оценка.

Критерии	Фирмы-конкуренты		
	Ф1	Ф2	Ф3
Стоимость продукции, руб.	700	300	500
Время изготовления, час.	32	24	48
Качество продукции, балл	80	50	75

В случае если частные критерии имеют различную *размерность*, то необходимо ***нормировать*** значения.

Способы нормирования

В случае если чем абсолютное значение больше, тем оценка выше:

$$q_{ij} = \frac{q_{ij}^{ab} - q_j^{\min}}{q_j^{\max} - q_j^{\min}}$$

q_{ij} – оценка *i*-го объекта по *j*-му критерию
q_{ij}^{ab} – абсолютное значение *j*-го критерия для *i*-го объекта
q_j^{min}, q_j^{max} – минимальное и максимальное значение *j*-го критерия

Критерий	min	max	Ф1	Ф2	Ф3
Качество продукции	0	100	80	50	75

Оценка: 0.8 0.5 0.75

В случае если чем абсолютное значение больше, тем оценка ниже:

$$q_{ij} = \frac{q_j^{\max} - q_{ij}^{ab}}{q_j^{\max} - q_j^{\min}}$$

Критерий	min	max	Ф1	Ф2	Ф3
Стоимость продукции, руб.	100	900	700	300	500

Оценка: 0.25 0.75 0.5

Нормирование

Критерии	Абсолют. значения			min	max
	Ф1	Ф2	Ф3		
Стоимость, руб.	700	300	500	100	900
Время, час.	32	24	48	16	56
Качество, балл	80	50	75	0	100

Критерии	Нормирование значений		
	Ф1	Ф2	Ф3
Стоимость	(900-700)/(900-100) = 0.25	(900-300)/(900-100) = 0.75	(900-500)/(900-100) = 0.5
Время	(56-32)/(56-16) = 0.6	(56-24)/(56-16) = 0.8	(56-482)/(56-16) = 0.2
Качество	80/100 = 0.8	50/100 = 0.5	75/100 = 0.75

Аддитивная свертка

$$q_i = \sum_{j=1}^{m} v_j q_{ij} \qquad \sum_{j=1}^{m} v_j = 1$$

q_i – интегральная оценка *i*-го объекта
q_{ij} – оценка *i*-го объекта по *j*-тому частному критерию,
v_j – вес *j*-го критерия

Критерии	Важность балл	Вес
Стоимость	10	10/20 = 0.5
Время	6	6/20 = 0.3
Качество	4	4/20 = 0.2

Критерии	Вес	Ф1	Ф2	Ф3
Стоимость	0.5	0.25	0.75	0.5
Время	0.3	0.6	0.8	0.2
Качество	0.2	0.8	0.5	0.75
Интегральная оценка		0.5*0.25 + 0.3*0.6 + 0.2*0.8 = 0.465	0.5*0.75 + 0.3*0.8 + 0.2*0.5 = 0.715	0.5*0.5 + 0.3*0.2 + 0.2*0.75 = 0.46

Если веса одинаковы:

$$q_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} q_{ij}$$

	Ф1	Ф2	Ф3
Интегральная оценка без учета веса	(0.25+0.6+ +0.8) / 3 = 0.55	(0.75+0.8+ +0.5) / 3 = 0.68	(0.5+0.2+ +0.75) / 3 = 0.48

Мультипликативная свертка

$$q_i = \prod_{j=1}^{m} q_{ij}^{v_j} \qquad \sum_{j=1}^{m} v_j = 1$$

q_i – интегральная оценка *i*-го объекта
q_{ij} – оценка *i*-го объекта по *j*-тому частному критерию,
v_j – вес *j*-го критерия

Критерии	Вес	Ф1	Ф2	Ф3
Стоимость	0.5	0.25	0.75	0.5
Время	0.3	0.6	0.8	0.2
Качество	0.2	0.8	0.5	0.75
Интегральная оценка		$0.25^{0.5} * 0.6^{0.3} * 0.8^{0.2}$ = 0.41	$0.75^{0.5} * 0.8^{0.3} * 0.5^{0.2}$ = 0.704	$0.5^{0.5} * 0.2^{0.3} * 0.75^{0.2}$ = 0.413

Если веса одинаковы:

$$q_i = \sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m} q_{ij}}$$

	Ф1	Ф2	Ф3
Интегральная оценка без учета веса	$\sqrt[3]{0.25*0.6*0.8}$ = 0.49	$\sqrt[3]{0.75*0.8*0.5}$ =0.67	$\sqrt[3]{0.5*0.2*0.75}$ =0.42

Метод идеальной точки

$$q_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} v_j (q_j * - q_{ij})^2}$$

q_j* – наилучшая оценка по *j*-тому частному критерию

Наилучшим является объект, имеющий минимальное значение критерия

Критерии	Вес	Ф1	Ф2	Ф3
Стоимость	0.5	0.25	0.75	0.5
Время	0.3	0.6	0.8	0.2
Качество	0.2	0.8	0.5	0.75
Взвешенное квадратичное отклонение:		0.5* $(1-0.25)^2$ + 0.3* $(1-0.6)^2$ + 0.2* $(1-0.8)^2$ =	0.5* $(1-0.75)^2$ + 0.3* $(1-0.8)^2$ + 0.2* $(1-0.5)^2$ =	0.5* $(1-0.5)^2$ + 0.3* $(1-0.2)^2$ + 0.2* $(1-0.75)^2$ =
Интегральная оценка		$\sqrt[2]{0.28+0.048+0.08}$ =0.64	$\sqrt[2]{0.031+0.012+0.05}$ = 0.3	$\sqrt[2]{0.125+0.192+0.0125}$ =0.57

Методы выявления мнений экспертов

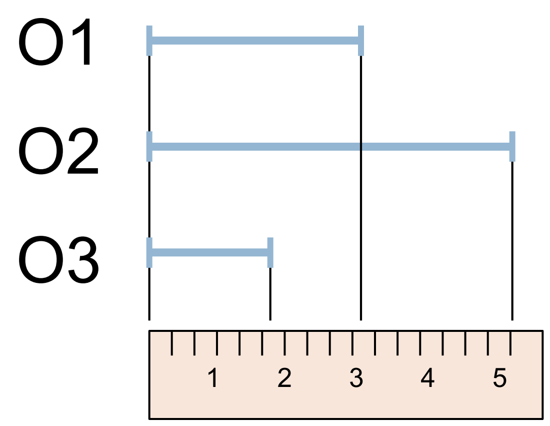
Определение предпочтительности оцениваемых объектов:

- метод ранжирования
- метод парных сравнений

O1 > O2 > O3

Определение меры (интенсивности) выраженности качественного свойства у оцениваемых объектов:

- метод непосредственной оценки
- метод последовательного сравнения



Ранжирование

Эксперт присваивает объектам ранги в порядке предпочтения

Эквивалентным объектам дают одинаковые ранги, равные среднеарифметическому значению присваиваемых им рангов.
Такие ранги называют *связанными*

O2 = O3 Ранги: (1 + 2) / 2 = 1.5

Пример ранжирования объектов O1, O2 и O3 разными экспертами:

Эксперты	ранги		
	O1	O2	O3
Эксперт 1	3	2	1
Эксперт 2	2	3	1
Эксперт 3	3	1.5	1.5

Сумма:	8	6.5	3.5
Обобщенный ранг	3	2	1

Для обобщения мнений экспертов - ***метод суммы мест***:

обобщенные ранги присваиваются в соответствии с возрастанием сумм рангов (по всем экспертам).

Согласованность оценок экспертов

Для оценки согласованности мнений экспертов - коэффициент конкордации:

$$K = (12\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} r_{ij} - \bar{r}\right)^2)/(m^2(n^3 - n) - m\sum_{s=1}^{m} T_s)$$

m – количество экспертов,
n – количество объектов,

$$\bar{r} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{ij}$$

- оценка мат. ожидания

$$T_s = \sum_{k=1}^{H_s} h_k^3 - h_k$$

– показатель связанных рангов в s-й ранжировке

h_k – число равных рангов в *k*-й группе связанных рангов

Значение *K*	< 0.3	0.3 – 0.5	0.5 – 0.7	0.7 – 0.9	> 0.9
Согласованность	слабая	умеренная	заметная	высокая	очень высокая

Согласованность оценок экспертов

Оценка мат. ожидания:

$$\bar{r} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{ij}$$

m – количество экспертов
n – количество объектов

Эксперты	ранги		
	O1	O2	O3
Эксперт 1	3	2	1
Эксперт 2	2	3	1
Эксперт 3	3	1.5	1.5

Мат. ожидание: (8 + 6.5 + 3.5) / 3 = 6

Отклонения: $(8-6)^2 + (6.5-6)^2 + (3.5-6)^2 = 10.5$

Отклонения от мат. ожидания:

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} r_{ij} - \bar{r}\right)^2$$

Сумма показателей связанных рангов

$$T = \sum_{s=1}^{m} T_s \qquad T_s = \sum_{k=1}^{H_s} h_k^{\,3} - h_k$$

h_k – число равных рангов в *k*-й группе связанных рангов

$H_S = 1,\ h_1 = 2$

$T = T_S = 2^3 - 2 = 6$

Коэффициент конкордации

$$K = \frac{12S}{m^2(n^3 - n) - mT}$$

$K = (12 * 10.5) / (3^2 * (3^3 – 3) – 3*6) =$

$= 126 / (9 * 24 – 18) = 126 / 198 = 0.63$

$0.5 < K < 0.7$ – заметная согласованность

Метод парных сравнений

Эксперт сравнивает каждую пару объектов. Результаты сравнения - в виде матрицы:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & если\ x_i \succ x_j \quad или\ x_i \equiv x_j \\ 0 & если\ x_i \prec x_j, \quad i, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Матрица должна быть согласована:

w_{ii} = 1 (по диагонали - 1);

если w_{ij} = 1, то w_{ji} = 0; (если строгий порядок)

если w_{ij} = 1 и w_{jk} = 1, то w_{ik} = 1.

Сравниваем объекты O1, O2, O3
O1 > O2, O1 > O3, O2< O1, O2< O3, O3 <O1, O3> O2

	O1	O2	O3
O1	1	1	1
O2	0	1	0
O3	0	1	1
Ранг	1	3	2

Сумма элементов матрицы по столбцу дает ранг объекта от наилучшего к худшему

Обобщение матриц сравнений

Для построения обобщенной матрицы - *метод нахождения медианы.*

	O1	O2	O3
O1	1	1	1
O2	0	1	0
O3	0	1	1

Матрица эксперта 1

	O1	O2	O3
O1	1	0	1
O2	1	1	1
O3	0	0	1

Матрица эксперта 2

	O1	O2	O3
O1	1	1	1
O2	0	1	1
O3	0	0	1

Матрица эксперта 3

Элемент обобщенной матрицы равен 1 только в том случае, если половина или больше экспертов посчитали этот элемент равным 1

	O1	O2	O3
O1	1	1	1
O2	0	1	1
O3	0	0	1

Обобщенная матрица

Другие методы парных сравнений

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \succ x_j \\ 0, & \text{если } x_i \equiv x_j \\ -1 & \text{если } x_i \prec x_j, \quad i,j=\overline{1,n} \end{cases}$$

	O1	O2	O3
O1	0	-1	-1
O2	1	0	1
O3	1	-1	0

Превосходство *i*-го объекта над *j*-тым измеряется в баллах от 1 до 9:
1 – нет превосходства,
9 – максимальная степень превосходства.

Для согласованности матрицы выполняется:

$$w_{ij} = 1/w_{ji},$$

т.е. симметричные клетки матрицы заполняются обратными величинами.

	O1	O2	O3
O1	1	7	5
O2	1/7	1	1/2
O3	1/5	2	1

Непосредственная оценка

Эксперт присваивает объектам числовые значения, отражающие оценку измеряемого свойства.

Это могут быть:
баллы по 5-, 10-, 100-балльной шкале;
оценки от 0 до 1;
лингвистические значения - «плохо (0.25)», «хорошо (0.75)», «отлично (1.0)» и т.д.

Эксперты	Компетентность	O1	O2	O3
Эксперт 1	0.5	0.8	0.4	0,6
Эксперт 2	0.3	1.0	0.8	0,4
Эксперт 3	0.2	0.6	1.0	0,8

Обобщенная оценка 0.82 0.64 0.58

Обобщенные оценки строятся с помощью методов осреднения:

$$a_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$$

a_{ij} – оценка i-го объекта j-ым экспертом,
m – количество экспертов

$$a_i = \sum_{j=1}^{m} k_j a_{ij}$$

k_j - коэффициенты компетентности экспертов

$$\sum_{j=1}^{m} k_j = 1$$

Последовательное сравнение (метод Черчмена-Акоффа)

Это комплексный метод, включающий как ранжирование, так и непосредственную оценку.

Допущения:

-каждому объекту (варианту решения) o_i соответствует действительное неотрицательное число u_i, рассматриваемое как мера значимости (полезности);

-если o_i лучше o_j, то $u_i > u_j$, если o_i эквивалентен o_j, то $u_i = u_j$;

-совместная значимость o_i и o_j равна $(u_i + u_j)$;

-если значимость o_k больше совместной значимости o_i и o_j , то $u_k > (u_i + u_j)$.

Метод может применяться, если допущения выполняются.

Пример, когда допущения не выполняются:

- если сравниваемые варианты несовместимы, т.е. не могут наблюдаться одновременно

Алгоритм метода последовательного сравнения

1. Ранжирование объектов от наиболее предпочтительного объекта к наименее предпочтительному: $O_1 > O_2 > O_3 > \ldots > O_n$
2. Непосредственная оценка объектов. Может использоваться шкала от 0 до 1 или от 1 до 10.
3. Сравнение каждого объекта, начиная с O_1, лучше ли он комбинации остальных объектов:

3.1. $O_1 >= O_2+O_3+ \ldots + O_n$? Да – переход на шаг 3.2
$O_1 >= O_2+O_3+ \ldots + O_{n-1}$? Да – переход на шаг 3.2
…
$O_1 >= O_2+O_3$?

3.2. $O_2 >= O_3+O_4+ \ldots + O_n$? Да – переход на шаг 3.3
$O_2 >= O_3+O_4+ \ldots + O_{n-1}$? Да – переход на шаг 3.3
…
$O_2 >= O_3+O_4$?

…

3.n-2. $O_{n-2} >= O_{n-1}+O_n$?

4. Корректировка оценок , выставленных на шаге 2, так, чтобы они удовлетворяли построенным на шаге 3 неравенствам (начиная с последнего неравенства).

Пример применения метода последовательного сравнения

1. Ранжирование объектов : $O_1 > O_2 > O_3 > O_4 > O_5$
2. Непосредственная оценка: $O_1 = 7$, $O_2 = 4$, $O_3 = 2$, $O_4 = 1.5$, $O_5 = 1$
3. Сравнение каждого объекта с комбинацией остальных объектов:

3.1. $O_1 >= O_2+O_3+O_4+O_5$? Нет: $O_1 < O_2+O_3+O_4+O_5$ (1)
$O_1 >= O_2+O_3+O_4$? Нет: $O_1 < O_2+O_3+O_4$ (2)
$O_1 >= O_2+O_3$? Да: $O_1 > O_2+O_3$ (3)

3.2. $O_2 >= O_3+O_4+O_5$? Нет: $O_2 < O_3+O_4+O_5$ (4)
$O_2 >= O_3+O_4$? Да: $O_2 > O_3+O_4$ (5)

3.3. $O_3 >= O_4+O_5$? Да: $O_3 > O_4+O_5$ (6)

4. Корректировка оценок, начиная от (6), заканчивая (1):

(6) $O_3 > O_4+O_5$	2 > (1.5+1)?	Нет. Корректируем: $O_3 = 3$
(5) $O_2 > O_3+O_4$	4 > (3+1.5)?	Нет. Корректируем: $O_2 = 5$
(4) $O_2 < O_3+O_4+O_5$	5 < (3+1.5+1)?	Да. Не корректируем
(3) $O_1 > O_2+O_3$	7 > (5 +3)?	Нет. Корректируем: $O_1 = 8.5$
(2) $O_1 < O_2+O_3+O_4$	8.5 < (5+3+1.5)?	Да. Не корректируем
(1) $O_1 < O_2+O_3+O_4+O_5$	8.5 < (5+3+1.5+1)?	Да. Не корректируем

Итоговые оценки: $O_1 = 8.5$, $O_2 = 5$, $O_3 = 3$, $O_4 = 1.5$, $O_5 = 1$

Организация экспертизы

В случае невозможности объективных измерений используются **экспертные методы** оценивания систем.

Этапы проведения экспертизы:

Постановка проблемы, определение цели экспертизы

↓

Разработка процедуры проведения экспертизы

↓

Формирование группы экспертов

↓

Проведение опроса экспертов

↓

Обработка мнений экспертов, обобщение мнений

↓

Интерпретация результатов экспертизы

Оценка качеств эксперта

Способы оценки качеств эксперта:

Априорные методы (не используется информация о результатах участия эксперта в предшествующих экспертизах):

- самооценка - эксперт сам оценивает свои качества по некоторой шкале;
- взаимная оценка – эксперты оценивают друг друга.
- метод списка (разновидность метода взаимной оценки) - каждый эксперт составляет список компетентных специалистов. Коэффициент компетентности – отношение числа списков, в которых эксперт присутствует, к общему числу списков;
- анкетный метод – используются объективные характеристики, имеющие документальное подтверждение (стаж работы, ученая степень, ученое звание, количество публикаций, индекс цитирования)

Оценка качеств эксперта

Апостериорные методы (используется информация о результатах участия эксперта в предшествующих экспертизах):

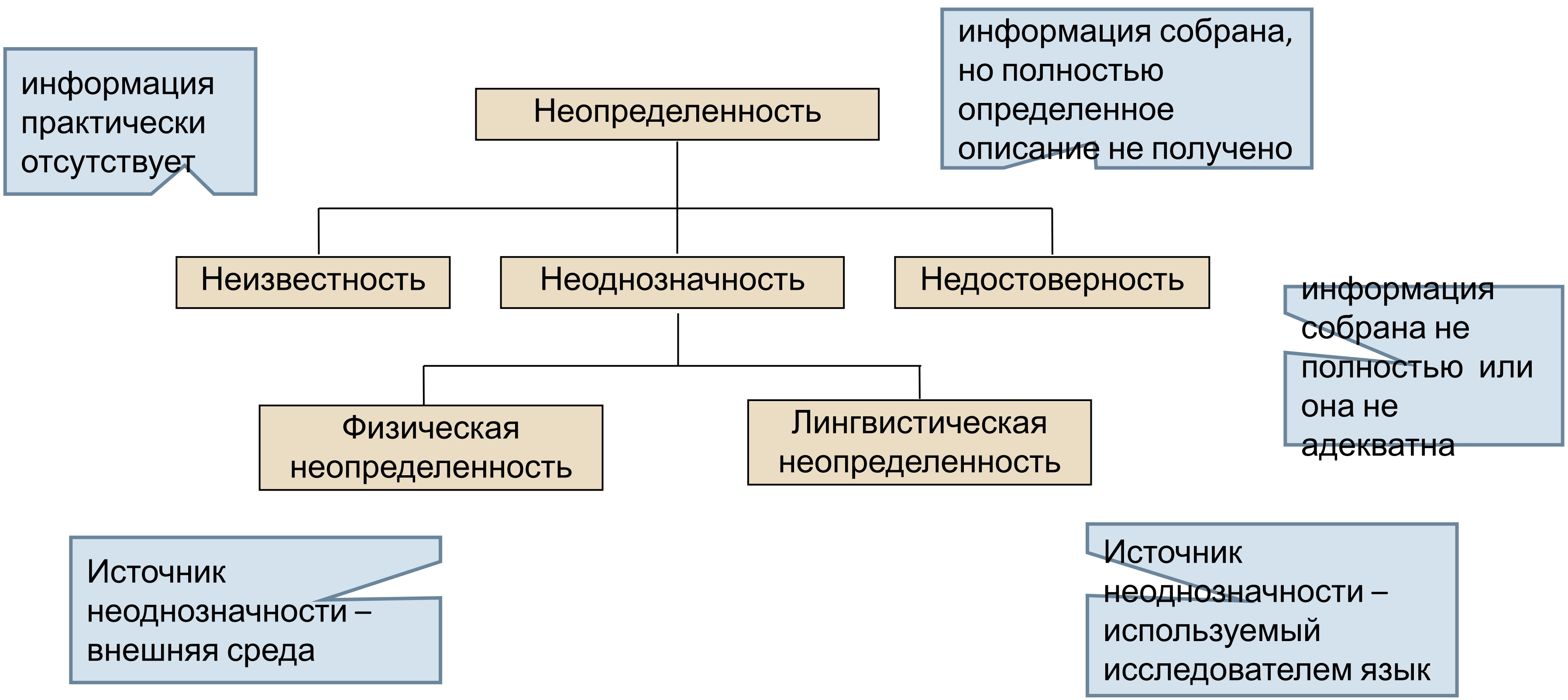
- метод отклонения от групповой оценки – рассчитывается коэффициент отклонения, как отношение отклонения индивидуальной оценки эксперта от результирующей групповой оценки к максимально возможному отклонению;
- метод оценки достоверности – определяется относительная частота случаев, когда мнение эксперта подтвердилось (например, прогноз)

Тестовые методы (эксперт выполняет тестовые задания).

Правильные ответы на вопросы теста (например, значения оцениваемых параметров) должны быть известны аналитической группе, проводящей тест и должна быть разработана шкала для определения точности оценок, даваемых экспертом.

Неопределенность

В процессе моделирования происходит отображение реальной ситуации на формализованный язык.
Если нет взаимно однозначного соответствия между объектами отображаемой реальности и объектами языка, имеет место неопределенность.



Неопределенность

- Физическая неопределенность
  - Случайность — Имеется несколько возможностей, становящихся действительностью случайным образом
  - Неточность — неточность измерений, выполняемых физическими приборами
- Лингвистическая неопределенность — может быть синтаксической, семантической и прагматической
  - Неопределенность значений слов
    - Омонимия — отображаемые одним и тем же словом объекты существенно различны
    - Нечеткость — применение того или иного слова для отображения объектов неоднозначно
  - Неопределенность смысла фраз

Выбор управления в условиях риска

При оценке и выборе вариантов управления нужно учитывать **риск** – неопределенность состояния внешней среды.

Пример. Изготовление и продажа изделий

Варианты (количество изделий)	Состояния среды (количество клиентов)			
	w_1 –от 1 до 10 (в среднем 5)	w_2 –от 11 до 20 (в среднем 15)	w_3 –от 21 до 30 (в среднем 25)	w_4 –от 31 до 40 (в среднем 35)
u_1 -10 шт.	50* 5 –10*10 = 150	50*10 –10*10 = 400	50*10 –10*10 = 400	50*10 –10*10 = 400
u_2 -20 шт.	50*5 – 10*20 = 50	50*15 –10*20 = 550	50*20 –10*20 = 800	50*20 –10*20 = 800
u_3 -30 шт.	50*5 – 10*30 = 0	50*15 –10*30 = 450	50*25 –10*30 = 950	50*30 –10*30 = 1200

Себестоимость изделий – 10 руб., цена продажи – 50 руб.
Критерий: прибыль = доход – затраты = (цена изделия * кол-во покупателей) –
- (себестоимость * кол-во изделий)
Если кол-во изделий > кол-ва клиентов, то кол-во покупателей = кол-ву клиентов
Если кол-во изделий < кол-ва клиентов, то кол-во покупателей = кол-ву изделий

Выбор управления в условиях риска

Критерий среднего выигрыша

$$K_i = \sum_{j=1}^{n} p_j k_{ij}$$

$$u^{opt} = \arg\max_i K_i$$

K_i – общая эффективность u_i
k_{ij} – эффективность u_i для состояния среды w_j
p_j – вероятность состояния среды w_j

варианты	эффективность для разных состояний внешней среды			
	w_1	w_2	w_3	w_4
u_1	150	400	400	400
u_2	50	550	800	800
u_3	0	450	950	1200
Вероятность	0.3	0.4	0.2	0.1

150*0.3 + 400*0.4 + 400*0.2 + 400*0.1 =325

50*0.3 + 550*0.4 + 800*0.2 + 800*0.1 =475

0*0.3 + 450*0.4 + 950*0.2 + 1200*0.1 =490

$u^{opt} = u_3$

Выбор управления в условиях риска

Критерий Лапласа

$$K_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}$$

$$u^{opt} = \arg\max_i K_i$$

О состояниях среды ничего не известно, поэтому их можно считать равновероятными

варианты	эффективность для разных состояний внешней среды			
	w_1	w_2	w_3	w_4
u_1	150	400	400	400
u_2	50	550	800	800
u_3	0	450	950	1200

(150 + 400 + 400 + 400) / 4 = 337.5

(50 +550 + 800 + 800) / 4 = 550

(0 + 450 + 950 + 1200) / 4 = 650

$u^{opt} = u_3$

Выбор управления в условиях риска

Критерий Вальда (максимина)

$$K_i = \min_j k_{ij} \qquad u^{opt} = \arg\max_i K_i$$

Это критерий, осторожного наблюдателя. Он гарантирует определенный выигрыш при наихудших условиях

Критерий максимакса

$$K_i = \max_j k_{ij} \qquad u^{opt} = \arg\max_i K_i$$

ЛПР надеется на лучшее состояние среды и в большой степени рискует

варианты	эффективность для разных состояний внешней среды			
	w_1	w_2	w_3	w_4
u_1	150	400	400	400
u_2	50	550	800	800
u_3	0	450	950	1200

Критерий Вальда

min =150

min = 50

min = 0

$u^{opt} = u_1$

Критерий максимакса

max = 400

max = 800

max = 1200

$u^{opt} = u_3$

Выбор управления в условиях риска

Критерий Гурвица (пессимизма-оптимизма)

$$K_i = \alpha \max_j k_{ij} + (1-\alpha)\min_j k_{ij}$$

$\alpha\,(0 \le \alpha \le 1)$ -коэффициент оптимизма

$$u^{opt} = \arg\max_i K_i$$

Результат зависит от отношения к риску ЛПР

При α = 0 - критерий Вальда

при α = 1 – критерий максимакса

варианты	эффективность для разных состояний внешней среды			
	w_1	w_2	w_3	w_4
u_1	150	400	400	400
u_2	50	550	800	800
u_3	0	450	950	1200

Коэффициент оптимизма α = 0.6

0.6*400 + (1-0.6)* 150 = 300

0.6*800 + (1-0.6)* 50 = 500

0.6*1200 + (1-0.6)* 0 = 720

$u^{opt} = u_3$

Выбор управления в условиях риска

Критерий Сэвиджа (минимакса)

Сначала исходная матрица преобразуется в матрицу потерь:

$$\Delta k_{ij} = \max_i k_{ij} - k_{ij}$$

вари-анты	эффективность для разных состояний внешней среды			
	w_1	w_2	w_3	w_4
u_1	150	400	400	400
u_2	50	550	800	800
u_3	0	450	950	1200
максимум	150	550	950	1200

варианты	потери для разных состояний внешней среды				Максимум потерь
	w_1	w_2	w_3	w_4	
u_1	150-150=0	550-400=150	950-400=550	1200-400=800	800
u_2	150-50=100	550-550=0	950-800=150	1200-800=400	400
u_3	150-0=150	550-450=100	950-950=0	1200-1200=0	150

$u^{opt} = u_3$

$$K_i = \max_j \Delta k_{ij} \qquad u^{opt} = \arg\min_i K_i$$

Оптимальным является вариант с минимальной из максимальных оценок потерь по всем состояниям среды

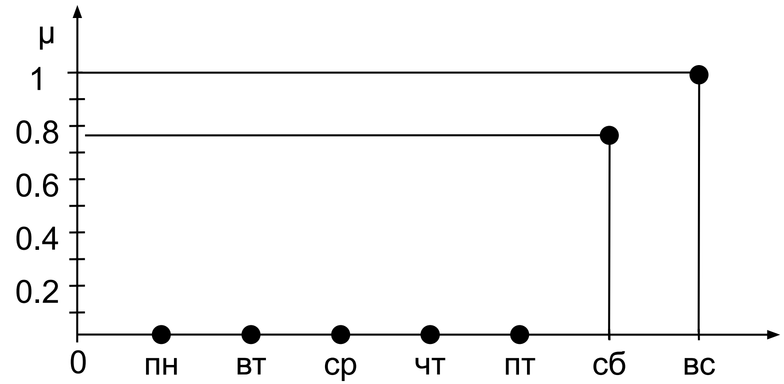
Нечеткость

Нечеткое множество: $A = \{x / \mu_A(x)\}$ $x \in X$ $0 \le \mu_A(x) \le 1$

X – базовое множество, $\mu_A(x)$ – ***функция принадлежности,*** характеризующая степень уверенности в том, что *x* принадлежит множеству (1 – точно принадлежит, 0 – точно не принадлежит)

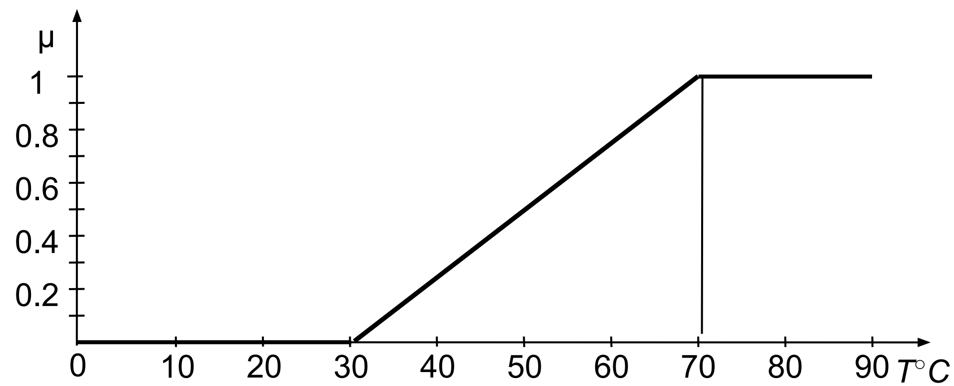
Дискретная функция принадлежности

Пример. Нечеткое множество «выходной день»:
{пн/0, вт/0, ср/0, чт/0, пт/0, сб/0.75, вс/1} или {сб/0.75, вс/1}



Непрерывная функция принадлежности

Нечеткое множество «горячий кофе» можно задать на базовом множестве температур



Лингвистическая переменная

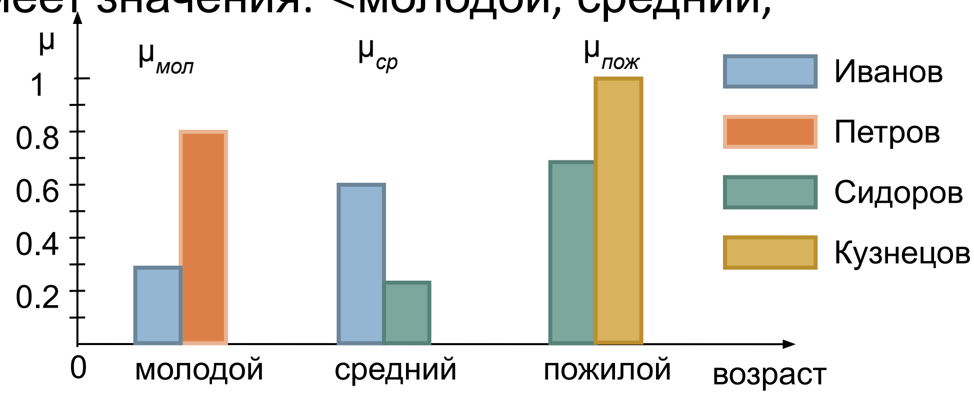
Лингвистическая переменная – значения являются нечеткими множествами.

Пример. Переменная «возраст» имеет значения: <молодой, средний, пожилой>.

Дискретная функция принадлежности

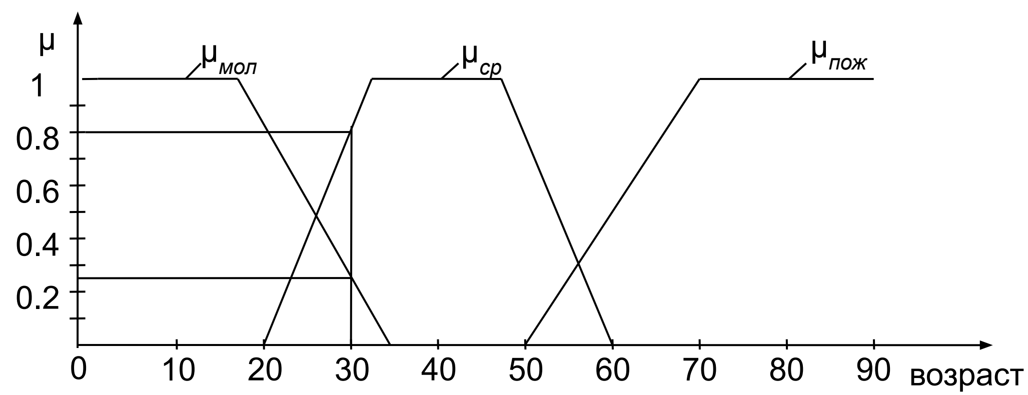
Базовое множество – конкретные люди
X = {Иванов, Петров, Сидоров, Кузнецов}.

Значения можно определить:
молодой = {Иванов/0.3, Петров/0.8};
средний = {Иванов/0.6, Сидоров/0.25};
пожилой = {Сидоров/0.7, Кузнецов/1}.

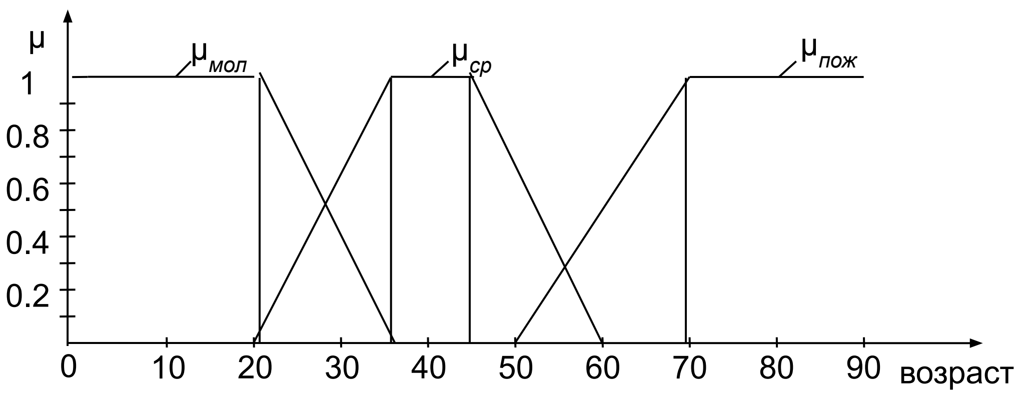


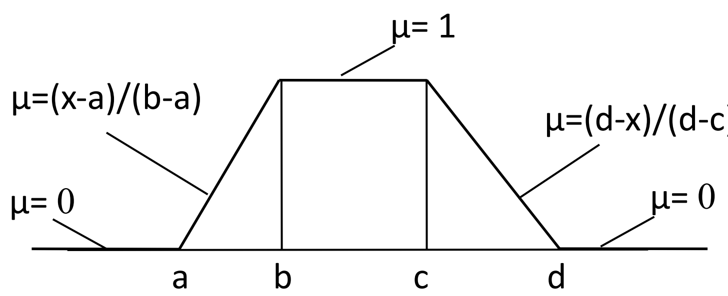
Непрерывная функция принадлежности

Если *X* - значения возраста в годах (0 ≤ *x* ≤ 100), то функции принадлежности для значений переменной «возраст» можно задать графически



Лингвистическая переменная





$$\mu_{мол} = \begin{cases} 1 & \text{при } x \le 20, \\ (35 - x)/(35 - 20) & \text{при } 20 < x < 35 \\ 0 & \text{при } x \ge 35 \end{cases}$$

$$\mu_{ср} = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 20 \text{ и } x \ge 60 \\ (x - 20)/(35 - 20) & \text{при } 20 < x < 35 \\ 1 & \text{при } 35 \le x \le 45 \\ (60 - x)/(60 - 45) & \text{при } 45 < x < 60 \end{cases}$$

$$\mu_{пож} = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 50 \\ (x - 50)/(70 - 50) & \text{при } 50 < x < 70 \\ 1 & \text{при } x \ge 70. \end{cases}$$

Иванов – 30 лет

$\mu_{мол} = (35 - 30)/(35 - 20) = 0.33$

$\mu_{ср} = (30 - 20)/(35 - 20) = 0.66$

$\mu_{пож} = 0$

Петров – 55 лет

$\mu_{мол} = 0$

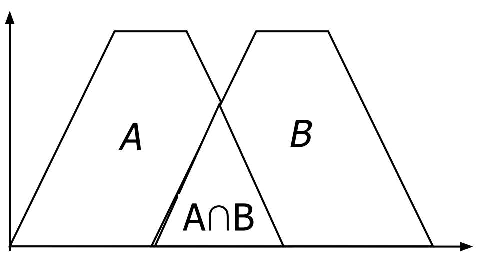
$\mu_{ср} = (60 - 55)/(60 - 45) = 0.33$

$\mu_{пож} = (55 - 50)/(70 - 50) = 0.25$

Нечеткие логические операции

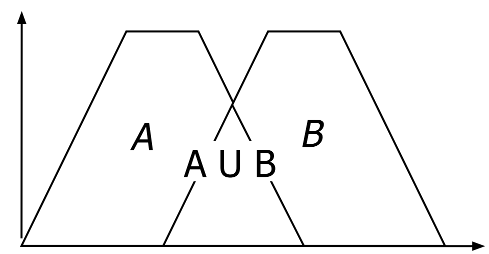
Пересечением нечетких множеств *A* и *B* является наибольшее нечеткое множество, содержащееся одновременно в *A* и *B,* с функцией принадлежности:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$



Объединением нечетких множеств *A* и *B* является наименьшее нечеткое множество, включающее как *A*, так и *B*, с функцией принадлежности:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$



Пример. Нечеткое множество «небольшое натуральное число»:
{1/1.0, 2/1.0, 3/0.9, 4/0.8, 5/0.6, 6/0.5, 7/0.4, 8/0.2, 9/0.1}
Нечеткое множество «число, приблизительно равное 2»:
{1/0.5, 2/1.0, 3/0.6, 4/0.4, 5/0.2, 6/0}
Нечеткое множество «небольшое натуральное число, приблизительно равное 2»:
{1/0.5, 2/1.0, 3/0.6, 4/0.4, 5/0.2, 6/0}

Нечеткая логика

Нечеткое высказывание *U* – логическое высказывание, для которого задано отображение истинности Т: *U* → [0, 1].

Пример: Т(«Иванов - высокий») = 0.7

Конъюнкция нечетких высказываний:

$$T(A \wedge B) = \min(T(A), T(B))$$

Если Т(«Иванов - высокий») = 0.7, Т(«Иванов - молодой») = 0.5, то
Т(«Иванов - высокий» И «Иванов - молодой») = min (0.7, 0.5) = 0.5

Дизъюнкция нечетких высказываний:

$$T(A \vee B) = \max(T(A), T(B))$$

Нечеткий вывод

X = {B1, B2, B3} - варианты организации бизнес-процесса, характеризуемые лингвистическими переменными:
«качество»: <'п' (плохое), 'у' (удовлетворительное), 'х' (хорошее) >
«стоимость», «эффективность»: <'н' (низкая), 'с' (средняя), 'в' (высокая) >.

Исходные значения переменных «качество» и «стоимость» задаются непосредственно экспертами

Переменные	B1	B2	B3
Стоимость	н/0.8	в/0.75	с/0.6
Качество	х/ 0.7	у/0.65	у/0.9

Значения переменной «эффективность» выводятся по правилам-продукциям:

П1: If «стоимость» = 'н' & «качество» = 'х' then «эффективность» = 'в';
П2: If «стоимость» = 'с' & «качество» = 'у' then «эффективность» = 'с';
П3: If «стоимость» = 'в' & «качество» = 'у' then «эффективность» = 'н';
…

Для B1 по правилу П1 выводим «эффективность» = 'в' , T= min (0.8, 0.7) = 0.7
Для B2 по правилу П3 выводим «эффективность» = 'н' , T= min (0.75, 0.65) = 0.65
Для B3 по правилу П2 выводим «эффективность» = 'с' , T= min (0.6, 0.9) = 0.6