МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Линейным программированием называют задачи оптимизации, в которых целевая функция является линейной функцией своих аргументов, а условия, определяющие их допустимые значения, имеют вид линейных уравнений и неравенств [1].

Рассмотрим линейную целевую функцию с одной переменной управления,

$$F(y;x) = A + Bx + Cy$$

причем линейная модель физического процесса выражается как

$$y = D + Ex$$

Подставив второе в первое, получим G-форму целевой функции:

$$G(x) = A + Bx + CD + CEx$$

или ,

$$G(x) = \psi_0 + \psi_1 x$$

где

$$\psi_0 = A + CD \qquad \psi_1 = B + CE$$

Видно, что при ψ1 > 0 максимум достигается при x = + ∞, а минимум – при x = – ∞.

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Таким образом, линейные целевые функции (как с одной переменной, так и с n-переменными) при отсутствии ограничений не имеют конечного оптимума, поэтому в задачах оптимизации целевой функции ограничения играют принципиальную роль. В дальнейшем будет показано, что совокупность любого числа линейных ограничений выделяет в пространстве $x_1, x_2, \ldots, x_n$ некоторый выпуклый многогранник области возможных значений переменных управления. Экстремум целевой функции достигается в одной из его вершин.

При этом ***линиями равного уровня целевой функции являются линии, соединяющие точки, в которых значения целевой функции равны между собой***.

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

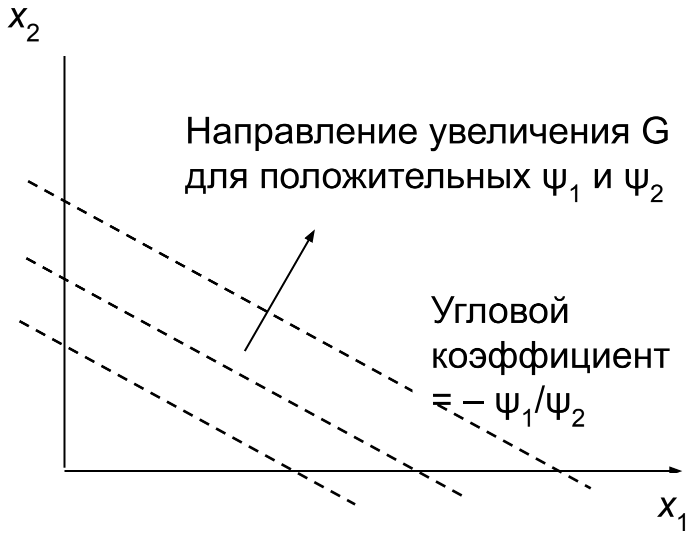
Для линейной функции с двумя переменными управления

$$G = \psi_0 + \psi_1 x_1 + \psi_2 x_2$$

линии равного уровня, нанесенные на плоскость

(x_1, x_2), представляют собой прямые линии типа

$$x_2 = \frac{(G - \psi_0)}{\psi_2} + \frac{\psi_1}{\psi_2} x_1$$



ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Рассмотрим линейное программирование на примере максимизации функции

$$G = 25x_1 + 520x_2$$

при условии, что ограничениями являются

$$3x_1 + x_2 \geq 8 \qquad 4x_1 + 3x_2 \geq 19 \qquad x_1 + 3x_2 \geq 7 \qquad 0 \leq x_1 \leq 10 \qquad 0 \leq x_2 \leq 9$$

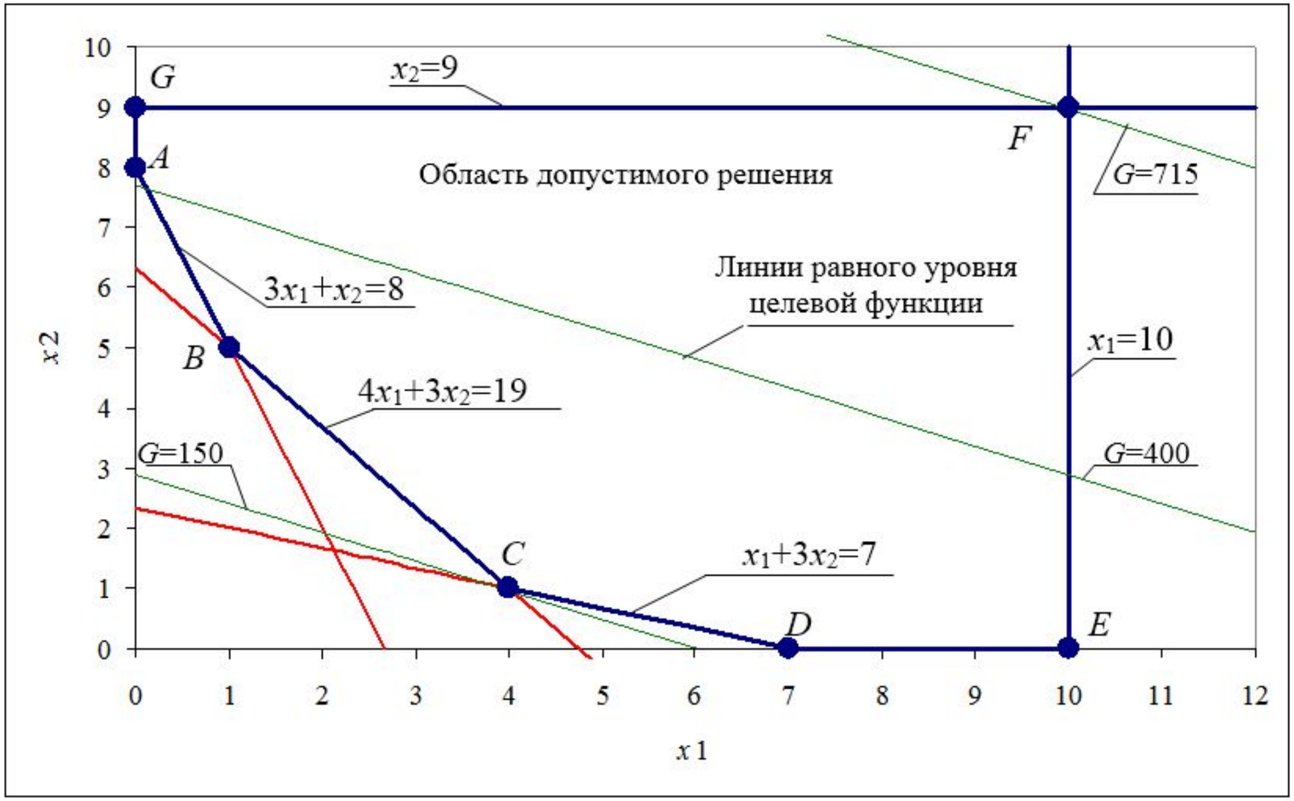
Координаты точек пересечения ограничивающих линий могут быть найдены алгебраическим либо графическим способом. В результате получим

A(0,8); *B*(1,5); *C*(4,1); *D*(7,0); *E*(10,0); *F*(10,9); *G*(0,9).

Минимум находится в точке *C*, а максимум – в точке *F*, причем

$G_{min} = 150$, а $G_{max} = 700$.

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ



ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

В городе имеется два склада цемента и два завода ЖБИ, потребляющих этот цемент. Ежедневно с первого склада вывозится 50 т цемента, со второго – 70 т. Этот цемент доставляется на заводы, причем первый завод получает 40 т, второй – 80 т. Допустим, что перевозка одной тонны цемента с первого склада на первый завод стоит 120 руб., с первого склада на второй завод – 160 руб., со второго склада на первый завод – 80 руб., и со второго склада на второй завод – 100 руб. Как нужно спланировать перевозки, чтобы их стоимость была минимальной?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, дадим математическую постановку задачи.

Обозначим через x_1 и x_2 количество цемента, который следует перевезти с первого склада соответственно на первый и второй заводы, а через x_3 и x_4 – количество цемента, который нужно перевезти со второго склада на первый и второй заводы.

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Эти условия приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 50 \\ x_3 + x_4 = 70 \\ x_1 + x_3 = 40 \\ x_2 + x_4 = 80 \end{cases}$$

$x_i \geq 0, \qquad i = 1, 2, 3, 4.$

Первые два уравнения системы определяют, сколько цемента нужно вывезти с каждого склада, два других уравнения показывают, сколько цемента нужно привезти на каждый завод. Неравенство означает, что в обратном направлении с заводов на склады цемент не возят. Общая стоимость всех перевозок определяется формулой

$$G = 120x_1 + 160x_2 + 80x_3 + 100x_4.$$

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

С математической точки зрения задача заключается в том, чтобы найти числа x_i, удовлетворяющие заданным условиям и минимизировать стоимость перевозок .

Рассмотрим систему уравнений. Это система четырех уравнении с четырьмя неизвестными. Однако независимыми в ней являются только первые три уравнения, четвертое – их следствие (если сложить 1-е и 2-е уравнения и вычесть 3-е, получится 4-е). Таким образом, фактически нужно рассмотреть следующую систему, эквивалентную:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 50 \\ x_3 + x_4 = 70 \\ x_1 + x_3 = 40 \end{cases}$$

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

В ней число уравнений на единицу меньше числа неизвестных, так что мы можем выбрать какое-нибудь неизвестное, например x_1, и выразить через него с помощью уравнений три остальные.

Соответствующие формулы имеют вид

$$\begin{cases} x_2 = 50 - x_1 \\ x_3 = 40 - x_1 \\ x_4 = 70 - x_3 = 70 - 40 + x_1 = 30 + x_1. \end{cases}$$

Учитывая неравенства, получаем систему

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ 50 - x_1 \geq 0 \\ 40 - x_1 \geq 0 \\ 30 + x_1 \geq 0, \end{cases}$$

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

из которой $0 \le x_1 \le 40$.

Таким образом, задавая любое x_1, удовлетворяющее последнему неравенству, и вычисляя x_2, x_3, x_4, мы получим один из возможных планов перевозки. При реализации этого плана с каждого склада будет вывезено и на каждый завод доставлено нужное количество цемента.

Вычислим стоимость перевозок $G = 14200 - 20x_1$.

Эта формула определяет величину G как функцию одной переменной x_1, которую можно выбирать произвольно.

Стоимость окажется минимальной, если мы придадим величине x_1 наибольшее возможное значение: $x_1 = 40$. Значения остальных величин x_i находятся по x_1.

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Итак, оптимальный по стоимости план перевозок имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = 40 \\ x_2 = 10 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 70. \end{cases}$$

Стоимость перевозок в этом случае составляет 13400 руб. При любом другом допустимом плане перевозок она окажется выше: $G > G_{min}$.

ЗАДАЧА О ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕСУРСОВ

Мебельная фабрика выпускает стулья двух типов. На изготовление одного стула первого типа, стоимостью 800 руб., расходуется 2 п.м досок стандартного сечения, 0,5 м^2 обивочной ткани и 2 чел.-ч рабочего времени. Для стульев второго типа аналогичные данные составляют: 1200 руб., 4 п.м, 0,25 м^2 и 2,5 чел.-ч.

Допустим, что в распоряжении фабрики имеется 440 п.м досок, 65 м^2 обивочной ткани, 320 чел.-ч рабочего времени. Какое количество стульев каждого типа надо изготовить, чтобы в рамках этих ресурсов стоимость произведенной продукции была максимальной?

Для ответа на этот вопрос постараемся опять сформулировать задачу как математическую. Обозначим через x_1 и x_2 запланированное к производству число стульев соответственно первого и второго типов.

ЗАДАЧА О ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕСУРСОВ

Ограниченный запас сырья и трудовых ресурсов означает, что x_1 и x_2 должны удовлетворять неравенствам

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 440 \\ \dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{1}{4}x_2 \le 65 \\ 2x_1 + \dfrac{5}{2}x_2 \le 320. \end{cases}$$

Кроме того, по смыслу задачи они должны быть неотрицательными

$$\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

ЗАДАЧА О ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕСУРСОВ

Стоимость запланированной к производству продукции определяется формулой

$$G(x_1,x_2) = 800x_1+1200x_2.$$

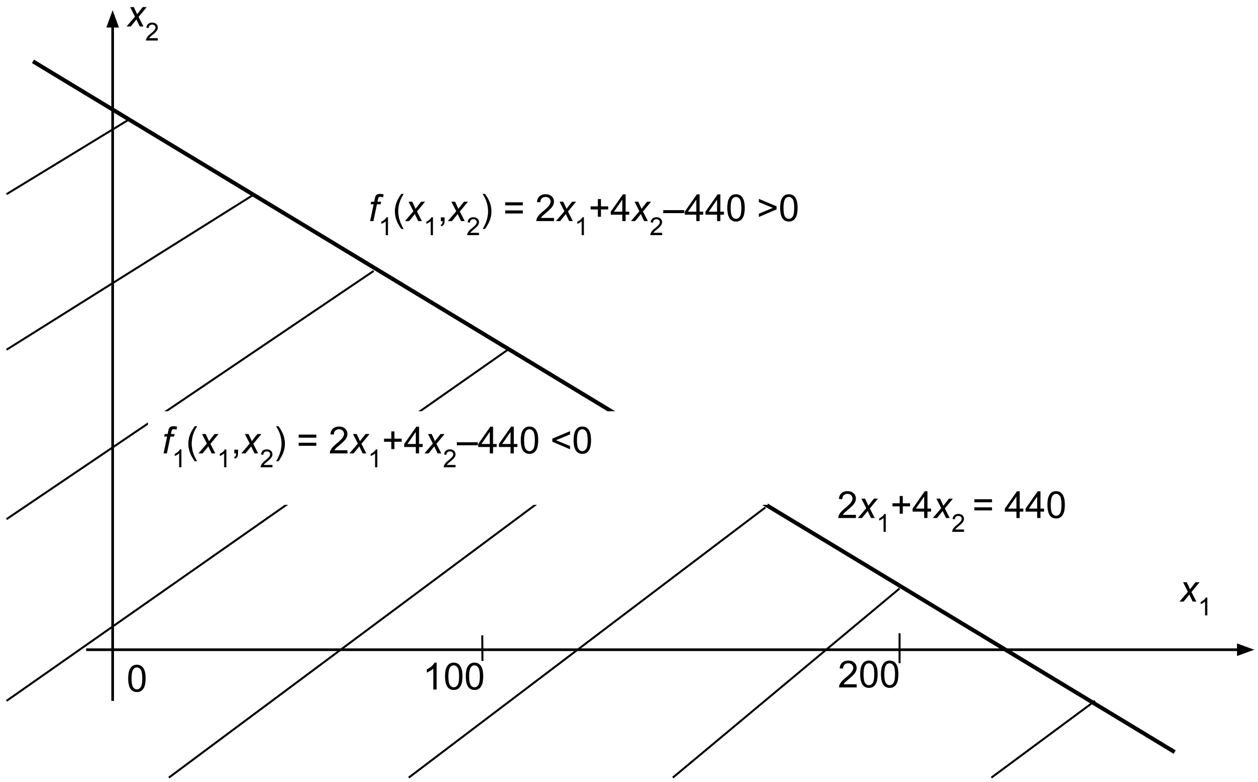
Итак, с математической точки зрения задача составления оптимального по стоимости выпущенной продукции плана фабрики сводится к определению пары целых чисел x_1, x_2, удовлетворяющих линейным неравенствам, и дающих наибольшее значение линейной функции. Мы опять получили типичную задачу линейного программирования. По своей постановке она несколько отличается от транспортной задачи, однако это различие не существенно.

ЗАДАЧА О ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕСУРСОВ

Для анализа сформулированной задачи рассмотрим плоскость и введем на ней декартову систему координат x_1, x_2. Найдем на этой плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют заданным условиям. При этом множество лежит в первой четверти. Выясним смысл ограничений, которые задаются неравенствами. Проведем на плоскости прямую, определяемую уравнением $2x_1+4x_2 = 440$.

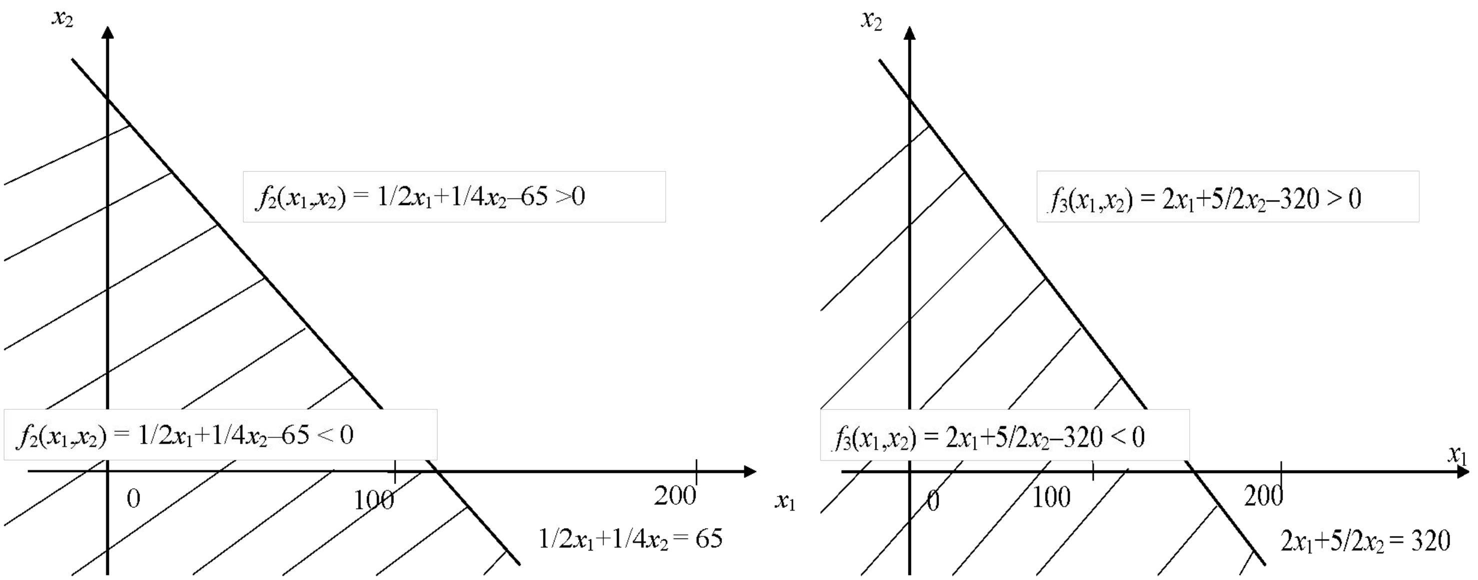
Она делит плоскость на две полуплоскости. На одной из них, расположенной ниже прямой, функция $f_1(x_1,x_2) = 2x_1+4x_2-440$ принимает отрицательные значения; на другой, расположенной выше прямой, – положительные. Таким образом, первое из неравенств выполняется на множестве точек, которое включает в себя прямую и полуплоскость, расположенную ниже этой прямой. На рисунке соответствующая часть плоскости заштрихована.

ЗАДАЧА О ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕСУРСОВ



ЗАДАЧА О ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕСУРСОВ

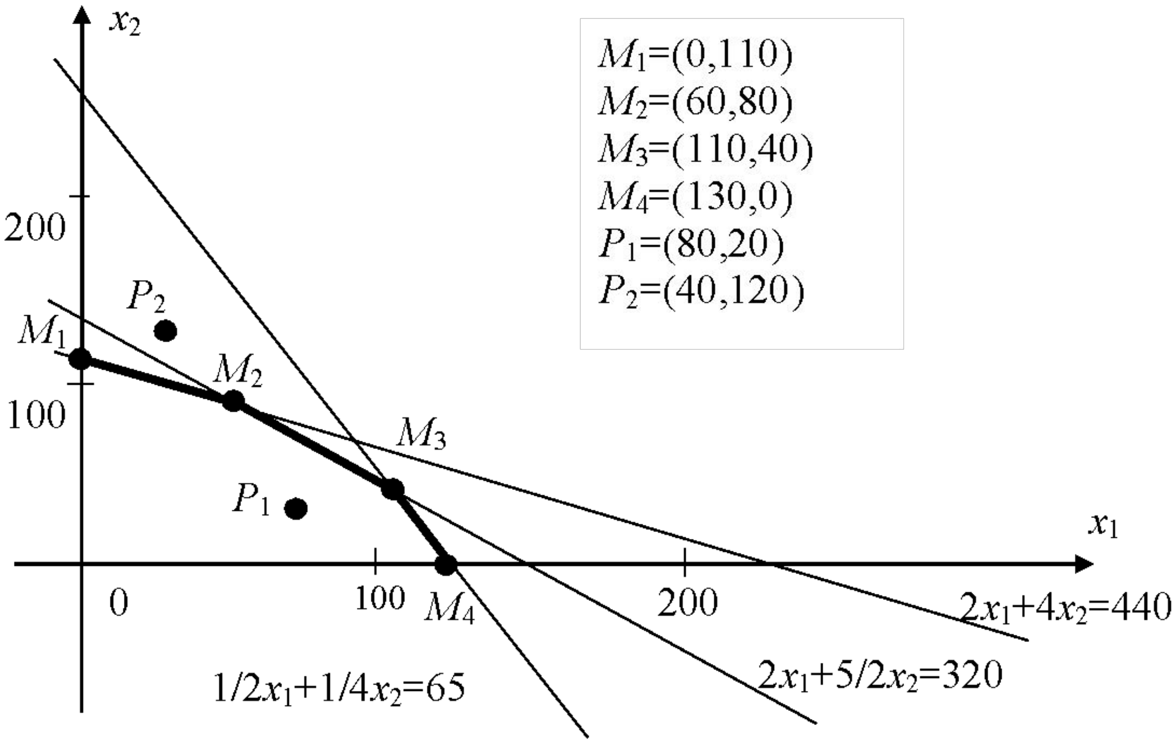
Совершенно аналогично можно найти множества точек, удовлетворяющих второму и третьему неравенствам из системы



ЗАДАЧА О ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕСУРСОВ

Возьмем пересечение трех найденных множеств и выделим его часть, расположенную в первой четверти. В результате получим множество точек, удовлетворяющих всей совокупности ограничений. Данное множество имеет вид пятиугольника, показанного на рис. Его вершинами являются точки пересечения прямых, на которых неравенства переходят в точные равенства. Координаты вершин пятиугольника указаны на рисунке.

ЗАДАЧА О ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕСУРСОВ



ЗАДАЧА О ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕСУРСОВ

Любой точке *P* с целочисленными координатами (x_1, x_2), принадлежащей данному пятиугольнику, соответствует план выпуска стульев, который может быть выполнен при имеющихся запасах сырья и трудовых ресурсах (реализуемый план). Наоборот, если точка *P* не принадлежит пятиугольнику, то соответствующий план не может быть выполнен (нереализуемый план).

Рассмотрим на плоскости x_1, x_2 линии уровня целевой функции: $800x_1+1200x_2 = C$.

Это уравнение описывает семейство прямых, параллельных прямой

$$800x_1+1200x_2 = 0.$$

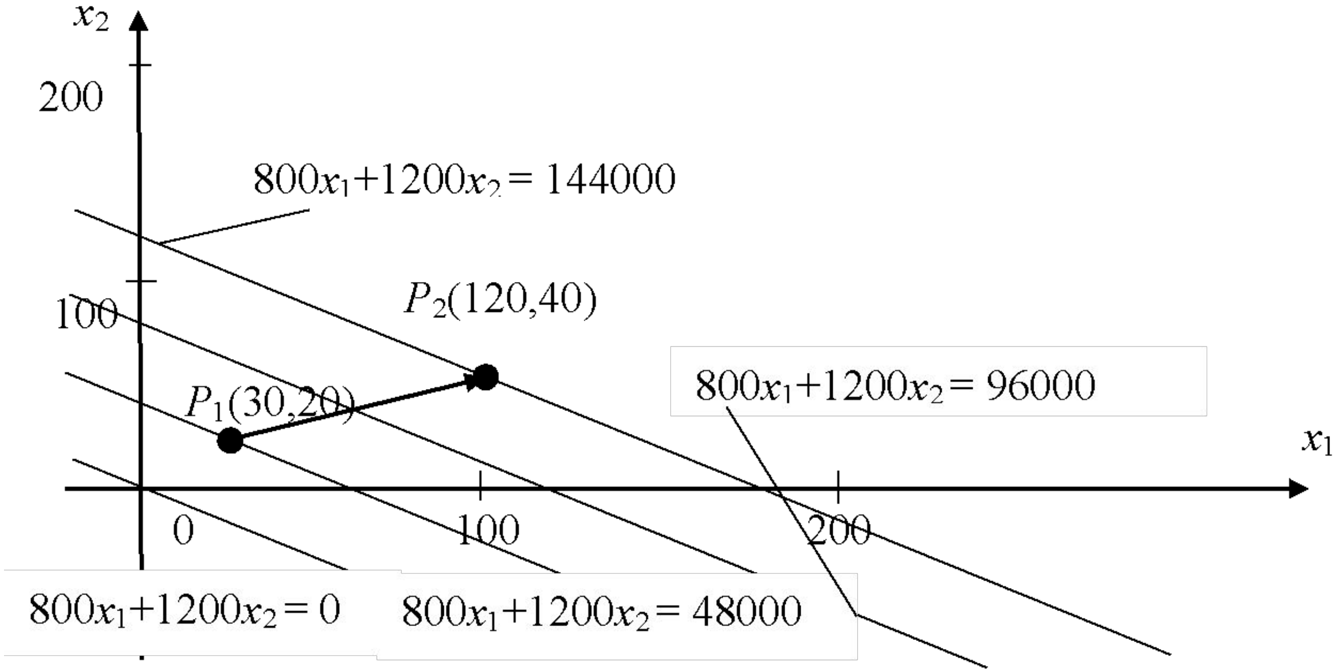
При параллельном переносе этой прямой вправо параметр *C* возрастает, влево – убывает.

Свойства функции тесно связаны с прямыми. Вдоль каждой из них она сохраняет постоянное значение, равное *C*, а при переходе с одной прямой на другую ее значение меняется.

ЗАДАЧА О ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕСУРСОВ

Будем рассматривать только первую четверть. Предположим, что мы перешли из точки P_1, расположенной на одной прямой, в точку P_2, расположенную на другой прямой (рис). Если вторая прямая расположена дальше от начала координат, чем первая, то функция G при этом переходе возрастет. Отсюда следует важный вывод: оптимальный план должен располагаться на прямой семейства, наиболее удаленной от начала координат.

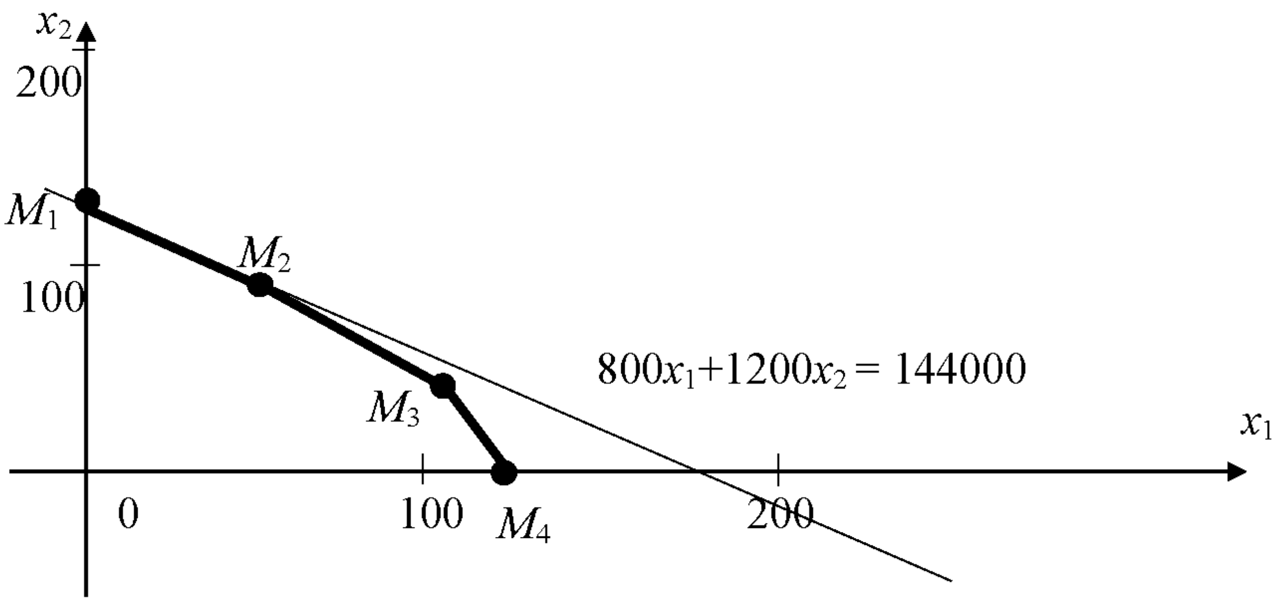
ЗАДАЧА О ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕСУРСОВ



ЗАДАЧА О ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕСУРСОВ

Этот вывод позволяет закончить решение задачи. Рассмотрим рис. На нем воспроизведен пятиугольник реализуемых планов и нарисована прямая семейства, проходящая через точку M_2 с координатами (60, 80). Она является предельной прямой семейства, имеющей общую точку с пятиугольником. Если мы попытаемся с помощью параллельного переноса отодвинуть ее дальше от начала координат, то получим прямую, не имеющую общих точек с пятиугольником, т. е. соответствующие планы нереализуемы.

ЗАДАЧА О ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕСУРСОВ



ЗАДАЧА О ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕСУРСОВ

Итак, оптимальный план найден, – он предписывает производство 60 стульев первого типа и 80 стульев второго типа. Стоимость этой продукции 144000 руб. На выполнение плана нужно затратить: 440 п.м досок, 50 м^2 обивочной ткани, 320 чел. -ч рабочего времени.

Видно, что оптимальный план требует полного использования запаса досок и трудовых ресурсов, в то время как обивочная ткань будет израсходована не полностью – останется 15 м^2.

Этот результат ясен из последнего рис. Точка M_2, определяющая оптимальный план, является вершиной пятиугольника.

Она лежит на пересечении прямых $2x_1+4x_2 = 440$ и $2x_1+5/2x_2 = 320$.

ЗАДАЧА О ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕСУРСОВ

Уравнения этих прямых получаются из первого и третьего условий системы при замене их на строгие равенства. Это означает полный расход досок и трудовых ресурсов. Однако точка M_2 не принадлежит прямой

$1/2x_1+1/4x_2 = 65$,

так что второе условие связано с ограниченным запасом обивочной ткани, имеет форму неравенства $50 < 65$.

Проведенный анализ показывает, что дальнейшее увеличение стоимости продукции регламентируется запасом досок и трудовыми ресурсами.

ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. **Вводные лекции по прикладной математике / А.Н. Тихонов [и др.]. М. : Наука, 1984.**