

Классификация игр и формы их
представления

Содержание лекции 1

1. История развития теории игр
2. Связь теории игр с другими дисциплинами
3. Применение теории игр к анализу международных отношений и в политологии
4. Ограничения применения теории игр
5. Структура курса
6. Литература по теории игр

История развития теории игр

- Предварительный этап («до монографии»)
- 1944 - Теория игр и экономическое поведение (Джон фон Нейман и Оскар Моргенштерн)
- 1950 г. – Бескоалиционные игры (Джон Нэш)
- 1950 – 1970 гг. – Доминирование «коалиционного подхода» Дж. фон Неймана и О.Моргенштерна
- 1970 – н.в. – развитие «программы Нэша»



История развития теории игр

Предварительный этап («до монографии»)

- «Исследование математических принципов теории богатства» (А. Курно, 1838)
- Работы Бертрана, Лаунхарда, Эджуорта (экономисты XIX века)
- «О применении теории множеств к теории шахматной игры» (Е. Цермело, 1913)
- «Теория игр и интегральные уравнения с кососимметричными ядрами» (Э. Борель, 1921)
- «Определения теории игр и преследования» (Штейнгауз, 1925)
- «Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unendliche» (Д. Кениг, 1927)
- «К теории стратегических игр» (Дж. фон Нейман, 1928)



История развития теории игр

- 1944 г. – Теория игр и экономическое поведение (Джон фон Нейман и Оскар Моргенштерн)
 - Новый инструментарий для математического анализа экономических процессов
 - Игры с нулевой суммой
 - Коалиционные игры
- 1950 г. – Бескоалиционные игры (Джон Нэш)
 - Равновесие по Нэшу
 - Бескоалиционные игры
 - «Программа Нэша»





История развития теории игр

- 1950 – 1970 гг. – Доминирование «коалиционного подхода» Дж. фон Неймана и О.Моргенштерна
 - Теория игр как стратегическое оружие «холодной» войны. Разработки РЭНД-Корпорэйшн.
 - «Золотой век» теории игр
 - Разочарования (сложность практического применения; цинизм)
- 1970 – н.в. – развитие «программы Нэша»
 - Равновесие по Нэшу – базовая концепция теории игр
 - Повсеместное использование в экономике. Работы Р. Зельтена и Дж.Харшаньи – Нобелевская премия по экономике 1994 г. (+Дж.Нэш)



Классификация игр и формы их
представления Лекция 1

Связь теории игр с другими дисциплинами

*Теория игр – математическая теория
анализа стратегического поведения/
взаимодействия сторон/ конфликтов:*

1. Математическая теория – использует
инструментарий математических наук
2. Сфера применения – чрезвычайно широка, в т.ч.
взаимодействие индивидуумов (групп индивидуумов)
– область общественных (социальных) наук

Теория игр объясняет логику рационального
поведения индивидуумов в условиях конфликта
интересов



Классификация игр и формы их
представления Лекция 1

Связь теории игр с другими дисциплинами

Смежные математические науки

1. Теория принятия решений – в рамках анализа экстенсивной формы игры
2. Теория вероятностей / математическая статистика - в рамках анализа «игр с природой»
3. Линейная (векторная) алгебра – в рамках использования матричного подхода для нормальной формы игры и вектора выигрышей игр с большим числом игроков
4. Теория множеств – в рамках доказательства теорем теории игр (в т.ч. центральной – о минимаксе)
5. Исследование операций – теория игр как частный случай оптимизации работы системы из n -игроков, что изучается в рамках исследования операций



Классификация игр и формы их представления Лекция 1
Связь теории игр с другими дисциплинами

Смежные общественные науки

1. Теория рационального выбора – в рамках определения рациональности поведения участников игры
2. Теория социального и общественного выбора – в рамках анализа механизма формирования и распада коалиций
3. Теория прав собственности (теория контрактов) – в рамках определения правил игры
4. Экспериментальная экономика – в рамках проверки положений теории игр



Классификация игр и формы их

представления Лекция 1

Применение теории игр к анализу международных отношений и в политологии

Международные отношения

- Контроль над вооружениями. Разоруженческая проблематика
- Анализ военно-политических конфликтов
- Политика устрашения (угрозы)
- Соблюдение международных соглашений
- Ведение международных переговоров

Работы:

- «Стратегия конфликта» (Томас Шеллинг, 1960 г.)



Классификация игр и формы их

представления Лекция 1

Применение теории игр к анализу международных отношений и в политологии

Политология

- Прогноз итогов голосования
- Оптимизация предвыборной платформы при известном политическом спектре избирателей
- Парламентские (политические) коалиции
- Анализ процесса принятия решений в коллегиальных органах (с учетом квот)

Работы:

- «Теория игр и политическая теория» (Петер Ортешук, 1986 г.)



Ограничения применения теории

ИГР

Теория игр – инструмент анализа (и лишь в редких случаях – решения) конфликтных ситуаций между двумя и более сторонами

- В теории игр ситуация оптимизируется лишь по одному критерию (выигрышу), в реальности – решение ищется во многокритериальном пространстве
- Неполная информация о реальном количестве игроков, об участии игроков сразу в нескольких играх, о выигрыше противника
- Сложность количественной оценки выигрышей при построении матрицы игры
- В реальности рациональность выбора людей носит ограниченный характер, зависит от убеждений, моральных норм, обстоятельств



Классификация игр и формы их
представления Лекция 1

Ограничения применения теории игр

- На принятие решения влияют не только сами лидеры, но и группы экспертов, окружение (фактически решения принимаются не теми лицами, кто формально отвечает за это)
- Роль «человеческого» фактора при реализации решений, принятых на высоком уровне
- Техническая сложность решения игр в чистых стратегиях при большом числе стратегий (например, шахматы)
- Техническая сложность решения игр в смешанных стратегиях при числе стратегий свыше 10 (невозможность обработки данных в стандартных математических программах)
- Игры с числом игроков $n \geq 5$ или более имеют строгое математическое решение лишь в частных случаях



Классификация игр и формы их представления Лекция 1

Структура курса

- РАЗДЕЛ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР
- РАЗДЕЛ 2. ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ АНАЛИЗ МО
- РАЗДЕЛ 3. ТЕОРИЯ ИГР И ПОЛИТОЛОГИЯ
- РАЗДЕЛ 4. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ИГР В ЭКОНОМИКЕ



Классификация игр и формы их представления Лекция 1

Структура курса

•РАЗДЕЛ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР

- Лекция 1. Классификация игр и формы их представления
- Лекция 2. Решение бескоалиционных игр в чистых стратегиях
- Лекция 3. Игры в смешанных стратегиях



Классификация игр и формы их представления Лекция 1

Структура курса

•РАЗДЕЛ 2. ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ АНАЛИЗ МЕЖДУНАРОДНЫХ ОТНОШЕНИЙ

- Лекция 4. Простые игровые модели международных конфликтов
- Лекция 5. Игры с неполной информацией и дезинформацией
- Лекция 6. Динамические модели переговоров



Классификация игр и формы их представления Лекция 1

Структура курса

•РАЗДЕЛ 3. ТЕОРИЯ ИГР И ПОЛИТОЛОГИЯ

- Лекция 7. Применение теории игр к анализу выборов и голосования в коллективных органах

•РАЗДЕЛ 4. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ИГР В ЭКОНОМИКЕ

- Лекция 8. Модели конкуренции и оптимизация сотрудничества



Классификация игр и формы их представления Лекция 1

Структура курса

ФОРМЫ ПРОВЕДЕНИЯ ЗАНЯТИЙ:

- Изложение теоретических основ (не менее 20-30 мин)
- Решение количественных примеров и задач
- Проведение аудиторных экспериментов
- Индивидуальные доклады по биографии и обзору работ основоположников теории игр
- Теоретико-игровой анализ реальных международных и внутриполитических ситуаций (кейсов)
- Самостоятельный теоретико-игровой анализ международной или внутриполитической ситуации (на выбор)



Литература

- Нетехническое введение в теорию игр
 - Низкий уровень сложности
 - Высокий уровень сложности
- Применение теории игр в политологии и международных отношениях
 - Низкий уровень сложности
 - Высокий уровень сложности



Литература

Нетехническое введение в теорию игр:

- Низкий уровень сложности
- Вильямс Дж.Д. Совершенный стратег или букварь по теории стратегических игр. – М.: Советское радио, 1960. – 269 с.
- Данилов В. Лекции по теории игр. - М.: РЭШ, 2002. – 140 с.
- Печерский С.Л., Беляева А.А. Теория игр для экономистов. - СПб., 2001. – 253 с.

- Высокий уровень сложности
- Льюис Р.Д., Райфа Х. Игры и решения. – М.: ИЛ, 1961. – 642 с.
- Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. – М.: Мир, 1985. – 200 с.
- Davis Morton D. Game Theory: a Nontechnical Introduction. – Dover Publications, 1997.

стратегиях

Содержание лекции 2

1. Типы игр и их взаимосвязь
2. Нормальная форма представления игры
3. Описание игры в виде графа
4. Исключение заведомо слабых стратегий (итерационное доминирование).
5. Выбор оптимального ответного хода (BR).
6. Принцип минимакса.
7. Седловые точки и равновесие по Нэшу



Типы игр и их взаимосвязь

В зависимости от выигрыша (проигрыша):

- *Игры с нулевой (постоянной) суммой* - выигрыш одной стороны равен проигрышу другой
 - Парные игры с нулевой суммой – антагонистические
 - Безобидные (честные) игры – средний выигрыш каждого игрока при разумном поведении = 0
- *Игры с ненулевой (переменной) суммой* – сумма выигрышей всех игроков не равна константе, а меняется в зависимости от выбора стратегий



Типы игр и их взаимосвязь

В зависимости от выигрыша (проигрыша):

- *Игры с нулевой (постоянной) суммой* – встречаются крайне редко
 - «Чистые конфликты»
 - Локальные столкновения в ходе вооруженных конфликтов
 - Спортивные соревнования
- *Игры с ненулевой (переменной) суммой* – основная часть жизненных ситуаций
 - Игроки имеют как противоположные, так и общие интересы
 - Война (не использовать запрещенные виды оружия, обмен военнопленными)



Типы игр и их взаимосвязь

В зависимости от характера взаимодействия между игроками:

- *Кооперативные (коалиционные) игры* – игроки могут объединяться в группы, беря на себя некоторые обязательства перед другими игроками и координируя свои действия, в т.ч. на основе предварительных договоренностей (и торга)
- *Некооперативные (бескоалиционные) игры* – каждый играет за себя – на практике распространены гораздо шире



Типы игр и их взаимосвязь

В зависимости от цели:

- *Игры качества* - для каждой из сторон исход игры фактически двузначен – да или нет (победил-проиграл)
- *Игры степени* - желательность исхода игры определяется значением численного параметра (плата, выигрыш)

Дискретные игры - выбор производится не из непрерывного множества допустимых значений, а из заданного набора отдельных альтернатив



Типы игр и их взаимосвязь

В зависимости от числа ходов:

- *Одномоментные игры* – в основном рассматриваются в теории игр
- *Многоходовые игры* – при их анализе используется дерево игры

Конечные игры – игры с конечным числом ходов и конечным числом чистых стратегий на каждом ходе

Бесконечные игры – игры, в которых игроки имеют бесконечное число чистых стратегий для выбора

Любую последовательность ходов можно представить как одномоментный выбор стратегии поведения



*Решение бескоалиц. игр в чистых
стратегиях Лекция 2*

Нормальная форма представления игры

*Платежная матрица (матрица выигрышей) -
представление игры в нормальной форме*

Каждый элемент матрицы представляет собой выигрыш первого игрока и проигрыш второго игрока при определенной ситуации (в играх с нулевой суммой)



Нормальная форма представления игры

Пример 1:

- Игроют 2 человека, показывают от 1 до 3 пальцев
- Если общее число пальцев четное – выиграл 1-й игрок, его выигрыш (проигрыш 2-го игрока) равен числу пальцев
- Если сумма пальцев нечетная - выиграл 2-й игрок, его выигрыш (проигрыш 1-го игрока) равен числу пальцев
- В матрицу 3×3 записывается сумма выигрыша (проигрыша)
- Это игра с нулевой суммой у каждого игрока по 3 стратегии: показать 1 палец, 2 или 3



Решение бескоалиц. игр в чистых

стратегиях Лекция 2

Нормальная форма представления игры

Пример 1:

2-й игрок

1-й игрок

2	-3	4
-3	4	-5
4	-5	6



Нормальная форма представления игры

Пример 2:

- Игроют 2 человека, бросают игральную кость (кубик)
- Если общее число очков четное – выиграл 1-й игрок, его выигрыш (проигрыш 2-го игрока) равен сумме очков
- Если сумма очков нечетная - выиграл 2-й игрок, его выигрыш (проигрыш 1-го игрока) равен сумме очков
- В матрицу 6×6 записывается сумма выигрыша (проигрыша)
- Это игра с нулевой суммой, у каждого игрока по 6 стратегий



Решение бескоалиц. игр в чистых

стратегиях Лекция 2

Нормальная форма представления игры

Пример 2:

2-й игрок

1-й игрок

2	-3	4	-5	6	-7
-3	4	-5	6	-7	8
4	-5	6	-7	8	-9
-5	6	-7	8	-9	10
6	-7	8	-9	10	-11
-7	8	-9	10	-11	12



Описание игры в виде графа

*Стратегия – вся последовательность ходов игры
Вильямс: Это план, настолько исчерпывающий, что
он не может быть нарушен действиями противника
или природы*

*Позиционное (развернутое) представление игры -
альтернатива нормальной формы*

*Дерево игры - развернутая (экстенсивная) форма
представления многоходовой игры, где каждая
вершина соответствует ситуации выбора игроком
своей стратегии*



Описание игры в виде графа

Информационное множество (information set) – при выборе игроком своего хода он может не знать, в какой позиции игры он находится, потому что не знает, какой ход был сделан противником на предыдущем этапе (ах). Информационное множество – совокупность таких «неразличимых» позиций. Ходы, возможные в этих позициях, одинаковы.



Итерационное доминирование

Исключение заведомо слабых стратегий игроков
- просматриваются все строки (для 1-го игрока)
матрицы и вычеркиваются те, в которых **все**
соответствующие элементы меньше, чем в хотя бы
одной другой строке

Аналогично рассуждает и второй игрок, с той
разницей, что он выбирает **столбцы**, а не строки и
стремится уменьшить, а не увеличить выигрыш
первого игрока.



Итерационное доминирование

После того как вычеркнуты некоторые столбцы, надо опять повторить эту процедуру, так как строки стали другими и могло измениться соотношение между ними. При просмотре опять могут быть выявлены «заведомо слабые» стратегии первого игрока. Соответственно и анализ столбцов потом придется повторить.

Повторение одноступенчатых шагов, которые в математике называют *итерациями*, - **итерационное доминирование**



Итерационное доминирование

	2-й игрок	
1-й игрок	1	2
	3	4

Пример 3:

$$1 < 3 \text{ и } 2 < 4$$

Первый игрок в любом случае получит больше, если выберет вторую стратегию, независимо от выбора второго игрока.

Первая строка строго доминируется второй

Итерационное доминирование

Пример 4:

	2-й игрок				
1-й игрок	1	2	3	4	→
	8	7	9	5	
	9	10	11	4	

- Элементы 1-й строки < элементов 2-й строки. Поэтому 1-я стратегия заведомо хуже 2-й и ее можно исключить (вычеркнуть 1-ю строку)
- Элементы 3-го столбца > элементов любого другого столбца. Поэтому 3-я стратегия 2-го игрока заведомо невыгодна (вычеркиваем 3-й столбец)

↓

8	7	5
9	10	4



Решение бескоалиц. игр в чистых

стратегиях Лекция 2

Выбор оптимального ответного хода (BR)

- Один из игроков уже сделал выбор, его знает противник и исходя из этой информации делает свой выбор.

Задача выбора оптимального ответного хода - *BR (best response)*

- Если известен выбор 2-го игрока, то 1-му достаточно просмотреть только один столбец матрицы, соответствующий номеру выбранной стратегии 2-го игрока, и выбрать ту строку, где стоит максимальный в данном столбце элемент

Москва-2008



Выбор оптимального ответного хода (BR)

2-й игрок

	0	2	0	1	0
1	2	3	4	5	
6	7	8	9	0	
<u>9</u>	5	3	4	1	
7	6	5	4	3	

1-й игрок

Пример 5:

Если известно, что 2-й игрок выбрал 1-ю стратегию, то достаточно посмотреть лишь 1-й столбец матрицы и найти в нем максимальный элемент. Это число 9, стоящее в 4-й строке. Значит оптимальным ответным ходом (BR) 1-го игрока является 4-я стратегия.



Принцип минимакса

- Каждый игрок в теории игр – сторонник гарантированного выигрыша (рациональный выбор)
- Просмотрев \min для всех строк матрицы, 1-й игрок выбирает ту строку, где это число \max . Это гарантированный выигрыш, не зависящий от выбора 2-го игрока. Если повезет – можно выиграть и больше, но меньше нельзя в принципе



Принцип минимакса

- Поскольку эта процедура связана сначала с нахождением \min строк, а потом \max среди них, то рассмотренный принцип решения игр называется **принципом максимина или минимакса** (ведь 2-й игрок сначала находит максимумы во всех столбцах матрицы и потом из них выбирает минимальный).
- Выбранные таким образом стратегии игроков называются соответственно **максиминными и минимаксными**. Из-за благозвучности чаще используется термин «**принцип минимакса**», а не максимина



Принцип минимакса

	2-й игрок	
1-й игрок	1	2
	3	4

Пример 6:

- В 1-й строке минимум равен 1, во 2-й – 2. Поэтому рациональный выбор 1-го игрока соответствует 2-й стратегии
- В 1-м столбце максимум равен 3, во 2-м - 4. Поэтому минимаксная стратегия 2-го игрока – это 1-я стратегия.
- Таким образом, первый игрок выберет вторую стратегию, второй – первую.
- **НО!** Если 2-й игрок узнает, что 1-й выбрал свою 2-ю стратегию, ему выгоднее ответить своей 2-й



Принцип минимакса

Пример 6:

- В данном случае минимаксные стратегии неустойчивы и игра не решается в чистых стратегиях.
- Нельзя сказать, чему равен выигрыш 1-го игрока (он называется *ценой игры*), но можно вычислить границы интервала, в котором он находится.
- *Нижней ценой игры* называется максимальное значение минимумов строк (в примере она равна 2),
- *Верхней ценой игры* называют минимальное значение максимумов столбцов (в примере это 3).
- Если верхняя и нижняя цена игры совпадают, то игра решается в чистых стратегиях. В противном случае ищется решение в смешанных стратегиях, причем цена игры всегда оказывается между ее нижней и верхней ценами.



Седловые точки и равновесие по Нэшу

- Элемент матрицы игры, стоящий на пересечении минимаксных строки и столбца, принято называть при устойчивых минимаксных стратегиях *седловой точкой*.
- Это название связано с тем, что данный элемент одновременно является минимальным в своей строке и максимальным – в столбце.
- Из условия минимума по строке и максимума в столбце следует единственность числа в седловой точке. То есть самих таких точек может быть несколько, но выигрыш в них один и тот же. Поэтому для игроков они равноценны.



Седловые точки и равновесие по Нэшу

- Именно с проверки на наличие седловой точки рекомендуется начинать анализ игры, представленной в нормальной форме. При ее наличии сразу получается решение игры – устойчивые минимаксные стратегии обоих игроков и значение цены игры.
- Если такой точки нет, то делается вывод, что игра не решается в чистых стратегиях. Тогда применяется итерационное доминирование и методы решения игры в смешанных стратегиях.



Седловые точки и равновесие по Нэшу

- Именно с проверки на наличие седловой точки рекомендуется начинать анализ игры, представленной в нормальной форме. При ее наличии сразу получается решение игры – устойчивые минимаксные стратегии обоих игроков и значение цены игры.
- Если такой точки нет, то делается вывод, что игра не решается в чистых стратегиях. Тогда применяется итерационное доминирование и методы решения игры в смешанных стратегиях.



Седловые точки и равновесие по Нэшу

- В биматричных играх (играх с ненулевой суммой) нет минимаксных стратегий и самого понятия цены игры, потому что выигрыш 2-го игрока может быть и не связан с выигрышем 1-го игрока.
- **НО** существует нечто похожее на понятие седловой точки: если в некотором столбце матрицы 1-го игрока имеется максимум в некоторой точке и в матрице 2-го игрока строка, проходящая через аналогичную точку, тоже имеет максимум именно в этой точке, то обоим игрокам выгодно придерживаться стратегий, соответствующих номерам строки и столбца этой точки. Данную пару или *набор стратегий* принято называть *устойчивыми по Нэшу*



Седловые точки и равновесие по Нэшу

- Устойчивость по Нэшу определена и при числе игроков более 2.

Это такой набор стратегий, при котором ни одному из игроков не выгодно менять стратегию при условии, что остальные игроки будут придерживаться своей прежней стратегии.

Игры в смешанных стратегиях

Содержание лекции 3

1. Частота применения разных стратегий
2. Матричный метод определения оптимальных смешанных стратегий и цены игры для игр 2×2 .
3. Графический метод решения игр $2 \times m$ и $3 \times m$.



Частота применения разных стратегий

- Большинство игр с нулевой суммой не поддается решению в чистых стратегиях.
- Иногда возможно уменьшить матрицу игры путем исключения доминируемых и дублирующих стратегий (если удалось ее свести к одной строке или одному столбцу - игра решена в чистых стратегиях даже без использования принципа минимакса и нахождения седловой точки)
- Приходится признать, что ни одна из чистых стратегий не является оптимальной.

В ТАКИХ СЛУЧАЯХ:

- Необходимо чередовать стратегии в определенной пропорции. Решением игры в этом случае является как раз такая пропорция.



Частота применения разных стратегий

- Если у игрока 3 чистых стратегии и мы после определенных расчетов говорим – ему надо использовать эти стратегии в пропорции 5:1:4.
- Могут стоять любые натуральные числа или даже ноль.
- В последнем случае говорят, что соответствующая стратегия не используется в смеси стратегий и является *неактивной*.
- Те же, которые используются, называют *активными стратегиями*.
- Поведение игрока, связанное с чередованием его стратегий, называют *смешанной стратегией*.



Частота применения разных стратегий

- **Основная теорема теории игр** (теорема Неймана, теорема о минимаксе): *Любая парная игра с нулевой суммой имеет решение в чистых или смешанных стратегиях.*
- Это решение определяет оптимальные минимаксные стратегии игроков и цену игры.
- Использование любой другой стратегии в среднем менее выгодно каждому из игроков.
- Цена игры всегда находится между нижней и верхней ценой матрицы игры.
- Решение в чистых стратегиях – это частный случай решения в смешанных стратегиях (когда в смеси активна лишь одна стратегия).



Частота применения разных стратегий

- Если смешанная стратегия выражена в виде пропорции, то стоящие в ней числа называют *относительными частотами применения стратегий*.
- Другой способ задания смешанной стратегии - через *вероятности реализации чистых стратегий*. Их легко рассчитать по известным относительным частотам. Пусть например задана смесь 4-х стратегий в виде пропорции $N_1: N_2: N_3: N_4$. Тогда вероятность реализации первой стратегии равна: **$p_1 = N_1 / (N_1 + N_2 + N_3 + N_4)$**
- Аналогично рассчитываются и остальные 3 вероятности p_2, p_3, p_4 .
- Естественно, что сумма всех вероятностей в этом случае равна 1.



Частота применения разных стратегий

- Если действия по реализации стратегий производятся многократно, то вполне достаточно буквального использования относительных частот. В этом случае существует риск того, что противник просчитает следующий ход.
- Поэтому в теории игр обычно используется другой способ, который в принципе исключает возможность знать следующий ход. Он основан на вероятностном подходе и связан с использованием *датчика случайных чисел*: компьютерной программы, бросания монетки или игральной кости.
- Любые вычислительные методы, использующие датчик случайных чисел, принято называть *методами Монте-Карло*. По методу Монте-Карло можно реализовать смешанную стратегию даже в Москве, 2008 *одноходовой игре*, которую обычно и рассматривают



Матричный метод определения смешанных стратегий и цены игры

Пример 1. Игра «наступление-оборона»

- Обороняющая сторона защищает 2 объекта, причем один из них в 3 раза важнее другого. Сил достаточно только на охрану одного из объектов, причем при нападении на охраняемый объект побеждает оборона. У нападения тоже сил достаточно только для атаки одного объекта.
 - Какой из объектов надо охранять и на какой надо нападать?
-

- Типичная парная игра 2×2 .
- Первая стратегия обороны – защитить важный объект, вторая – защитить не важный.



Матричный метод определения смешанных стратегий и цены игры

Пример 7. Игра «наступление-оборона»

Элементы матрицы равны суммарной важности уцелевших после нападения объектов.

Ищем минимаксные стратегии и седловую точку. Седловой точки нет, хотя у второго игрока даже 2 минимаксные стратегии. Нижняя цена игры равна 3, верхняя – 4. Чтобы найти решение в смешанных стратегиях, в случае произвольной матрицы 2x2 надо просто вычесть второй столбец

2-й игрок –
нап.

	4	3
1-й игрок – оборона	1	4

↓

1
-3



Матричный метод определения смешанных стратегий и цены игры

Пример 7. Игра «наступление-оборона»

Отношение двух полученных разностей (независимо от их знаков) равно оптимальному соотношению применения 1-м игроком 2-й и 1-й стратегий.

1
-3

Обратим внимание – отношение первой разности ко второй равно отношению частот именно 2-й и 1-й стратегий в оптимальной смеси.



Матричный метод определения смешанных стратегий и цены игры

Пример 7. Игра «наступление-оборона»

- Аналогично вычитают 2-ю строку исходной матрицы из первой, отношение полученных разностей задает оптимальное отношение частоты применения вторым игроком его второй и первой стратегий. Разность строк дает: $(3 - 1)$, значит у нападения относительные частоты применения чистых стратегий 1:3.

3	-1
---	----

Обороне надо использовать стратегии с частотами 3:1, то есть в 3 раза чаще охранять важный объект. Нападать надо чаще на менее важный объект



Матричный метод определения смешанных стратегий и цены игры

Пример 7. Игра «наступление-оборона»

- Аналогично вычитают 2-ю строку исходной матрицы из первой, отношение полученных разностей задает оптимальное отношение частоты применения вторым игроком его второй и первой стратегий. Разность строк дает: $(3 - 1)$, значит у нападения относительные частоты применения чистых стратегий 1:3.

3	-1
---	----

Обороне надо использовать стратегии с частотами 3:1, то есть в 3 раза чаще охранять важный объект. Нападать надо чаще на менее важный объект



Графический метод решения игр

- Графический метод - построение графиков зависимости выигрыша от пропорции, в которой смешаны 2 стратегии 1-го игрока
- Применим не только к играм 2×2 , но и к играм, в которых у 2-го игрока число стратегий $m > 2$ (игры $2 \times m$).



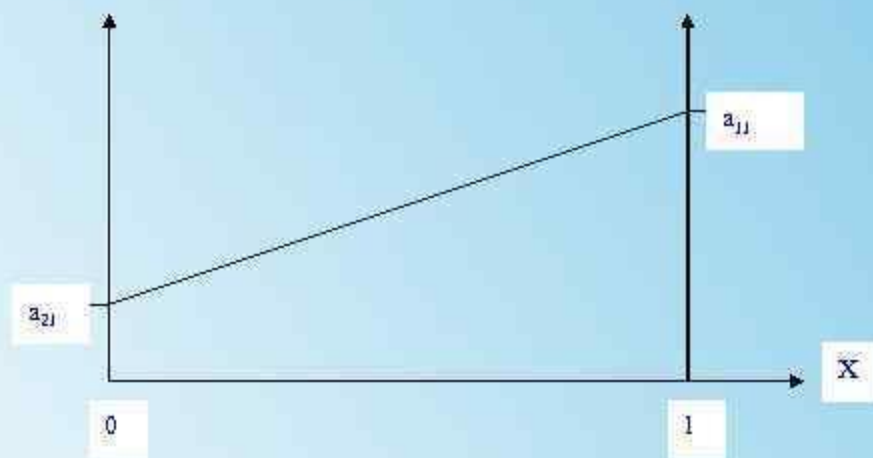
Графический метод решения игр

- Рассмотрим матрицу игры a_{ij} размерности $2 \times m$.
- Пусть у 1-го игрока доля (вероятность) первой стратегии в смеси равна x , тогда доля второй $(1-x)$.
- Если 2-й игрок использует чистую первую стратегию, то выигрыш первого составит:

$$x \cdot a_{11} + (1-x) \cdot a_{21} = a_{21} + (a_{11} - a_{21})x$$

Графический метод решения игр

На графике этой функции соответствует прямая, у которой ордината равна a_{21} при $x=0$ и a_{11} при $x=1$:





Графический метод решения игр

- Если у второго игрока 3 стратегии ($m = 3$), то на таком графике будет 3 линии.
- Каждая из них строится аналогично – на левой оси откладывается значение a_{2j} , а на правой a_{1j} .



Графический метод решения игр

Пример 8

4	7	1
2	1	5

Задана матрица игры, необходимо решить игру графическим методом.

- Слева на графике откладывают числа со второй строки матрицы (2,1,5), справа – с первой (4,7,1).



Графический метод решения игр

Пример 8

- Противник выберет такие стратегии, чтобы ваш выигрыш был меньше. На графике этому соответствует нижняя ломаная линия из трех отрезков.
- А вы выберете на ней максимум (откуда опущен пунктир на ось). Абсцисса этой точки соответствует оптимальной доле первой стратегии x для первого игрока, а ее ордината равна цене игры.





Графический метод решения игр

- Оптимальная смесь стратегий 2-го игрока определяется потом путем дополнительных расчетов, хотя сразу можно сказать, что противнику следует использовать только те стратегии, линии которых проходят через выделенную точку (первая и третья в данном случае).
- Поэтому можно просто вычеркнуть второй столбец из матрицы и для оставшейся матрицы 2×2 найти решение.



Игры в смешанных стратегиях

Лекция 3

Графический метод решения игр

Игры $3 \times n$

Игры $3 \times n$ (у 1-го игрока 3 стратегии) решаются аналогично в трехмерном пространстве.

При этом каждой чистой стратегии 2-го игрока теперь соответствует не прямая, а плоскость. Эти плоскости образуют конструкцию типа крыши и надо сначала выделить самую нижнюю «крышу», а потом найти координаты ее верхней точки.



Графический метод решения игр

Функция «Поиск решения» (EXCEL)

Программа EXCEL, меню «Сервис», функция «Поиск решения»

Пример 9

Пусть у первого игрока n стратегий, а у второго m . Надо найти оптимальные доли стратегий p_i в их смеси для первого игрока.

• Обозначим цену игры v , тогда при использовании противником любой из его m стратегий выигрыш первого игрока будет не меньше v . Выразив этот выигрыш через p_i и элементы матрицы игры, получим соответствующие m неравенств вида:

$$a_{1j} p_1 + a_{2j} p_2 + \dots + a_{nj} p_n \geq v$$



Графический метод решения игр

Функция «Поиск решения» (EXCEL)

Пример 9

Если обе части разделить на v и обозначить $x_j = p_j/v$, то неравенства преобразуются к виду:

$$a_{1j} x_1 + a_{2j} x_2 + \dots + a_{nj} x_n \geq 1 \quad (1)$$

Кроме того должно выполняться условие на сумму всех долей:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1,$$

которое для переменных x имеет вид:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1/v. \quad (2)$$



Графический метод решения игр

Функция «Поиск решения» (EXCEL)

Пример 9

- Так как 1-й игрок стремится повысить цену игры, последнюю сумму можно рассматривать как функцию цели и решать задачу по нахождению оптимальных значений переменных x_j , на которые наложено ограничение (1).
- С этой целью на рабочем листе EXCEL для каждой переменной x_j заводим по ячейке и записываем туда некоторые начальные значения, соответствующие ограничениям (1). Например, это могут быть просто нули и единицы.
- После этого в одной из ячеек задаем $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ и указываем имя этой ячейки в меню «Поиск решения» на месте функции цели. Указываем также поиск минимума функции.



Графический метод решения игр

Функция «Поиск решения» (EXCEL)

Пример 9

- Задаем платежную матрицу на рабочем листе и через имена соотв. ячеек выражаем ограничения на значения x .
- Для этого заводим ячейки на рабочем листе для вычисления левых частей неравенств (1), после чего в «Поиске решения» указываем в левой части имена этих ячеек, потом знак \geq , потом в правой части 1.
- Указывается также ограничение на знак величин $x_j \geq 0$, при этом опять в левой части указывается только имя ячейки, соответствующей x_j .
- Далее дается команда «Найти» и в ячейках для x_j появляются оптимальные значения.



Графический метод решения игр

Функция «Поиск решения» (EXCEL)

Пример 9

- Сумма оптимальных значений позволяет найти цену игры, пользуясь (2), после чего находятся и сами оптимальные доли стратегий в смеси $p_j = x_j^* / v$.
- Аналогично находится оптимальная смесь стратегий 2-го игрока, только теперь потребуется максимизировать функцию цели.