МГИМО

Лекция 1

Классификация игр и формы их представления

Содержание лекции 1

1. История развития теории игр
2. Связь теории игр с другими дисциплинами
3. Применение теории игр к анализу международных отношений и в политологии
4. Ограничения применения теории игр
5. Структура курса
6. Литература по теории игр

История развития теории игр

- Предварительный этап («до монографии»)
- 1944 - Теория игр и экономическое поведение (Джон фон Нейман и Оскар Моргенштерн)
- 1950 г. – Бескоалиционные игры (Джон Нэш)
- 1950 – 1970 гг. – Доминирование «коалиционного подхода» Дж. фон Неймана и О.Моргенштерна
- 1970 – н.в. – развитие «программы Нэша»

История развития теории игр

<u>Предварительный этап («до монографии»)</u>

- «Исследование математических принципов теории богатства» (А.Курно, 1838)
- Работы Бертрана, Лаунхарда, Эджуорта (экономисты XIXвека)
- «О применении теории множеств к теории шахматной игры» (Е.Цермело, 1913)
- «Теория игр и интегральные уравнения с кососимметричными ядрами» (Э.Борель,1921)
- «Определения теории игр и преследования» (Штейнгауз, 1925)
- «Über eine Schlussweisse aus dem Endlichen ins Unedliche» (Д.Кениг, 1927)
- «К теории стратегических игр» (Дж. фон Нейман, 1928)

История развития теории игр

- <u>1944 г. – Теория игр и экономическое поведение</u> (Джон фон Нейман и Ос Моргенштерн)
  - Новый инструментарий для математического анализа экономических процессов
  - Игры с нулевой суммой
  - Коалиционные игры

- <u>1950 г. – Бесконалиционные игры (Дж Нэш)</u>
  - Равновесие по Нэшу
  - Бескоалиционные игры
  - «Программа Нэша»

История развития теории игр

- 1950 – 1970 гг. – Доминирование «коалиционного подхода» Дж. фон Неймана и О.Моргенштерна
  - Теория игр как стратегическое оружие «холодной» войны. Разработки РЭНД-Корпорэйшн.
  - «Золотой век» теории игр
  - Разочарования (сложность практического применения; цинизм)
- 1970 – н.в. – развитие «программы Нэша»
  - Равновесие по Нэшу – базовая концепция теории игр
  - Повсеместное использование в экономике. Работы Р. Зельтена и Дж.Харшаньи – Нобелевская премия по экономике 1994 г. (+Дж.Нэш)

Связь теории игр с другими дисциплинами

Теория игр – *математическая теория анализа стратегического поведения/ взаимодействия сторон/ конфликтов:*

1. Математическая теория – *используeт инструментарий <u>математических наук</u>*

2. Сфера применения – чрезвычайно широка, в т.ч. взаимодействие индивидуумов (групп индивидуумов) – область <u>общественных (социальных) наук</u>

Теория игр объясняет логику рационального поведения индивидуумов в условиях конфликта интересов

Связь теории игр с другими дисциплинами

Смежные математические науки

1. Теория принятия решений – в рамках анализа экстенсивной формы игры

2. Теория вероятностей / математическая статистика - в рамках анализа «игр с природой»

3. Линейная (векторная) алгебра – в рамках использования матричного подхода для нормальной формы игры и вектора выигрышей игр с большим числом игроков

4. Теория множеств – в рамках доказательства теорем теории игр (в т.ч. центральной – о минимаксе)

5. Исследование операций – теория игр как частный случай оптимизации работы системы из n-игроков, что изучается в рамках исследования операций

Связь теории игр с другими дисциплинами

Смежные общественные науки

1. Теория рационального выбора – в рамках определения рациональности поведения участников игры

2. Теория социального и общественного выбора – в рамках анализа механизма формирования и распада коалиций

3. Теория прав собственности (теория контрактов) – в рамках определения правил игры

4. Экспериментальная экономика – в рамках проверки положений теории игр

Применение теории игр к анализу международных отношений и в политологии

Международные отношения

- Контроль над вооружениями. Разоруженческая проблематика
- Анализ военно-политических конфликтов
- Политика устрашения (угрозы)
- Соблюдение международных соглашений
- Ведение международных переговоров

Работы:

- «Стратегия конфликта» (Томас Шеллинг, 1960 г.)

Применение теории игр к анализу международных отношений и в политологии

Политология

- Прогноз итогов голосования
- Оптимизация предвыборной платформы при известном политическом спектре избирателей
- Парламентские (политические) коалиции
- Анализ процесса принятия решений в коллегиальных органах (с учетом квот)

Работы:

- «Теория игр и политическая теория» (Петер Ортешук, 1986 г.)

Ограничения применения теории игр

Теория игр – **инструмент анализа** (и лишь **в редких случаях – решения**) конфликтных ситуаций между двумя и более сторонами

- В теории игр ситуация оптимизируется лишь по одному критерию (выигрышу), в реальности – решение ищется во многокритериальном пространстве
- Неполная информация о реальном количестве игроков, об участии игроков сразу в нескольких играх, о выигрыше противника
- Сложность количественной оценки выигрышей при построении матрицы игры
- В реальности рациональность выбора людей носит ограниченный характер, зависит от убеждений, моральных норм, обстоятельств

Ограничения применения теории игр

- На принятие решения влияют не только сами лидеры, но и группы экспертов, окружение (фактически решения принимаются не теми лицами, кто формально отвечает за это)
- Роль «человеческого» фактора при реализации решений, принятых на высоком уровне
- Техническая сложность решения игр в чистых стратегиях при большом числе стратегий (например, шахматы)
- Техническая сложность решения игр в смешанных стратегиях при числе стратегий свыше 10 (невозможность обработки данных в стандартных математических программах)
- Игры с числом игроков 5 и более имеют строгое математическое решение лишь в частных случаях

Структура курса

- РАЗДЕЛ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР
- РАЗДЕЛ 2. ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ АНАЛИЗ МО
- РАЗДЕЛ 3. ТЕОРИЯ ИГР И ПОЛИТОЛОГИЯ
- РАЗДЕЛ 4. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ИГР В ЭКОНОМИКЕ

Структура курса

- <u>РАЗДЕЛ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР</u>
  - Лекция 1. Классификация игр и формы их представления
  - Лекция 2. Решение бескоалиционных игр в чистых стратегиях
  - Лекция 3. Игры в смешанных стратегиях

Структура курса

- РАЗДЕЛ 2. ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ АНАЛИЗ МЕЖДУНАРОДНЫХ ОТНОШЕНИЙ
  - Лекция 4. Простые игровые модели международных конфликтов
  - Лекция 5. Игры с неполной информацией и дезинформацией
  - Лекция 6. Динамические модели переговоров

Структура курса

- РАЗДЕЛ 3. ТЕОРИЯ ИГР И ПОЛИТОЛОГИЯ
  – Лекция 7. Применение теории игр к анализу выборов и голосования в коллективных органах

- РАЗДЕЛ 4. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ИГР В ЭКОНОМИКЕ
  – Лекция 8. Модели конкуренции и оптимизация сотрудничества

Структура курса

ФОРМЫ ПРОВЕДЕНИЯ ЗАНЯТИЙ:

•Изложение теоретических основ (не менее 20-30 мин)

•Решение количественных примеров и задач

•Проведение аудиторных экспериментов

•Индивидуальные доклады по биографии и обзору работ основоположников теории игр

•Теоретико-игровой анализ реальных международных и внутриполитических ситуаций (кейсов)

•Самостоятельный теоретико-игровой анализ международной или внутриполитической ситуации (на выбор)

Литература

- Нетехническое введение в теорию игр
  - Низкий уровень сложности
  - Высокий уровень сложности
- Применение теории игр в политологии и международных отношениях
  - Низкий уровень сложности
  - Высокий уровень сложности

Литература

Нетехническое введение в теорию игр:

•Низкий уровень сложности
•Вильямс Дж.Д. Совершенный стратег или букварь по теории стратегических игр. – М.: Советское радио, 1960. – 269 с.
•Данилов В. Лекции по теории игр. - М.: РЭШ, 2002. – 140 с.
•Печерский С.Л., Беляева А.А. Теория игр для экономистов. - СПб., 2001. – 253 с.

•Высокий уровень сложности
•Льюис Р.Д., Райфа Х. Игры и решения. – М.: ИЛ, 1961. – 642 с.
•Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. – М.: Мир, 1985. – 200 с.
•Davis Morton D. Game Theory: a Nontechnical Introduction. – Dover Publications, 1997.

Лекция 2

Решение бескоалиционных игр в чистых стратегиях

Содержание лекции 2

1. Типы игр и их взаимосвязь
2. Нормальная форма представления игры
3. Описание игры в виде графа
4. Исключение заведомо слабых стратегий (итерационное доминирование).
5. Выбор оптимального ответного хода (BR).
6. Принцип минимакса.
7. Седловые точки и равновесие по Нэшу

Типы игр и их взаимосвязь

<u>В зависимости от выигрыша (проигрыша):</u>

- *Игры с нулевой (постоянной) суммой* - выигрыш одной стороны равен проигрышу другой
  - Парные игры с нулевой суммой – *антагонистические*
  - *Безобидные (честные) игры* – средний выигрыш каждого игрока при разумном поведении = 0
- *Игры с ненулевой (переменной) суммой – сумма выигрышей всех игроков не равна константе, а меняется в зависимости от выбора стратегий*

Типы игр и их взаимосвязь

В зависимости от выигрыша (проигрыша):

•*Игры с нулевой (постоянной) суммой* – встречаются крайне редко

– «Чистые конфликты»
– Локальные столкновения в ходе вооруженных конфликтов
– Спортивные соревнования

•*Игры с ненулевой (переменной) суммой – основная часть жизненных ситуаций*

– Игроки имеют как противоположные, так и общие интересы
– Война (не использовать запрещенные виды оружия, обмен военнопленными)

Типы игр и их взаимосвязь

<u>В зависимости от характера взаимодействия между игроками:</u>

•*Кооперативные (коалиционные) игры* – игроки могут объединяться в группы, беря на себя некоторые обязательства перед другими игроками и координируя свои действия, в т.ч. на основе предварительных договоренностей (и торга)

•*Некооперативные (бескоалиционные) игры* – каждый играет за себя – на практике распространены гораздо шире

Типы игр и их взаимосвязь

В зависимости от цели:

- *Игры качества* - для каждой из сторон исход игры фактически двузначен – да или нет (победил-проиграл)
- *Игры степени* - желательность исхода игры определяется значением численного параметра (плата, выигрыш)

Дискретные игры - выбор производится не из непрерывного множества допустимых значений, а из заданного набора отдельных альтернатив

Типы игр и их взаимосвязь

<u>В зависимости от числа ходов:</u>

•*Одномоментные игры* – в основном рассматриваются в теории игр

•*Многоходовые игры* – при их анализе используется дерево игры

Конечные игры – игры с конечным числом ходов и конечным числом чистых стратегий на каждом ходе

Бесконечные игры – игры, в которых игроки имеют бесконечное число чистых стратегий для выбора

Любую последовательность ходов можно представить как одномоментный выбор стратегии поведения

Нормальная форма представления игры

Платежная матрица (матрица выигрышей) - представление игры в нормальной форме

Каждый элемент матрицы представляет собой выигрыш первого игрока и проигрыш второго игрока при определенной ситуации (в играх с нулевой суммой)

Нормальная форма представления игры

Пример 1:

- Играют 2 человека, показывают от 1 до 3 пальцев
- Если общее число пальцев четное – выиграл 1-й игрок, его выигрыш (проигрыш 2-го игрока) равен числу пальцев
- Если сумма пальцев нечетная - выиграл 2-й игрок, его выигрыш (проигрыш 1-го игрока) равен числу пальцев
- В матрицу 3 x 3 записывается сумма выигрыша (проигрыша)
- Это игра с нулевой суммой, у каждого игрока по 3 стратегии: показать 1 палец, 2 или 3

Нормальная форма представления игры

Пример 1:

2-й игрок

1-й игрок

2	-3	4
-3	4	-5
4	-5	6

Нормальная форма представления игры

<u>Пример 2:</u>

- Играют 2 человека, бросают игральную кость (кубик)
- Если общее число очков четное – выиграл 1-й игрок, его выигрыш (проигрыш 2-го игрока) равен сумме очков
- Если сумма очков нечетная - выиграл 2-й игрок, его выигрыш (проигрыш 1-го игрока) равен сумме очков
- В матрицу 6 x 6 записывается сумма выигрыша (проигрыша)
- Это игра с нулевой суммой, у каждого игрока по 6 стратегий

Нормальная форма представления игры

Пример 2:

2-й игрок

1-й игрок

2	-3	4	-5	6	-7
-3	4	-5	6	-7	8
4	-5	6	-7	8	-9
-5	6	-7	8	-9	10
6	-7	8	-9	10	-11
-7	8	-9	10	-11	12

Описание игры в виде графа

Стратегия – вся последовательность ходов игры
Вильямс: Это план, настолько исчерпывающий, что он не может быть нарушен действиями противника или природы

Позиционное (развернутое) представление игры - альтернатива нормальной формы

Дерево игры - развернутая (экстенсивная) форма представления многоходовой игры, где каждая вершина соответствует ситуации выбора игроком своей стратегии

Описание игры в виде графа

Информационное множество (information set) – при выборе игроком своего хода он может не знать, в какой позиции игры он находится, потому что не знает, какой ход был сделан противником на предыдущем этапе (ах). Информационное множество – совокупность таких «неразличимых» позиций. Ходы, возможные в этих позициях, одинаковы.

Итерационное доминирование

Исключение заведомо слабых стратегий игроков - просматриваются все строки (для 1-го игрока) матрицы и вычеркиваются те, в которых **все** соответствующие элементы меньше, чем в хотя бы одной другой строке

Аналогично рассуждает и второй игрок, с той разницей, что он выбирает **столбцы**, а не строки и стремится уменьшить, а не увеличить выигрыш первого игрока.

Итерационное доминирование

После того как вычеркнуты некоторые столбцы, надо опять повторить эту процедуру, так как строки стали другими и могло изменится соотношение между ними. При просмотре опять могут быть выявлены «заведомо слабые» стратегии первого игрока. Соответственно и анализ столбцов потом придется повторить.

Повторение однотипных шагов, которые в математике называют *итерациями*, - **итерационное доминирование**

Итерационное доминирование

2-й игрок

1-й игрок

1	2
3	4

<u>Пример 3:</u>

$1<3$ и $2<4$

Первый игрок в любом случае получит больше, если выберет вторую стратегию, независимо от выбора второго игрока.

Первая строка **<u>строго доминируется</u>** второй

Итерационное доминирование

Пример 4:

2-й игрок

1-й игрок

1	2	3	4
8	7	9	5
9	10	11	4

→

8	7	9	5
9	10	11	4

↓

8	7	5
9	10	4

•Элементы 1-й строки < элементов 2-й строки. Поэтому 1-я стратегия заведомо хуже 2-й и ее можно исключить (вычеркнуть 1-ю строку)

•Элементы 3-го столбца > элементов любого другого столбца. Поэтому 3-я стратегия 2-го игрока заведомо невыгодна (вычеркиваем 3-й столбец)

Выбор оптимального ответного хода (BR)

•Один из игроков уже сделал выбор, его знает противник и исходя из этой информации делает свой выбор.

Задача выбора оптимального ответного хода - *BR* (*best response*)

•Если известен выбор 2-го игрока, то 1-му достаточно просмотреть только один столбец матрицы, соответствующий номеру выбранной стратегии 2-го игрока, и выбрать ту строку, где стоит максимальный в данном столбце элемент

Выбор оптимального ответного хода (BR)

2-й игрок

Пример 5:

1-й игрок

0	2	0	1	0
1	2	3	4	5
6	7	8	9	0
9	5	3	4	1
7	6	5	4	3

Если известно, что 2-й игрок выбрал 1-ю стратегию, то достаточно просмотреть лишь 1-й столбец матрицы и найти в нем максимальный элемент. Это число 9, стоящее в 4-й строке. Значит оптимальным ответным ходом (BR) 1-го игрока является 4-я стратегия.

Принцип минимакса

•Каждый игрок в теории игр – сторонник **гарантированного выигрыша** (рациональный выбор)

•Просмотрев min для всех строк матрицы, 1-й игрок выбирает ту строку, где это число max. Это **гарантированный выигрыш**, не зависящий от выбора 2-го игрока. Если повезет – можно выиграть и больше, но меньше нельзя в принципе

Принцип минимакса

•Поскольку эта процедура связана сначала с нахождением min строк, а потом max среди них, то рассмотренный принцип решения игр называется ***принципом максимина или минимакса*** (ведь 2-й игрок сначала находит максимумы во всех столбцах матрицы и потом из них выбирает минимальный).

•Выбранные таким образом стратегии игроков называются соответственно ***максиминными и минимаксными***. Из-за благозвучности чаще используется термин «***принцип минимакса***», а не максимина

Принцип минимакса

Пример 6:

		2-й игрок	
1-й игрок		1	2
		3	4

- В 1-й строке минимум равен 1, во 2-й – 2. Поэтому рациональный выбор 1-го игрока соответствует 2-й стратегии
- В 1-м столбце максимум равен 3, во 2-м - 4. Поэтому минимаксная стратегия 2-го игрока – это 1-я стратегия.
- Таким образом, первый игрок выберет вторую стратегию, второй – первую.
- **НО!** Если 2-й игрок узнает, что 1-й выбрал свою 2-ю стратегию, ему выгоднее ответить своей 2-й

Принцип минимакса

Пример 6:

- В данном случае *минимаксные стратегии неустойчивы* и *игра не решается в чистых стратегиях*.
- Нельзя сказать, чему равен выигрыш 1-го игрока (он называется *ценой игры*), но можно вычислить границы интервала, в котором он находится.
- *Нижней ценой игры* называется максимальное значение минимумов строк (в примере она равна 2),
- *Верхней ценой игры* называют минимальное значение максимумов столбцов (в примере это 3).
- Если верхняя и нижняя цена игры совпадают, то *игра решается в чистых стратегиях*. В противном случае ищется *решение в смешанных стратегиях*, причем цена игры всегда оказывается между ее нижней и верхней ценами.

Седловые точки и равновесие по Нэшу

•Элемент матрицы игры, стоящий на пересечении минимаксных строки и столбца, принято называть при устойчивых минимаксных стратегиях *седловой точкой.*

•Это название связано с тем, что данный элемент одновременно является минимальным в своей строке и максимальным – в столбце.

•Из условия минимума по строке и максимума в столбце следует единственность числа в седловой точке. То есть самих таких точек может быть несколько, но выигрыш в них один и тот же. Поэтому для игроков они равноценны.

Седловые точки и равновесие по Нэшу

- Именно с проверки на наличие седловой точки рекомендуется начинать анализ игры, представленной в нормальной форме. При ее наличии сразу получается решение игры – устойчивые минимаксные стратегии обоих игроков и значение цены игры.

- Если такой точки нет, то делается вывод, что игра не решается в чистых стратегиях. Тогда применяется итерационное доминирование и методы решения игры в смешанных стратегиях.

Седловые точки и равновесие по Нэшу

•Именно с проверки на наличие седловой точки рекомендуется начинать анализ игры, представленной в нормальной форме. При ее наличии сразу получается решение игры – устойчивые минимаксные стратегии обоих игроков и значение цены игры.

•Если такой точки нет, то делается вывод, что игра не решается в чистых стратегиях. Тогда применяется итерационное доминирование и методы решения игры в смешанных стратегиях.

Седловые точки и равновесие по Нэшу

- В биматричных играх (играх с ненулевой суммой) нет минимаксных стратегий и самого понятия цены игры, потому что выигрыш 2-го игрока может быть и не связан с выигрышем 1-го игрока.

- **НО** существует нечто похожее на понятие седловой точки: если в некотором столбце матрицы 1-го игрока имеется максимум в некоторой точке и в матрице 2-го игрока строка, проходящая через аналогичную точку, тоже имеет максимум именно в этой точке, то обоим игрокам выгодно придерживаться стратегий, соответствующих номерам строки и столбца этой точки. Данную пару или *набор стратегий* принято называть *устойчивыми по Нэшу*

Седловые точки и равновесие по Нэшу

•Устойчивость по Нэшу определена и при числе игроков более 2.

Это такой набор стратегий, при котором ни одному из игроков не выгодно менять стратегию при условии, что остальные игроки будут придерживаться своей прежней стратегии.

Лекция 3

Игры в смешанных стратегиях

Содержание лекции 3

1. Частота применения разных стратегий
2. Матричный метод определения оптимальных смешанных стратегий и цены игры для игр 2x2.
3. Графический метод решения игр 2xm и 3xm.

Частота применения разных стратегий

•Большинство игр с нулевой суммой не поддается решению в чистых стратегиях.

•Иногда возможно уменьшить матрицу игры путем исключения доминируемых и дублирующих стратегий (если удалось ее свести к одной строке или одному столбцу - игра решена в чистых стратегиях даже без использования принципа минимакса и нахождения седловой точки)

•Приходится признать, что ни одна из чистых стратегий не является оптимальной.

<u>В ТАКИХ СЛУЧАЯХ:</u>

•Необходимо чередовать стратегии в определенной пропорции. Решением игры в этом случае является как раз такая пропорция.

Частота применения разных стратегий

- Если у игрока 3 чистых стратегии и мы после определенных расчетов говорим – ему надо использовать эти стратегии в пропорции 5:1:4.
- Могут стоять любые натуральные числа или даже ноль.
- В последнем случае говорят, что соответствующая стратегия не используется в *смеси стратегий* и является *неактивной*.
- Те же, которые используются, называют *активными стратегиями*.
- Поведение игрока, связанное с чередованием его стратегий, называют *смешанной стратегией*.

Частота применения разных стратегий

- **Основная теорема теории игр** (теорема Неймана, теорема о минимаксе): ***Любая парная игра с нулевой суммой имеет решение в чистых или смешанных стратегиях***.
- Это решение определяет оптимальные минимаксные стратегии игроков и цену игры.
- Использование любой другой стратегии в среднем менее выгодно каждому из игроков.
- Цена игры всегда находится между нижней и верхней ценой матрицы игры.
- Решение в чистых стратегиях – это частный случай решения в смешанных стратегиях (когда в смеси активна лишь одна стратегия).

Частота применения разных стратегий

- Если смешанная стратегия выражена в виде пропорции, то стоящие в ней числа называют *относительными частотами применения стратегий*.
- Другой способ задания смешанной стратегии - через *вероятности реализации чистых стратегий*. Их легко рассчитать по известным относительным частотам. Пусть например задана смесь 4-х стратегий в виде пропорции N1: N2: N3: N4. Тогда вероятность реализации первой стратегии равна: **p1 = N1/(N1+ N2+ N3+ N4)**
- Аналогично рассчитываются и остальные 3 вероятности p2, p3, p4.
- Естественно, что сумма всех вероятностей в этом случае равна 1.

Частота применения разных стратегий

- Если действия по реализации стратегий производятся многократно, то вполне достаточно буквального использования относительных частот. В этом случае существует риск того, что противник просчитает следующий ход.
- Поэтому в теории игр обычно используется другой способ, который в принципе исключает возможность знать следующий ход. Он основан на вероятностном подходе и связан с использованием *датчика случайных чисел*: компьютерной программы, бросания монетки или игральной кости.
- Любые вычислительные методы, использующие датчик случайных чисел, принято называть *методами Монте-Карло. По методу Монте-Карло* можно реализовать смешанную стратегию даже в

Матричный метод определения смешанных стратегий и цены игры

Пример 1. Игра «наступление-оборона»

- Обороняющая сторона защищает 2 объекта, причем один из них в 3 раза важнее другого. Сил достаточно только на охрану одного из объектов, причем при нападении на охраняемый объект побеждает оборона. У нападения тоже сил достаточно только для атаки одного объекта.
- Какой из объектов надо охранять и на какой надо нападать?

- Типичная парная игра 2x2.
- Первая стратегия обороны – защитить важный объект, вторая – защитить не важный.

Матричный метод определения смешанных стратегий и цены игры

<u>Пример 7. Игра «наступление-оборона»</u>

Элементы матрицы равны суммарной важности уцелевших после нападения объектов.

Ищем минимаксные стратегии и седловую точку. Седловой точки нет, хотя у второго игрока даже 2 минимаксные стратегии. Нижняя цена игры равна 3, верхняя – 4. Чтобы найти решение в смешанных стратегиях, в случае произвольной матрицы 2х2 надо просто вычесть второй столбец

2-й игрок – нап.

1-й игрок - оборона

4	3
1	4

↓

1
-3

Матричный метод определения смешанных стратегий и цены игры

Пример 7. Игра «наступление-оборона»

1
-3

Отношение двух полученных разностей (независимо от их знаков) равно оптимальному соотношению применения 1-м игроком 2-й и 1-й стратегий.

Обратим внимание – отношение первой разности ко второй равно отношению частот именно 2-й и 1-й стратегий в оптимальной смеси.

Матричный метод определения смешанных стратегий и цены игры

Пример 7. Игра «наступление-оборона»

•Аналогично вычитают 2-ю строку исходной матрицы из первой, отношение полученных разностей задает оптимальное отношение частоты применения вторым игроком его второй и первой стратегий. Разность строк дает: (3 -1), значит у нападения относительные частоты применения чистых стратегий 1:3.

3	-1

Обороне надо использовать стратегии с частотами 3:1, то есть в 3 раза чаще охранять важный объект. Нападать надо чаще на менее важный объект

Матричный метод определения смешанных стратегий и цены игры

Пример 7. Игра «наступление-оборона»

- Аналогично вычитают 2-ю строку исходной матрицы из первой, отношение полученных разностей задает оптимальное отношение частоты применения вторым игроком его второй и первой стратегий. Разность строк дает: (3 -1), значит у нападения относительные частоты применения чистых стратегий 1:3.

3	-1

Обороне надо использовать стратегии с частотами 3:1, то есть в 3 раза чаще охранять важный объект. Нападать надо чаще на менее важный объект

Графический метод решения игр

- Графический метод - построение графиков зависимости выигрыша от пропорции, в которой смешаны 2 стратегии 1-го игрока

- Применим не только к играм 2x2, но и к играм, в которых у 2-го игрока число стратегий m > 2 (игры 2xm).

Графический метод решения игр

•Рассмотрим матрицу игры a_{ij} размерности 2xm.

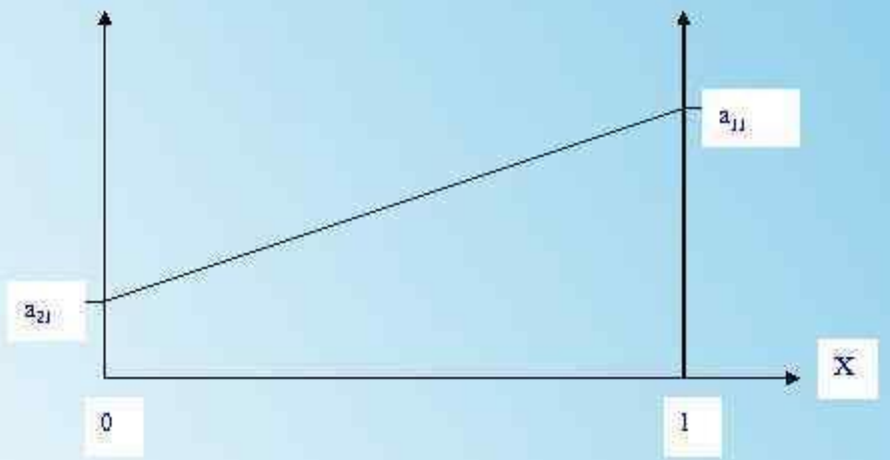
•Пусть у 1-го игрока доля (вероятность) первой стратегии в смеси равна x, тогда доля второй (1-x).

•Если 2-й игрок использует чистую первую стратегию, то выигрыш первого составит:

$$x^*a_{11} + (1-x)^*a_{21} = a_{21} + (a_{11} - a_{21})x$$

Графический метод решения игр

На графике этой функции соответствует прямая, у которой ордината равна a_{21} при x=0 и a_{11} при x=1:



Графический метод решения игр

- Если у второго игрока 3 стратегии ($m = 3$), то на таком графике будет 3 линии.
- Каждая из них строится аналогично – на левой оси откладывается значение a_{2j} , а на правой a_{1j}.

Графический метод решения игр

<u>Пример 8</u>

4	7	1
2	1	5

Задана матрица игры, необходимо решить игру графическим методом.

•Слева на графике откладывают числа со второй строки матрицы (2,1,5), справа – с первой (4,7,1).

Графический метод решения игр

Пример 8

- Противник выберет такие стратегии, чтобы ваш выигрыш был меньше. На графике этому соответствует нижняя ломаная линия из трех отрезков.
- А вы выберете на ней максимум (откуда опущен пунктир на ось). Абсцисса этой точки соответствует оптимальной доли первой стратегии x для первого игрока, а ее ордината равна цене игры.

Графический метод решения игр

- Оптимальная смесь стратегий 2-го игрока определяется потом путем дополнительных расчетов, хотя сразу можно сказать, что противнику следует использовать только те стратегии, линии которых проходят через выделенную точку (первая и третья в данном случае).
- Поэтому можно просто вычеркнуть второй столбец из матрицы и для оставшейся матрицы 2x2 найти решение.

Графический метод решения игр

Игры 3xm

Игры 3xm (у 1-го игрока 3 стратегии) решаются аналогично в трехмерном пространстве.

При этом каждой чистой стратегии 2-го игрока теперь соответствует не прямая, а плоскость. Эти плоскости образуют конструкцию типа крыши и надо сначала выделить самую нижнюю «крышу», а потом найти координаты ее верхней точки.

Графический метод решения игр

Функция «Поиск решения» (EXCEL)

Программа EXCEL, меню «Сервис», функция «Поиск решения»

Пример 9

Пусть у первого игрока n стратегий, а у второго m. Надо найти оптимальные доли стратегий p_i в их смеси для первого игрока.

•Обозначим цену игры v, тогда при использовании противником любой из его m стратегий выигрыш первого игрока будет не меньше v. Выразив этот выигрыш через p_i и элементы матрицы игры, получим соответствующие m неравенств вида:

$$a_{1j}\, p_1 + a_{2j}\, p_2 + \ldots + a_{nj}\, p_n \geq v$$

Графический метод решения игр

Функция «Поиск решения» (EXCEL)

<u>Пример 9</u>

Если обе части разделить на v и обозначить $x_j = p_j/v$, то неравенства преобразуются к виду:

$$a_{1j}\, x_1 + a_{2j}\, x_2 + \ldots + a_{nj}\, x_n \geq 1 \qquad (1)$$

Кроме того должно выполняться условие на сумму всех долей:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1,$$

которое для переменных x имеет вид:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1/v . \qquad (2)$$

Графический метод решения игр

Функция «Поиск решения» (EXCEL)

Пример 9

•Так как 1-й игрок стремится повысить цену игры, последнюю сумму можно рассматривать как функцию цели и решать задачу по нахождению оптимальных значений переменных x_j, на которые наложено ограничение (1).

•С этой целью на рабочем листе EXCEL для каждой переменной x_j заводим по ячейке и записываем туда некоторые начальные значения, соответствующие ограничениям (1). Например, это могут быть просто нули и единицы.

•После этого в одной из ячеек задаем $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ и указываем имя этой ячейки в меню «*Поиск решения*» на месте функции цели. Указываем также поиск минимума функции.

Графический метод решения игр

Функция «Поиск решения» (EXCEL)

Пример 9

- Задаем платежную матрицу на рабочем листе и через имена соотв. ячеек выражаем ограничения на значения x.
- Для этого заводим ячейки на рабочем листе для вычисления левых частей неравенств (1), после чего в «Поиске решения» указываем в левой части имена этих ячеек, потом знак ≥, потом в правой части 1.
- Указывается также ограничение на знак величин xj ≥ 0, при этом опять в левой части указывается только имя ячейки, соответствующей xj.
- Далее дается команда «Найти» и в ячейках для xj появляются оптимальные значения.

Графический метод решения игр

Функция «Поиск решения» (EXCEL)

<u>Пример 9</u>

•Сумма оптимальных значений позволяет найти цену игры, пользуясь (2), после чего находятся и сами оптимальные доли стратегий в смеси $p_j = x_j * v$.

•Аналогично находится оптимальная смесь стратегий 2-го игрока, только теперь потребуется максимизировать функцию цели.