Итерационные алгоритмы и программы

Лекция 7

В итерационных циклах производится проверка некоторого условия, и в зависимости от результата этой проверки происходит либо выход из цикла, либо повторение выполнения тела цикла. Если проверка условия производится перед выполнением блока операторов, то такой итерационный цикл называется циклом ***с предусловием*** (цикл "пока"), а если проверка производится после выполнения тела цикла, то это цикл ***с постусловием*** (цикл "до").

Особенность этих циклов заключается в том, что тело цикла с постусловием всегда выполняется хотя бы один раз, а тело цикла с предусловием может ни разу не выполниться. В зависимости от решаемой задачи необходимо использовать тот или иной вид итерационных циклов.

*Цикл с постусловием

Оператор повтора **repeat** состоит из

- *заголовка* **(repeat),**
- *тела*
- *условия окончания* **(until).**

repeat

Инструкции

until Условие_выхода_из_цикла;

Условие выхода из цикла — это выражение логического типа.

*Описание работы

Цикл работает так: *вначале* выполняется тело цикла — инструкции, которые находятся между **repeat и until,** *затем п*роверяется значение **Условия выхода из цикла.** В том случае, если оно равно **false** (ложь), т. е. не выполняется, — инструкции цикла повторяются еще раз. Так продолжается до тех пор, пока условие не станет **true** (истина).

Для успешного завершения цикла **repeat** в его теле обязательно должны находиться инструкции, выполнение которых *влияет* на условие завершения цикла, иначе цикл будет выполняться бесконечно — программа зациклится. Т. е., *переменная,* которая участвует в условии выхода из цикла, обязательно должна *изменяться* в теле цикла;

Нижняя граница операторов тела цикла четко обозначена словом **until,** поэтому нет необходимости заключать эти операторы в операторные скобки **begin** и **end.**

Цикл **repeat** — это цикл с *постусловием*, т. е. инструкции тела цикла будут выполнены *хотя бы один раз*. Поэтому цикл **repeat** удобно использовать в тех случаях, когда тело цикла гарантированно *должно выполниться хотя бы один раз*.

Оператор **repeat** часто используют для *проверки правильности ввода исходных данных*, т. к. это именно тот самый случай, когда тело цикла гарантированно выполняется один раз, а при наличии ошибки в исходных данных — более одного раза.

```
var c: char;
begin
  repeat
     writeln(‘ Введите Y или N');
      readln(c);
  until (c='Y’) or (c=’N’);
end.
```

Цикл **repeat** удобно использовать для *обработки ошибки ввода* при несоответствии типа введенных данных типу переменной.

В Pascal предусмотрена возможность **отключения стандартного контроля ошибок ввода** при помощи директивы компилятора **{$I-},** а контроль правильности ввода выполняет стандартная функция **ioResult.** Эта функция имеет нулевое значение, если последняя операция ввода/вывода закончилась успешно, и ненулевое значение, равное коду ошибки, если ввод/вывод закончился неудачей.

После вызова функция ioResult сбрасывает свое значение, поэтому обычно ее значение сразу присваивается какой-либо переменной. Рекомендуется после анализа результата, возвращаемого ioResult, снова установить стандартный контроль ошибок ввода/вывода с помощью директивы {$I+}.

```
var
x: integer; ok: boolean;
begin
  repeat
     writeln('Введите целое x');
      {$i-}  {отмена стандартного контроля оп-й ввода/вывода }
      readln(x);
      {$i+}  {включение стандартного контроля оп-й вв/вывода}
  until ioresult=0;
end.
```

*Цикл с предусловием

```
while Условие_выполнения_цикла do
begin
 Инструкции
end;
```

Условие **выполнения** цикла — это **выражение логического** типа. Тело цикла — оператор, **чаще всего составной.** Если тело цикла **представляет собой** одиночный оператор, **то** ключевые **слова begin** и **end** лучше не писать, хотя их наличие не **будет ошибкой.**

*Описание работы

Цикл while работает так: *вначале* выполняется проверка значения **Условие выполнения цикла** — если значение условия равно **true (истина),** то *выполняются инструкции цикла*, **находящиеся между begin и end и снова вычисляется выражение Условие выполнения цикла.** Так **продолжается до** тех пор, **пока значение Условие выполнения цикла** не станет **равно false** (ложь).

Пример. Найти НОД двух натуральных чисел, используя алгоритм Евклида.

```
var
    a, b:integer;
begin
    writeln('Введите два натуральных числа');
    readln(a, b);
    while a<>b do
        if a>b then a:=a-b
                    else b:=b-a;
   writeln('НОД=', a);
   readln;
end.
```

Пример. Пользователь вводит целое положительное число. Определите, какое минимальное количество последовательно расположенных натуральных чисел необходимо сложить, чтобы их сумма превзошла введенное пользователем число.

```
var n,i,s:integer;
begin
  writeln('Vvedite chislo');
  readln(n);
  i:=0;
  s:=0;
  repeat
   i:=i+1;
   s:=s+i;
  until s>n;
  writeln('kolichestvo =',i);
  readln;
end.
```

```
var n,i,s:integer;
begin
  writeln('Vvedite chislo');
  readln(n);
  i:=0;
  s:=0;
  while s<=n do
  begin
   i:=i+1;
   s:=s+i;
  end;
  writeln('kolichestvo =',i);
  readln;
end.
```

Численные методы решения алгебраических и трансцендентных уравнений

Дано нелинейное уравнение: $f(x)=0$.

Если функцию можно привести к виду

$f(x)=a_0x^m+ a_1x^{m-1}+ a_2x^{m-2}+\ldots+ a_{m-1}x+ a_0$,

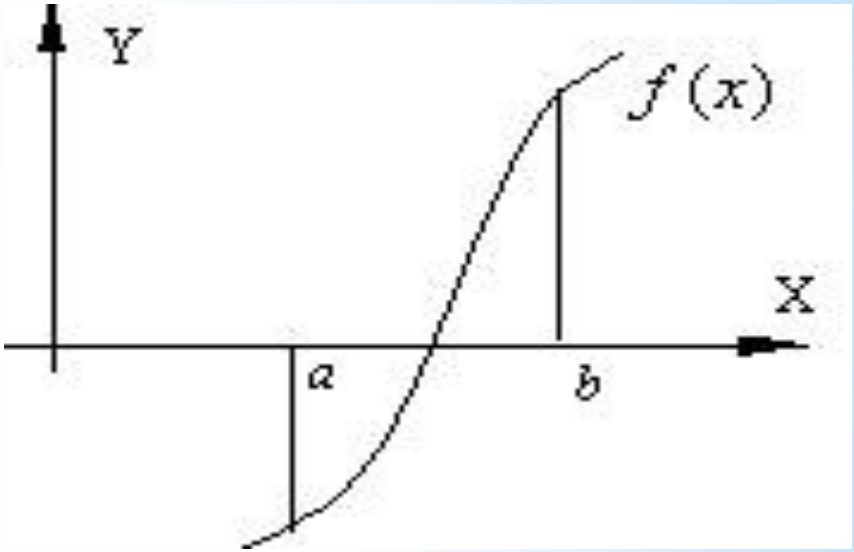
где a_i - коэффициенты многочлена, , то уравнение $f(x)=0$ называется алгебраическим.

Если функция $f(x)$ включает в себя тригонометрические или экспоненциальные функции от некоторого аргумента x и т. д., то уравнение называется трансцендентным уравнением.

Как известно, не всякое уравнение может быть решено точно. В первую очередь это относится к большинству трансцендентных уравнений.

Однако точное решение уравнения не всегда является необходимым. Задачу отыскания корней уравнения можно считать практически решенной, если мы сумеем найти корни уравнения с заданной степенью точности. Для этого используются приближенные (численные) методы решения.

Большинство употребляющихся приближенных методов решения уравнений являются, по существу, способами уточнения корней. Для их применения необходимо знание интервала изоляции [a,b], в котором лежит уточняемый корень уравнения.



Процесс определения интервала изоляции [a,b], содержащего только один из корней уравнения, называется отделением этого корня.

Процедура отделения корней основана на известном свойстве непрерывных функций: если функция непрерывна на замкнутом интервале [a,b] и на его концах имеет различные знаки, т.е. $f(a)f(b)<0$, то между точками a и b имеется хотя бы один корень уравнения. Если при этом знак функции $f'(x)$ на отрезке [a,b] не меняется, то корень является единственным на этом отрезке.

Процесс определения корней алгебраических и трансцендентных уравнений состоит из 2 этапов:

- отделение корней, - т.е. определение интервала [a,b], внутри которого лежит корень уравнения;
- уточнение корней, - т.е. сужение интервала [a,b] до величины равной заданной степени точности .

*Метод половинного деления

Дано нелинейное уравнение: f(x)=0. Найти корень уравнения, принадлежащий интервалу [a,b], с заданной точностью ε.

Для уточнения корня методом половинного деления последовательно осуществляем следующие операции:

1. Делим интервал пополам: $t=\frac{a+b}{2}$

2. В качестве нового интервала изоляции принимаем ту половину интервала, на концах которого функция имеет разные знаки.

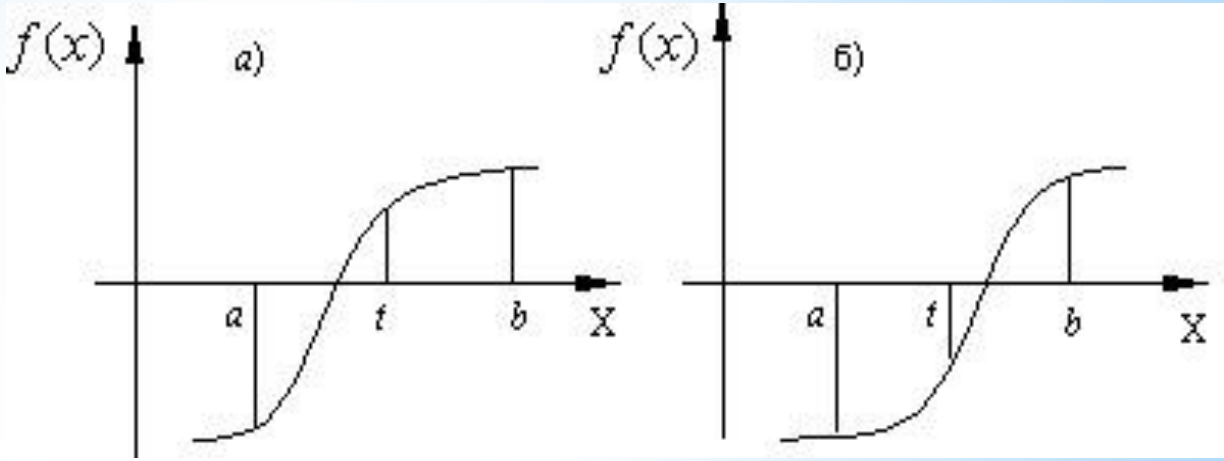
Для этого:

Вычисляем значение функции f(x) в точках a и t.

b) Проверяем: если f(a)f(t) < 0, то корень находится в левой половине интервала [a,b]. Тогда отбрасываем правую половину интервала и делаем b=t.

c) Если f(a)f(t) < 0 не выполняется, то корень находится в правой половине интервала [a,b]. Тогда отбрасываем левую половину и делаем a=t. В обоих случаях мы получим новый интервал [a,b] в 2 раза меньший предыдущего.

3. Процесс, начиная с пункта 1, циклически повторяем до тех пор, пока длина интервала [a,b] не станет равной либо меньшей заданной точности, т.е. $|b-a| \leq \varepsilon$.



```
Const e=0.001;
Var       x, t, a, b:real;
function f1(x:real):real;
   begin
      f1:=sin(x);
   end;
begin
   writeln('Введите a, b');
   readln(a, b);
   repeat
      t:=(a+b)/2;
      if f1(a)*f1(t)<=0 then b:=t  else  a:=t;
   until abs(b-a)<=e;
   x:=(b+a)/2;
writeln('Корень равен', x:7:4); end.
```

*Метод простых итераций

Пусть с точностью ε необходимо найти корень уравнения f(x)=0, принадлежащий интервалу изоляции [a,b]. Функция f(x) и ее первая производная непрерывны на этом отрезке.

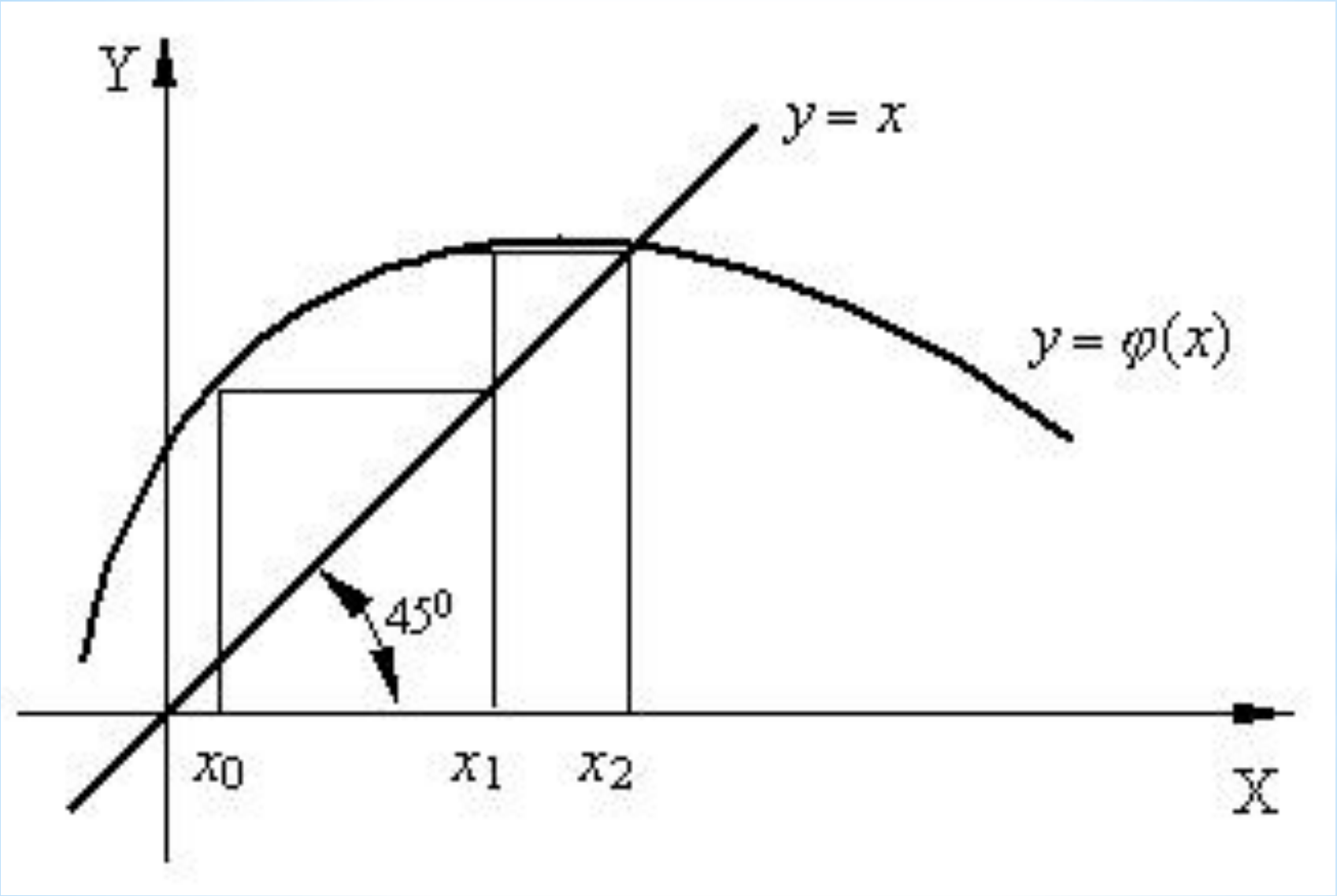
Для применения этого метода исходное уравнение f(x)=0 должно быть приведено к виду x=φ(x). В качестве начального приближения выбираем любую точку интервала [a,b].

Далее итерационный процесс поиска корня строится по схеме:

$x_1=\varphi(x_0)$, $x_2=\varphi(x_1)$, …, $x_n=\varphi(x_{n-1})$,

Процесс поиска прекращается, как только выполняется условие $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$ или число итераций превысит заданное число N.

Для того, чтобы последовательность x_1, x_2,…, x_n приближалась к искомому корню, необходимо, чтобы выполнялось условие сходимости: $|\varphi'(x)| < 1$.


Y
y = x
y = φ(x)
45⁰
x0
x1
x2
X

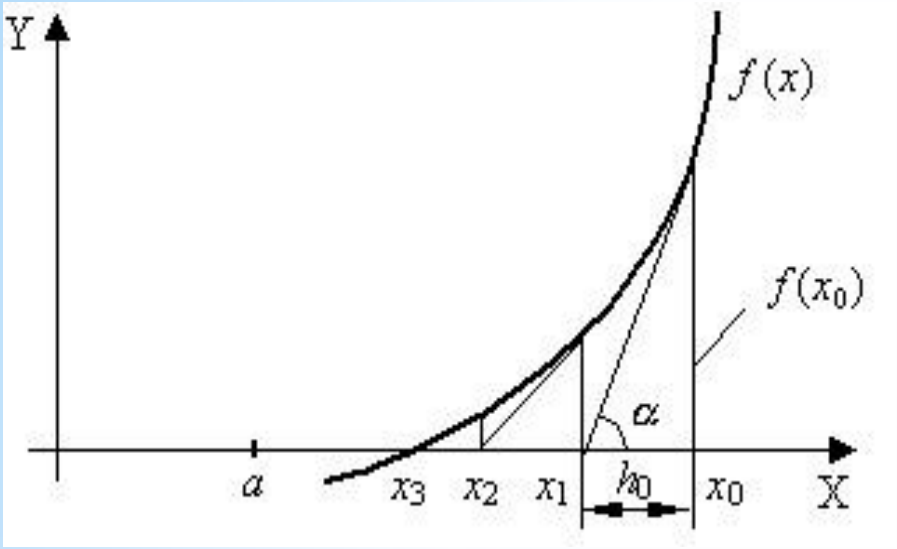
*Метод Ньютона (метод касательных)

Метод Ньютона относится к градиентным методам, в которых для нахождения корня используется значение производной.

Дано нелинейное уравнение: f(x)=0. Найти корень на интервале [a,b] с точностью ε.

Метод Ньютона основан на замене исходной функции f(x), на каждом шаге поиска касательной, проведенной к этой функции. Пересечение касательной с осью X дает приближение корня.

Выберем начальную точку x_0=b (конец интервала изоляции). Находим значение функции в этой точке и проводим к ней касательную, пересечение которой с осью X дает нам первое приближение корня x_1.



$x_1 = x_0 - h_0$, где $h_0 = \frac{f(x_0)}{tg(\propto)} = \frac{f(x_0)}{f'_{(x_0)}}$. Поэтому $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'_{(x_0)}}$. В результате итерационный процесс схождения к корню реализуется рекуррентной формулой $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'_{(x_n)}}$. Процесс поиска продолжаем до тех пор, пока не выполнится условие $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$. Упростим условие $\left|\frac{f(x_n)}{f'_{(x_n)}}\right| \leq \varepsilon$.

Метод обеспечивает быструю сходимость, если выполняется условие: $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, т.е. первую касательную рекомендуется проводить в той точке интервала [a,b], где знаки функции $f(x_0)$ и ее кривизны $f''(x_0)$ совпадают.

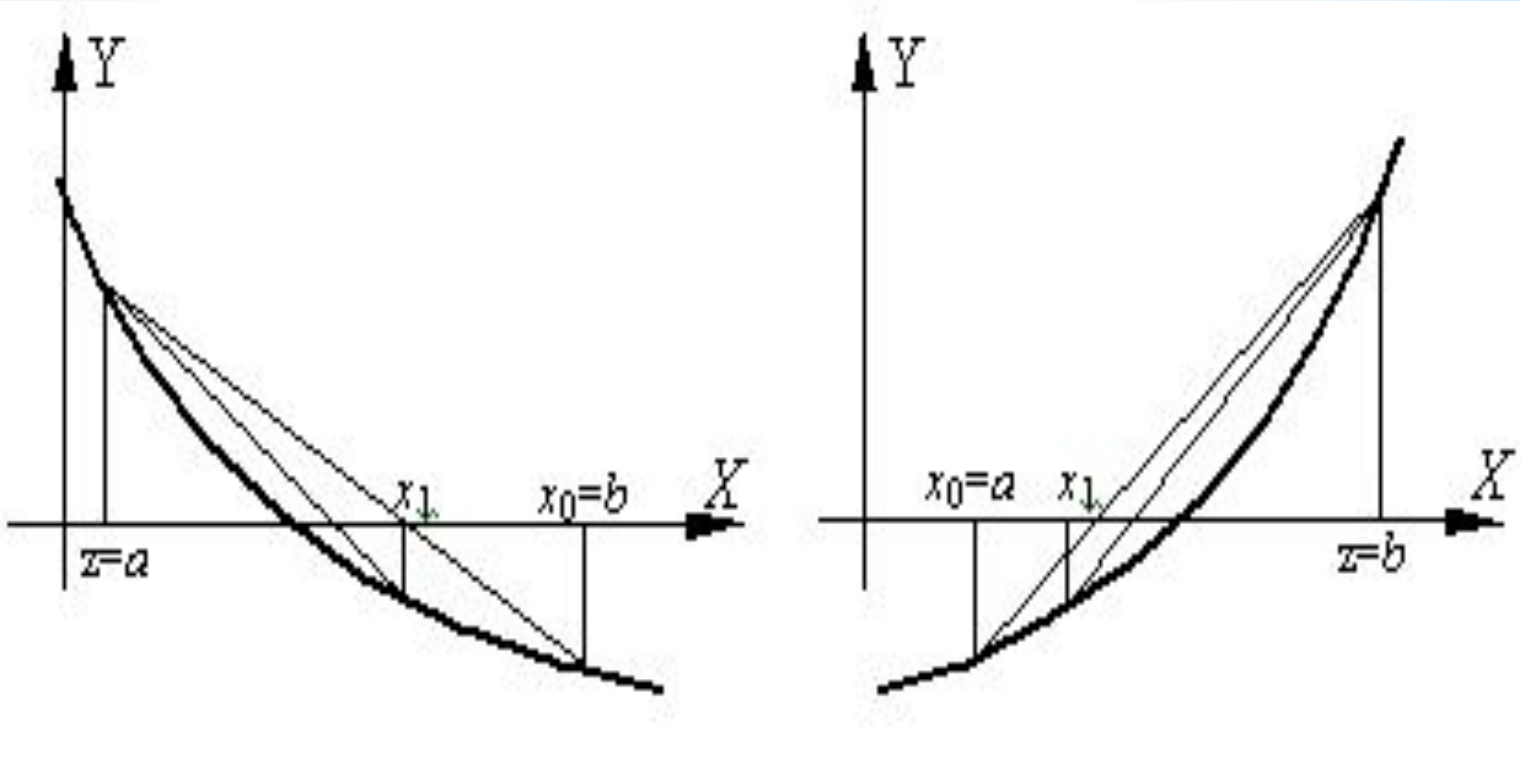
Метод хорд

Метод основан на замене функции f(x) на каждом шаге поиска хордой, пересечение которой с осью X дает приближение корня.

При этом в процессе поиска семейство хорд может строиться:

а) при фиксированном левом конце хорд, т.е. z=a, тогда начальная точка x_0=b;

б) при фиксированном правом конце хорд, т.е. z=b, тогда начальная точка x_0=a;



В результате итерационный процесс схождения к корню реализуется рекуррентной формулой:

для случая а) $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n)-f(a)}(x_n - a)$

для случая б) $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n)-f(b)}(x_n - b)$

Процесс поиска продолжается до тех пор, пока не выполнится условие $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$.

Метод обеспечивает быструю сходимость, если f(z)f"(z) > 0, т.е. хорды фиксируются в том конце интервала [a,b], где знаки функции f(z) и ее кривизны f"(z) совпадают.

Домашнее задание

1.Составить опорный конспект лекции по теме «Итерационные алгоритмы и программы» на основе презентации.

2.Программирование на языке Pascal. Рапаков Г. Г., Ржеуцкая С. Ю. СПб.: БХВ-Петербург, 2004, стр. 123-132.

3.Составить программы:

- Пользователь вводит число. Сколько последовательно расположенных натуральных чисел необходимо перемножить, чтобы их произведение стало больше введенного пользователем числа.
- Найдите сумму членов ряда $S = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/n$. Остановите вычисления, когда очередное слагаемое станет меньше e (вводится пользователем).