

# Дискретная математика

Конъюнктивная нормальная форма,  
дизъюнктивная нормальная форма.

Совершенная конъюнктивная  
нормальная форма, совершенная  
дизъюнктивная нормальная форма.

Ступинский техникум им. А. Т. Туманова 2020

## **Основные понятия алгебры логики**

**Алгебра логики изучает логические функции.**

Функция - это закон соответствия между переменными. **Логическая функция** - это закон соответствия между логическими переменными.

**Логическая переменная** - это такая переменная, относительно которой можно утверждать, что она истинна или она ложна.

Если факт истинности обозначать 1, а лжи 0, то можно считать, что логическая переменная принимает два значения 1 или 0.

**Логические функции и переменные определены на множестве двух значений  $\{0,1\}$**

## *Типовые задачи по преобразованию логических функций*

*Все задачи можно разделить на следующие типовые группы:*

- 1. Упрощение логических функций*
- 2. Построение таблицы истинности функции*
- 3. Определение тождественности логических функций*
- 4. Вычисление значения логического выражения для заданного набора значений переменных*
- 5. построение функциональной схемы узла, реализующего заданную логическую функцию.*

# Законы алгебры логики

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

$$A \Leftrightarrow B = A * B + \bar{A} * \bar{B}$$

$$A + 0 = A \quad A * 0 = 0$$

$$A + 1 = 1 \quad A * 1 = A$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$A + A = A \quad A * A = A$$

$$\bar{A} + A = 1 \quad \bar{A} * A = 0$$

*Коммутативный закон*

$$A + B = B + A$$

$$A * B = B * A$$

*Дистрибутивный закон*

$$A * (B + C) = A * B + A * C$$

$$A + (B * C) = (A + B) * (A + C)$$

*Закон поглощения*

$$A * (A + B) = A$$

$$A + A * B = A$$

*правило свертки*

$$A * B + \bar{A} * B = B \quad (\bar{A} + B) * (A + B) = B$$

*Закон склеивания*

$$A + \bar{A} * B = A + B \quad \bar{A} + A * B = \bar{A} + B$$

*Правило Де Моргана*

$$\overline{A * B} = \bar{A} + \bar{B}$$

$$\overline{A + B} = \bar{A} * \bar{B}$$

# Простые конъюнкции и дизъюнкции

- *Простой конъюнкцией называется конъюнкция одной или нескольких переменных, при этом каждая переменная встречается не более одного раза (либо сама, либо ее отрицание).*
- Например,  $x \& y \& z$  является простой конъюнкцией.
- *Простой дизъюнкцией называется дизъюнкция одной или нескольких переменных, при этом каждая переменная входит не более одного раза (либо сама, либо ее отрицание).*
- Например, выражение  $\neg x \vee y \vee z$  – простая дизъюнкция

# Элементарные конъюнкции и дизъюнкции

**Элементарная конъюнкция**  
— конъюнкция конечного множества логических переменных и их инверсий.

**Элементарная дизъюнкция** — дизъюнкция конечного множества логических переменных и их инверсий.

**Ранг** элементарной конъюнкции или дизъюнкции — число аргументов ее образующих.

## Примеры

Элементарная конъюнкция третьего порядка

$$F(X, Y, Z) = X \wedge Y \wedge \bar{Z}$$

Элементарная дизъюнкция второго порядка

$$F(X, Y) = X \vee \bar{Y}$$

# КНФ и ДНФ

**Нормальная форма** логической функции – если логическая функция представлена дизъюнкцией, конъюнкцией и инверсией.

**Конъюнктивная нормальная форма (КНФ)** содержит элементарные дизъюнкции, связанные между собой операциями конъюнкции.

**Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ)** содержит элементарные конъюнкции, связанные между собой операциями дизъюнкции.

## Примеры

$$F(X, Y, Z) = (X \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \bar{Z})$$

$$F(X, Y) = (X \wedge Y) \vee (\bar{Y} \wedge X)$$

# СКНФ и СДНФ

## Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ):

- 1) нет двух одинаковых элементарных дизъюнкций;
- 2) ни одна элементарная дизъюнкция не содержит двух одинаковых переменных;
- 3) ни одна элементарная дизъюнкция не содержит переменную вместе с ее инверсией;
- 4) все дизъюнкции имеют один и тот же ранг.

## Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ)

- 1) нет двух одинаковых элементарных конъюнкций;
- 2) ни одна элементарная конъюнкция не содержит двух одинаковых переменных;
- 3) ни одна элементарная конъюнкция не содержит переменную вместе с ее инверсией;
- 4) все конъюнкции имеют один и тот же ранг.

# Алгоритмы построения СКНФ и СДНФ

## Алгоритм образования СКНФ и СДНФ по таблице истинности

1. Выделить в таблице истинности все строки, в которых функция принимает значения 0.

2. Для каждого выбранного набора записать элементарные дизъюнкции, содержащие переменные:  
а) если значение переменной равно 0, то записывается сама переменная,  
б) если значение переменной равно 1, то записывается инверсия этой переменной.

3. Соединить элементарные дизъюнкции знаком конъюнкции.

1. Выделить в таблице истинности все строки, в которых функция принимает значения 1.

2. Для каждого выбранного набора записать элементарные конъюнкции, содержащие переменные:  
а) если значение переменной равно 0, то записывается инверсия этой переменной,  
б) если значение переменной равно 1, то записывается сама переменная.

3. Соединить элементарные конъюнкции знаком дизъюнкции.

# Пример

- Исходная таблица

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

1. Выделить в таблице истинности все строки, в которых функция принимает значения 0.

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

2. Для каждого выбранного набора записать элементарные дизъюнкции, содержащие переменные

- если значение переменной равно 0, то записывается сама переменная,
- если значение переменной равно 1, то записывается инверсия этой переменной.

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$X \vee Y \vee Z$$

$$X \vee Y \vee \bar{Z}$$

$$X \vee \bar{Y} \vee Z$$

$$\bar{X} \vee Y \vee Z$$

3. Соединить элементарные дизъюнкции знаком конъюнкции.

$$F(X, Y, Z) = (X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \bar{Z}) \wedge (X \vee \bar{Y} \vee Z) \wedge (\bar{X} \vee Y \vee Z)$$

### Задача №1

составить таблицу истинности для логической функции:  $F = \bar{A}B + A + \bar{B}A$

A	B	$\bar{A}$	$\bar{A}B$	$\bar{A}B + A$	$\bar{B}$	$\bar{B}A$	$\bar{A}B + A + \bar{B}A$
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1

### Задача №2

составить таблицу истинности для логической функции:  $F = A \rightarrow B + AB * (A \Leftrightarrow B)$

A	B	$A \rightarrow B$	$AB$	$A \Leftrightarrow B$	$AB * (A \Leftrightarrow B)$	$A \rightarrow B + AB * (A \Leftrightarrow B)$
0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

### Задача №3

построить таблицу истинности для логической функции:

$$F = (A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow (B + C)$$

A	B	C	$C \rightarrow B$	$A \rightarrow (C \rightarrow B)$	$B + C$	$(A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow (B + C)$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1