

Дискретная математика

Конъюнктивная нормальная форма,
дизъюнктивная нормальная форма.

Совершенная конъюнктивная
нормальная форма, совершенная
дизъюнктивная нормальная форма.

Ступинский техникум им. А. Т. Туманова 2020

Основные понятия алгебры логики

Алгебра логики изучает логические функции.

Функция - это закон соответствия между переменными. **Логическая функция** - это закон соответствия между логическими переменными.

Логическая переменная - это такая переменная, относительно которой можно утверждать, что она истинна или она ложна.

Если факт истинности обозначать 1, а лжи 0, то можно считать, что логическая переменная принимает два значения 1 или 0.

Логические функции и переменные определены на множестве двух значений $\{0,1\}$

Типовые задачи по преобразованию логических функций

Все задачи можно разделить на следующие типовые группы:

- 1. Упрощение логических функций*
- 2. Построение таблицы истинности функции*
- 3. Определение тождественности логических функций*
- 4. Вычисление значения логического выражения для заданного набора значений переменных*
- 5. построение функциональной схемы узла, реализующего заданную логическую функцию.*

Законы алгебры логики

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

$$A \Leftrightarrow B = A * B + \bar{A} * \bar{B}$$

$$A + 0 = A \quad A * 0 = 0$$

$$A + 1 = 1 \quad A * 1 = A$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$A + A = A \quad A * A = A$$

$$\bar{A} + A = 1 \quad \bar{A} * A = 0$$

Коммутативный закон

$$A + B = B + A$$

$$A * B = B * A$$

Дистрибутивный закон

$$A * (B + C) = A * B + A * C$$

$$A + (B * C) = (A + B) * (A + C)$$

Закон поглощения

$$A * (A + B) = A$$

$$A + A * B = A$$

правило свертки

$$A * B + \bar{A} * B = B \quad (\bar{A} + B) * (A + B) = B$$

Закон склеивания

$$A + \bar{A} * B = A + B \quad \bar{A} + A * B = \bar{A} + B$$

Правило Де Моргана

$$\overline{A * B} = \bar{A} + \bar{B}$$

$$\overline{A + B} = \bar{A} * \bar{B}$$

Простые конъюнкции и дизъюнкции

- *Простой конъюнкцией называется конъюнкция одной или нескольких переменных, при этом каждая переменная встречается не более одного раза (либо сама, либо ее отрицание).*
- Например, $x \& y \& z$ является простой конъюнкцией.
- *Простой дизъюнкцией называется дизъюнкция одной или нескольких переменных, при этом каждая переменная входит не более одного раза (либо сама, либо ее отрицание).*
- Например, выражение $\neg x \vee y \vee z$ – простая дизъюнкция

Элементарные конъюнкции и дизъюнкции

Элементарная конъюнкция
— конъюнкция конечного множества логических переменных и их инверсий.

Элементарная дизъюнкция — дизъюнкция конечного множества логических переменных и их инверсий.

Ранг элементарной конъюнкции или дизъюнкции — число аргументов ее образующих.

Примеры

Элементарная конъюнкция третьего порядка

$$F(X, Y, Z) = X \wedge Y \wedge \bar{Z}$$

Элементарная дизъюнкция второго порядка

$$F(X, Y) = X \vee \bar{Y}$$

КНФ и ДНФ

Нормальная форма логической функции – если логическая функция представлена дизъюнкцией, конъюнкцией и инверсией.

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ) содержит элементарные дизъюнкции, связанные между собой операциями конъюнкции.

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) содержит элементарные конъюнкции, связанные между собой операциями дизъюнкции.

Примеры

$$F(X, Y, Z) = (X \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \bar{Z})$$

$$F(X, Y) = (X \wedge Y) \vee (\bar{Y} \wedge X)$$

СКНФ и СДНФ

Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ):

- 1) нет двух одинаковых элементарных дизъюнкций;
- 2) ни одна элементарная дизъюнкция не содержит двух одинаковых переменных;
- 3) ни одна элементарная дизъюнкция не содержит переменную вместе с ее инверсией;
- 4) все дизъюнкции имеют один и тот же ранг.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ)

- 1) нет двух одинаковых элементарных конъюнкций;
- 2) ни одна элементарная конъюнкция не содержит двух одинаковых переменных;
- 3) ни одна элементарная конъюнкция не содержит переменную вместе с ее инверсией;
- 4) все конъюнкции имеют один и тот же ранг.

Алгоритмы построения СКНФ и СДНФ

Алгоритм образования СКНФ и СДНФ по таблице истинности

1. Выделить в таблице истинности все строки, в которых функция принимает значения 0.

2. Для каждого выбранного набора записать элементарные дизъюнкции, содержащие переменные:
а) если значение переменной равно 0, то записывается сама переменная,
б) если значение переменной равно 1, то записывается инверсия этой переменной.

3. Соединить элементарные дизъюнкции знаком конъюнкции.

1. Выделить в таблице истинности все строки, в которых функция принимает значения 1.

2. Для каждого выбранного набора записать элементарные конъюнкции, содержащие переменные:
а) если значение переменной равно 0, то записывается инверсия этой переменной,
б) если значение переменной равно 1, то записывается сама переменная.

3. Соединить элементарные конъюнкции знаком дизъюнкции.

Пример

- Исходная таблица

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

1. Выделить в таблице истинности все строки, в которых функция принимает значения 0.

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

2. Для каждого выбранного набора записать элементарные дизъюнкции, содержащие переменные

- если значение переменной равно 0, то записывается сама переменная,
- если значение переменной равно 1, то записывается инверсия этой переменной.

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$X \vee Y \vee Z$$

$$X \vee Y \vee \bar{Z}$$

$$X \vee \bar{Y} \vee Z$$

$$\bar{X} \vee Y \vee Z$$

3. Соединить элементарные дизъюнкции знаком конъюнкции.

$$F(X, Y, Z) = (X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \bar{Z}) \wedge (X \vee \bar{Y} \vee Z) \wedge (\bar{X} \vee Y \vee Z)$$

Задача №1

составить таблицу истинности для логической функции: $F = \bar{A}B + A + \bar{B}A$

A	B	\bar{A}	$\bar{A}B$	$\bar{A}B + A$	\bar{B}	$\bar{B}A$	$\bar{A}B + A + \bar{B}A$
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1

Задача №2

составить таблицу истинности для логической функции: $F = A \rightarrow B + AB * (A \Leftrightarrow B)$

A	B	$A \rightarrow B$	AB	$A \Leftrightarrow B$	$AB * (A \Leftrightarrow B)$	$A \rightarrow B + AB * (A \Leftrightarrow B)$
0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Задача №3

построить таблицу истинности для логической функции:

$$F = (A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow (B + C)$$

A	B	C	$C \rightarrow B$	$A \rightarrow (C \rightarrow B)$	$B + C$	$(A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow (B + C)$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1