

Уравнение вида $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$ называется *линейным уравнением*, где x_1, x_2, \dots, x_n – неизвестные, $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ – коэффициенты уравнения.

Рассмотрим систему вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} .$$

Решением системы линейных уравнений с неизвестными называется упорядоченный набор чисел C_1, C_2, \dots, C_n , таких, что имеют место следующие числовые равенства:

$$\begin{aligned} a_{11}C_1 + a_{12}C_2 + \dots + a_{1n}C_n &= b_1; \\ a_{21}C_1 + a_{22}C_2 + \dots + a_{2n}C_n &= b_2; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \\ a_{m1}C_1 + a_{m2}C_2 + \dots + a_{mn}C_n &= b_m. \end{aligned}$$

- Система называется **совместной**, если она имеет *хотя бы* одно решение и **несовместной**, если она не имеет *ни одного* решения.
- Совместная система, имеющая *единственное решение*, называется **определённой**, а система, имеющая *бесконечное множество* решений, называется **неопределённой**.
- Две системы линейных уравнений называются **эквивалентными**, если любое решение каждой из них является одновременно и решением другой системы.

Пример. Система $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$ – имеет единственное решение;

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases} \text{ – система несовместна;}$$

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ x + y = 4 \end{cases} \text{ – система неопределённая (имеет бесконечное множество решений).}$$

Замечания: 1. Если ступенчатая система оказывается треугольной, т. е. $k = n$, то исходная система имеет единственное решение. Из последнего уравнения находим x_n , из предпоследнего уравнения x_{n-1} , далее поднимаясь по системе вверх, найдем все остальные неизвестные (x_{n-2}, \dots, x_1) .

2. На практике удобнее работать не с системой (1) , а с расширенной ее матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками. Удобно, чтобы коэффициент a_{11} был равен 1 (уравнения переставить местами, либо разделить обе части уравнения на $a_{11} \neq 1$).

Пример 1

Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ -x_2 - x_3 + 2x_4 = 7, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_4 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

3.6

Выпишем расширенную матрицу \tilde{A} и с помощью эквивалентных преобразований приведем её к ступенчатому виду:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -7 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{(-1)} \\ \xrightarrow{+} \\ \xrightarrow{+} \end{array} \sim$$

1-ю строку прибавим к 3-й, а затем умножим её на (-1) и прибавим к 4-й.

В дальнейшем 1-ю строку не трогаем, работаем со 2-й строкой.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (3) \\ + \\ + \end{array} \sim$$

Прибавим 2-ю строку к 3-й, а затем прибавим утроенную 2-ю строку к 4-й.

Далее первые две строки не трогаем, работаем с 3-й.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 3 & 20 \end{array} \right) \begin{array}{l} (7) \\ + \end{array} \sim$$

Умножим 3-ю строку на 7 и прибавим к 4-й.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 34 \end{array} \right) \text{ — ступенчатая матрица.}$$

Таким образом, в результате проведённых преобразований пришли к следующей системе линейных уравнений, равносильной данной:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ -x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_3 + 2x_4 = 2, \\ 17x_4 = 34. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Полученная система (значит, и} \\ \text{данная) имеет единственное} \\ \text{решение.} \end{array}$$

Из последнего уравнения $x_4 = 2$; из третьего $x_3 = 2 - 2x_4 = 2 - 2 \cdot 2 = -2$, т. е. $x_3 = -2$; из второго $x_2 = -7 - x_3 + 2x_4 = -7 - (-2) + 2 \cdot 2 = -1$, т. е. $x_2 = -1$; из первого $x_1 = 2 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 2 + (-1) - 2(-2) - 2 \cdot 2 = 1$, т. е. $x_1 = 1$.

Ответ: $\{(1; -1; -2; 2)\}$.

Пример 2

Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

○ Решение: В результате элементарных преобразований над расширенной матрицей системы

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{pmatrix} \sim \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -10 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

исходная система свелась к ступенчатой:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3. \end{cases}$$

Поэтому общее решение системы: $x_2 = 5x_4 - 13x_3 - 3$; $x_1 = 5x_4 - 8x_3 - 1$.
Если положить, например, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, то найдем одно из частных решений этой системы $x_1 = -1$, $x_2 = -3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. ●

Те переменные, коэффициенты при которых стоят на главной диагонали трапецеидальной матрицы (это значит, что эти коэффициенты отличны от нуля), называются **базисными**. В рассмотренном выше примере это неизвестные x_1, x_2, x_3 . Остальные неизвестные называются **свободными**. В рассмотренном выше примере это неизвестные x_4 , и x_5 . Свободным неизвестным можно придавать любые значения или выражать их через параметры, как это сделано в последнем примере.

Базисные неизвестные единственным образом выражаются через свободные неизвестные.

Если свободным неизвестным приданы конкретные числовые значения и через них выражены базисные неизвестные, то полученное решение называется **частным решением**.

Если свободные неизвестные выражены через параметры, то получается решение, которое называется **общим решением**.

Если получены два различных набора базисных неизвестных при различных способах нахождения решения одной и той же системы, то эти наборы обязательно содержат одно и то же число неизвестных, называемое **рангом системы**.

Решить систему методом Гаусса:

Пример 3

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

○ Решение: Произведем элементарные преобразования над строчками расширенной матрицы системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица соответствует системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Осуществляя обратный ход, находим $x_3 = 1$, $x_2 = 1$, $x_1 = 1$.

Рассмотрим прямоугольную матрицу A ($m \times n$):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пусть в матрице A выбраны произвольно k -строк и k -столбцов ($k \leq \min(m, n)$). Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k , определитель которой называется *минором k -порядка* матрицы A .

Рангом матрицы A называется порядок наибольшего минора этой матрицы, отличного от нуля.

$$\text{rang } A = k$$

Метод окаймляющих миноров

Пусть в матрице A найден минор M k -го порядка, отличный от нуля. Рассмотрим лишь те миноры $(k+1)$ -го порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор M_k ; если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k . В противном случае среди окаймляющих миноров найдётся ненулевой минор $(k+1)$ -го порядка и вся процедура повторится.

Пример

Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

3.13 доп

Фиксируем минор второго порядка, отличный от нуля:

$$M_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ следовательно, } \text{rang} A \geq 2.$$

Вычисляем минор третьего порядка, окаймляющий M_2 , например,

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 + 0 + 3 - 0 - 2 - 4 = 1.$$

Минор M_3 также отличен от нуля, значит, $\text{rang}A \geq 3$. Однако оба минора 4-го порядка, окаймляющие M_3 , равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

3.14доп

поэтому ранг матрицы равен 3: $\text{rang}A = 3$.

Замечание. Нахождение ранга матриц методом окаймляющих миноров требует вычисления определителей. Поэтому этим методом удобней пользоваться для вычисления ранга матриц небольшого размера. Для вычисления ранга матрицы, у которой число строк и столбцов больше трёх, рациональней использовать метод элементарных преобразований.

Элементарными преобразованиями называют:

- Перестановку строк (столбцов).
- Умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля.
- Прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), предварительно умноженных на некоторое число.
- Вычёркивание строки (столбца), все элементы которой равны нулю.

Замечание. Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.

Матрицы, полученные одна из другой путём элементарных преобразований, называются эквивалентными (обозначаются $A \sim B$).

Чтобы вычислить ранг матрицы A , путём элементарных преобразований приводим её к ступенчатому виду (в частности, к треугольному), выделяя наибольший минор, отличный от нуля:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2k} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{kk} & \dots & b_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M_k \neq 0, M_{k+r} = 0, r \geq 1$$

$$A \sim$$

$\text{rang } A = \text{rang } B = k.$

Пример

Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{2,3} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{1,1,1} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$