# Системы линейных алгебраических уравнений

3.1

Уравнение вида $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$ называется *линейным уравнением*, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные, $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ – коэффициенты уравнения.

Рассмотрим систему вида: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$.

Решением системы mлинейных уравнений с nнеизвестными называется упорядоченный набор чисел $C_1, C_2, \ldots, C_n$, таких, что имеют место следующие числовые равенства:

$$a_{11}C_1 + a_{12}C_2 + \cdots + a_{1n}C_n = b_1;$$

$$a_{21}C_1 + a_{22}C_2 + \cdots + a_{2n}C_n = b_2;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m1}C_1 + a_{m2}C_2 + \cdots + a_{mn}C_n = b_m.$$

3.2

- Система называется **совместной**, если она имеет *хотя бы* одно решение и **несовместной**, если она не имеет *ни одного* решения.
- Совместная система, имеющая *единственное решение*, называется **определённой**, а система, имеющая *бесконечное множество* решений, называется **неопределённой**.
- Две системы линейных уравнений называются **эквивалентными**, если любое решение каждой из них является одновременно и решением другой системы.

**Пример.** Система $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases}$ –имеет единственное решение;

$$\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+2y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ x+y=1 \end{cases}$$ – система несовместна;

$$\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+2y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ x+y=4 \end{cases}$$ – система неопределённая (имеет бесконечное множество решений).

# Метод Гаусса решения систем ЛАУ

Одним из наиболее универсальных и эффективных методов решений линейных алгебраических систем является *метод Гаусса*, состоящий в последовательном исключении неизвестных.

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4.3}$$

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к *ступенчатому* (в частности, *треугольному*) виду.

Приведенная ниже система имеет ступенчатый вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{kk}x_k + \cdots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases}$$

На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

*Прямой ход.*

Будем считать, что элемент $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то первым в системе запишем уравнение, в котором коэффициент при $x_1$ отличен от нуля).

Преобразуем систему (4.3), исключив неизвестное $x_1$ во всех уравнениях, кроме первого (используя элементарные преобразования системы). Для этого умножим обе части первого уравнения на $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ и сложим почленно со вторым уравнением системы. Затем умножим обе части первого уравнения на $-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ и сложим с третьим уравнением системы. Продолжая этот процесс, получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\quad a_{m2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}. \end{cases}$$

Здесь $a_{ij}^{(1)}$, $b_i^{(1)}$ $(i, j = \overline{2, m})$ — новые значения коэффициентов и правых частей, которые получаются после первого шага.

3.5

Reiteration

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a_{m2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}. \end{cases}$$

Аналогичным образом, считая главным элементом $a_{22}^{(1)} \neq 0$, исключим неизвестное $x_2$ из всех уравнений системы, кроме первого и второго, и так далее. Продолжаем этот процесс, пока это возможно.

Если в процессе приведения системы (4.3) к ступенчатому виду появятся нулевые уравнения, т. е. равенства вида $0 = 0$, их отбрасывают. Если же появится уравнение вида $0 = b_i$, а $b_i \neq 0$, то это свидетельствует о несовместности системы.

Второй этап (*обратный ход*) заключается в решении ступенчатой системы. Ступенчатая система уравнений, вообще говоря, имеет бесчисленное множество решений. В последнем уравнении этой системы выражаем первое неизвестное $x_k$ через остальные неизвестные $(x_{k+1}, \dots, x_n)$. Затем подставляем значение $x_k$ в предпоследнее уравнение системы и выражаем $x_{k-1}$ через $(x_{k+1}, \dots, x_n)$; затем находим $x_{k-2}, \dots, x_1$. Придавая свободным неизвестным $(x_{k+1}, \dots, x_n)$ произвольные значения, получим бесчисленное множество решений системы.

*Замечания*: 1. Если ступенчатая система оказывается треугольной, т. е. $k = n$, то исходная система имеет единственное решение. Из последнего уравнения находим $x_n$, из предпоследнего уравнения $x_{n-1}$, далее поднимаясь по системе вверх, найдем все остальные неизвестные $(x_{n-2}, \ldots, x_1)$.

2. На практике удобнее работать не с системой ), а с расширенной ее матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками. Удобно, чтобы коэффициент $a_{11}$ был равен 1 (уравнения переставить местами, либо разделить обе части уравнения на $a_{11} \neq 1$).

Пример 1

3.6

Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ \quad -x_2 - x_3 + 2x_4 = 7, \\ -x_1 + 2x_2 \quad - 2x_4 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу $\tilde{A}$ и с помощью эквивалентных преобразований приведем её к ступенчатому виду:

$$\tilde{A} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -7 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} (-1) \\ \\ + \\ + \end{array} \sim$$

1-ю строку прибавим к 3-й, а затем умножим её на $(-1)$ и прибавим к 4-й.

В дальнейшем 1-ю строку не трогаем, работаем со 2-й строкой.

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & -1 \end{array}\right)\begin{matrix} (3) \\ + \\ + \end{matrix}\sim$$

Прибавим 2-ю строку к 3-й, а затем прибавим утроенную 2-ю строку к 4-й.

Далее первые две строки не трогаем, работаем с 3-й.

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 3 & 20 \end{array}\right)\begin{matrix} (7) \\ + \end{matrix}\sim$$

Умножим 3-ю строку на 7 и прибавим к 4-й .

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 34 \end{array}\right)$$ – ступенчатая матрица.

Таким образом, в результате проведённых преобразований пришли к следующей системе линейных уравнений, равносильной данной:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ \quad -x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ \qquad\qquad x_3 + 2x_4 = 2, \\ \qquad\qquad\quad 17x_4 = 34. \end{cases}$$

Полученная система (значит, и данная) имеет единственное решение.

Из последнего уравнения $x_4 = 2$; из третьего $x_3 = 2 - 2x_4 = 2 - 2 \cdot 2 = -2$, т. е. $x_3 = -2$; из второго $x_2 = -7 - x_3 + 2x_4 = -7 - (-2) + 2 \cdot 2 = -1$, т. е. $x_2 = -1$; из первого $x_1 = 2 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 2 + (-1) - 2(-2) - 2 \cdot 2 = 1$, т. е. $x_1 = 1$.

Ответ: $\{(1; -1; -2; 2)\}$.

Пример 2



Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Решение: В результате элементарных преобразований над расширенной матрицей системы

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -10 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

исходная система свелась к ступенчатой:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3. \end{cases}$$

Поэтому общее решение системы: $x_2 = 5x_4 - 13x_3 - 3$; $x_1 = 5x_4 - 8x_3 - 1$. Если положить, например, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, то найдем одно из частных решений этой системы $x_1 = -1$, $x_2 = -3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. ●

Те переменные, коэффициенты при которых стоят на главной диагонали трапецеидальной матрицы (это значит, что эти коэффициенты отличны от нуля), называются **базисными**. В рассмотренном выше примере это неизвестные $x_1$, $x_2$, $x_3$. Остальные неизвестные называются **свободными**. В рассмотренном выше примере это неизвестные $x_4$, и $x_5$. Свободным неизвестным можно придавать любые значения или выражать их через параметры, как это сделано в последнем примере.

Базисные неизвестные единственным образом выражаются через свободные неизвестные.

Если свободным неизвестным приданы конкретные числовые значения и через них выражены базисные неизвестные, то полученное решение называется **частным решением**.

Если свободные неизвестные выражены через параметры, то получается решение, которое называется **общим решением**.

Если получены два различных набора базисных неизвестных при различных способах нахождения решения одной и той же системы, то эти наборы обязательно содержат одно и то же число неизвестных, называемое **рангом системы**.

Пример 3

3.11

Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 + \ x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + \ x_2 + \ x_3 = 5, \\ 5x_1 - \ x_2 - \ x_3 = 3. \end{cases}$$

**Решение:** Произведем элементарные преобразования над строчками расширенной матрицы системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица соответствует системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_2 \qquad\quad = 1, \\ \qquad\quad x_3 = 1. \end{cases}$$

Осуществляя обратный ход, находим $x_3 = 1$, $x_2 = 1$, $x_1 = 1$.

3.12 доп

## Ранг матрицы. Основные методы вычисления ранга

Рассмотрим прямоугольную матрицу $A\ (m \times n)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пусть в матрице $A$ выбраны произвольно $k$-строк и $k$-столбцов $(k \le \min(m,n))$. Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка $k$, определитель которой называется *минором k-порядка* матрицы $A$.

*Рангом матрицы A называется порядок наибольшего минора этой матрицы, отличного от нуля.*

$$\operatorname{rang} A = k$$

## Метод окаймляющих миноров

Пусть в матрице $A$ найден минор $M$ $k$-го порядка, отличный от нуля. Рассмотрим лишь те миноры $(k+1)$-го порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор $M_k$; если все они равны нулю, то ранг матрицы равен $k$. В противном случае среди окаймляющих миноров найдётся ненулевой минор $(k+1)$-го порядка, и вся процедура повторится.

3.13 доп

**Пример**

Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Фиксируем минор второго порядка, отличный от нуля:

$$M_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ следовательно, } \operatorname{rang} A \geq 2.$$

Вычисляем минор третьего порядка, окаймляющий $M_2$, например,

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 + 0 + 3 - 0 - 2 - 4 = 1.$$

3.14доп

Минор $M_3$ также отличен от нуля, значит, $\operatorname{rang} A \geq 3$. Однако оба минора 4-го порядка, окаймляющие $M_3$, равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

поэтому ранг матрицы равен 3: $\operatorname{rang} A = 3$.

***Замечание.*** *Нахождение ранга матриц методом окаймляющих миноров требует вычисления определителей. Поэтому этим методом удобней пользоваться для вычисления ранга матриц небольшого размера. Для вычисления ранга матрицы, у которой число строк и столбцов больше трёх, рациональней использовать метод элементарных преобразований.*

## Метод элементарных преобразований

3.15доп

*Элементарными преобразованиями называют:*

- Перестановку строк (столбцов).
- Умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля.
- Прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), предварительно умноженных на некоторое число.
- Вычёркивание строки (столбца), все элементы которой равны нулю.

***Замечание.*** *Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.*

Матрицы, полученные одна из другой путём элементарных преобразований, называются эквивалентными (обозначаются $A \sim B$).

Чтобы вычислить ранг матрицы $A$, путём элементарных преобразований приводим её к ступенчатому виду (в частности, к треугольному), выделяя наибольший минор, отличный от нуля:

3.16доп

$$A \sim B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2k} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{kk} & \cdots & b_{kn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M_k \neq 0, M_{k+r} = 0, r \geq 1,$$

rang A = rang B = k.

**Пример** Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \overset{2,\,3}{\phantom{x}} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{1,\,1,\,1}{\phantom{x}} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$