



**Подготовка экспертов для работы в региональной предметной комиссии  
при проведении итоговой аттестации по общеобразовательным  
программам основного общего образования**

**Тема 4. Методика проверки и оценки заданий с  
развернутым ответом: задания высокого уровня сложности  
(задания 22 и 25).  
Согласование подходов к проверке заданий с  
развернутым ответом**

*Семенов Андрей Викторович*, к. пед.н., ведущий научный  
сотрудник ФГБНУ «ФИПИ»

11 февраля 2021 года

# Содержание курса

Тема лекции	Даты	Самостоят. работа
<b>Тема 1. Подходы к формированию и организации работы региональной предметной комиссии. Содержание и структура КИМ ОГЭ по математике. Особенности заданий с развернутым ответом КИМ ОГЭ по математике</b>	1 февраля 2021 г. (понедельник) 15-00	Входная диагностика
<b>Тема 2. Методика проверки и оценки алгебраических заданий повышенного уровня сложности с развернутым ответом (задания 20 и 21)</b>	4 февраля 2021 г. (четверг) 15-00	Тренинг 1
<b>Тема 3. Методика проверки и оценки геометрических заданий повышенного уровня сложности с развернутым ответом (задания 23 и 24)</b>	8 февраля 2021 г. (понедельник) 15-00	Тренинг 2
<b>Тема 4. Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом: задания высокого уровня сложности (задания 22 и 25). Согласование подходов к проверке заданий с развернутым ответом</b>	11 февраля 2021 г. (четверг) 15-00	Итоговый зачет

## 16. Линейная функция и её график

**Пример 3.** Построим график функции  $y = 2x + 3$ .

► Функция  $y = 2x + 3$  линейная, поэтому её графиком является прямая. Используя формулу  $y = 2x + 3$ , найдём координаты двух точек графика:

если  $x = -2$ , то  $y = 2 \cdot (-2) + 3 = -1$ ;

если  $x = 1$ , то  $y = 2 \cdot 1 + 3 = 5$ .

Отметим точки  $A(-2; -1)$  и  $B(1; 5)$ . Проведём через эти точки прямую (рис. 33). Прямая  $AB$  есть график функции  $y = 2x + 3$ . ◀

При построении графика линейной функции часто бывает удобно в качестве одной из точек брать точку с абсциссой 0.

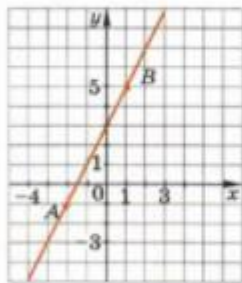


Рис. 33

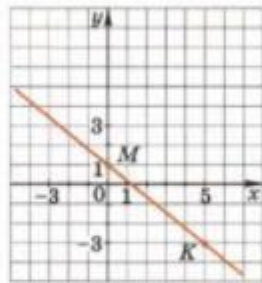


Рис. 34

**Пример 4.** Построим график функции  $y = -0,8x + 1$ .

► Найдём координаты двух точек графика:

если  $x = 0$ , то  $y = -0,8 \cdot 0 + 1 = 1$ ;

если  $x = 5$ , то  $y = -0,8 \cdot 5 + 1 = -3$ .

Отметим точки  $M(0; 1)$  и  $K(5; -3)$  и проведём через них прямую (рис. 34). Прямая  $MK$  — график функции  $y = -0,8x + 1$ . ◀

Для тех, кто хочет знать больше

## 17. Задание функции несколькими формулами

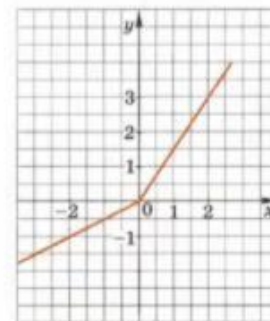


Рис. 46

**Пример 2.** Построим график функции  $y = x + 0,5|x|$ .

► Освободимся от знака модуля. Если  $x < 0$ , то  $|x| = -x$ . Значит,

$$y = x - 0,5x = 0,5x \text{ при } x < 0.$$

Если  $x \geq 0$ , то  $|x| = x$ . Значит,  $y = x + 0,5x = 1,5x$  при  $x \geq 0$ .

Итак, данную функцию можно задать двумя формулами:

$$y = \begin{cases} 0,5x, & \text{если } x < 0, \\ 1,5x, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

На рисунке 46 изображён график этой функции. Он состоит из двух лучей. ◀

## 7. Построение графика квадратичной функции

Чтобы построить график квадратичной функции, нужно:

- 1) найти координаты вершины параболы и отметить ее в координатной плоскости;
- 2) построить еще несколько точек, принадлежащих параболе;
- 3) соединить отмеченные точки плавной линией.

Заметим, что абсциссу  $m$  вершины удобно находить по формуле  $m = -\frac{b}{2a}$ . Ординату  $n$  можно находить, подставив найденное значение абсциссы в формулу  $y = ax^2 + bx + c$ , так как при  $x = m$

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + n = n.$$

Приведем примеры построения графиков квадратичных функций.

**Пример 1.** Построим график функции  $y = 0,5x^2 + 3x + 0,5$ .

- Графиком функции  $y = 0,5x^2 + 3x + 0,5$  является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем координаты  $m$  и  $n$  вершины этой параболы:

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot 0,5} = -3;$$

$$n = 0,5 \cdot (-3)^2 + 3 \cdot (-3) + 0,5 = -4.$$

Значит, вершина параболы — точка  $(-3; -4)$ . Составим таблицу значений функции:

$x$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
$y$	4	0,5	-2	-3,5	-4	-3,5	-2	0,5	4

Построив точки, координаты которых указаны в таблице, и соединив их плавной линией, получим график функции  $y = 0,5x^2 + 3x + 0,5$  (рис. 31). ◁

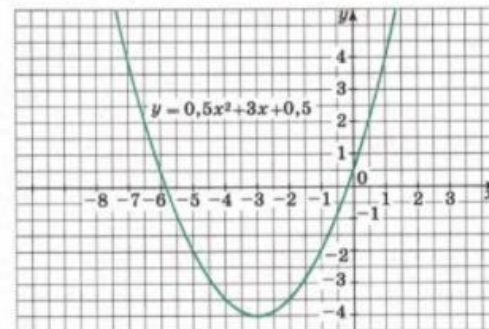


Рис. 31

При составлении таблицы и построении графика учитывалось, что прямая  $x = -3$  является осью симметрии параболы. Поэтому мы брали точки с абсциссами  $-4$  и  $-2$ ,  $-5$  и  $-1$ ,  $-6$  и  $0$ , симметричные относительно прямой  $x = -3$  (эти точки имеют одинаковые ординаты).

# Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом: задания высокого уровня сложности (задание 22)

Для тех, кто хочет знать больше

## 10. Дробно-линейная функция и ее график

Вам известны свойства и график функции  $y = \frac{k}{x}$  при  $k > 0$ . Отметим еще одно свойство этой функции и особенность ее графика.

При неограниченном возрастании положительных значений аргумента значения функции, оставаясь положительными, убывают и стремятся к нулю, т. е. если  $x > 0$  и  $x \rightarrow +\infty$ , то  $y \rightarrow 0$ . Аналогично если  $x < 0$  и  $x \rightarrow -\infty$ , то  $y \rightarrow 0$ . На графике это свойство проявляется в том, что точки графика по мере их удаления в бесконечность (т. е. при  $x \rightarrow +\infty$  или  $x \rightarrow -\infty$ ) неограниченно приближаются к оси  $x$ . Говорят, что ось  $x$ , т. е. прямая  $y = 0$ , является *асимптотой* графика функции  $y = \frac{k}{x}$  при  $k > 0$ .

**Пример 1.** Построим график функции  $y = \frac{2x+4}{x-1}$ .

► Для этого выделим из дроби  $\frac{2x+4}{x-1}$  целую часть, представив дробь в виде  $n + \frac{k}{x-m}$ .

Имеем

$$\frac{2x+4}{x-1} = \frac{2x-2+6}{x-1} = \frac{2(x-1)+6}{x-1} = 2 + \frac{6}{x-1}.$$

Здесь  $k = 6$ ,  $m = 1$ ,  $n = 2$ .

График функции  $y = \frac{6}{x-1} + 2$  можно получить из графика функции  $y = \frac{6}{x}$  с помощью двух параллельных переносов: сдвига гиперболы  $y = \frac{6}{x}$  на 1 единицу вправо вдоль оси  $x$  и сдвига полученного графика  $y = \frac{6}{x-1}$  на 2 единицы вверх в направлении оси  $y$ . При этом преобразовании сдвинутся и асимптоты гиперболы  $y = \frac{6}{x}$ : ось  $x$  перейдет в прямую  $y = 2$ , а ось  $y$  — в прямую  $x = 1$ .

Для построения графика данной функции поступим так: проведем в координатной плоскости пунктиром асимптоты: прямую  $x = 1$  и прямую  $y = 2$ . Так как гипербола состоит из двух ветвей, то для построения этих ветвей составим две

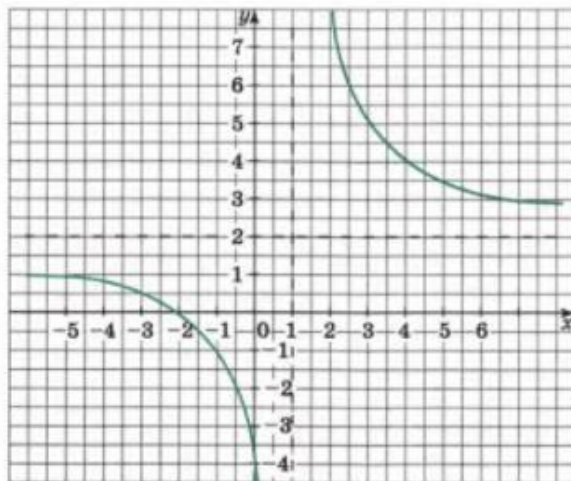


Рис. 45

таблицы: одну для  $x < 1$ , другую для  $x > 1$ .

$x$	-5	-3	-2	-1	0
$y$	1	0,5	0	-1	-4

$x$	2	3	4	5	7
$y$	8	5	4	3,5	3

Отметив в координатной плоскости точки, координаты которых указаны в первой таблице, и соединив их плавной непрерывной линией, получим одну ветвь гиперболы. Аналогично, используя вторую таблицу, получим вторую ветвь гиперболы.

График функции  $y = \frac{2x+4}{x-1}$  изображен на рисунке 45. ◀

## Задание 22. Пример 1. Решение 1/2

№ 22 с 2021 года

23

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

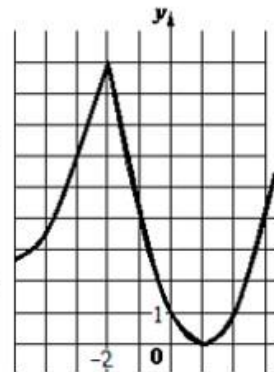
и определите, при каких значениях  $m$  прямая  $y = m$  имеет с графиком одну или две общие точки.

**Решение.**

Построим график функции  $y = -\frac{18}{x}$  при  $x < -2$  и график функции  $y = x^2 - 2x + 1$  при  $x \geq -2$ .

Прямая  $y = m$  имеет с графиком одну или две общие точки при  $m = 0$  и при  $m \geq 9$ .

**Ответ:**  $0; [9; +\infty)$ .



Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

## Задание 22. Пример 1. Решение 2

№ 22 с 2021 года

**Решение.**

Построим график функции  $y = -\frac{18}{x}$ .

Графиком является гипербола, состоящая из двух ветвей, расположенных во второй и четвертой четвертях.

Так как нужна ветвь гиперболы при  $x < -2$ , то строим ветвь во второй четверти.

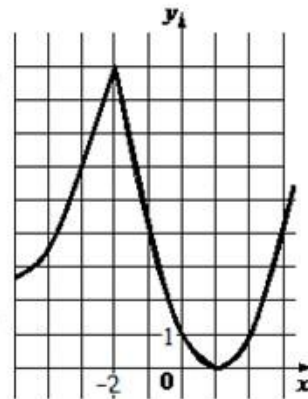
x	-1	-2	-3	-6	-9	-18
y	18	9	6	3	2	1

Построим график функции  $y = x^2 - 2x + 1$ . Квадратичная функция, графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.

Вершина параболы – (1; 0). Так нам нужна часть параболы при  $x \geq -2$ , то вычислим координаты точек при  $x \geq -2$ , учитывая симметрию относительно прямой  $x = 1$ .

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	9	4	1	0	1	4	9

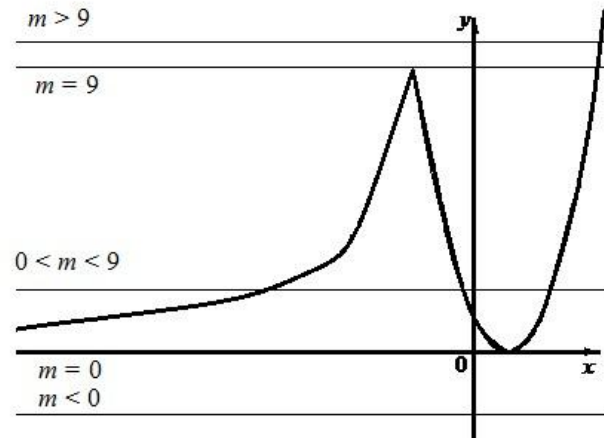
Оставим ветвь гиперболы при  $x < -2$  и часть параболы при  $x \geq -2$ . (В точке  $x = -2$  происходит «склейка» графиков.)



Задание 22. Пример 1. Решение 2  
(окончание)

№ 22 с 2021 года

Построим семейство прямых  $y = t$ , параллельных или совпадающих с осью  $Ox$ .



При  $m < 0$  прямая  $y = t$  с графиком функции не имеет общих точек;  
при  $m = 0$  прямая  $y = t$  с графиком функции имеет одну общую точку;  
при  $0 < m < 9$  прямая  $y = t$  с графиком функции имеет три общих точки;  
при  $m = 9$  прямая  $y = t$  с графиком функции имеет две общие точки;  
при  $m > 9$  прямая  $y = t$  с графиком функции имеет одну общую точку.

Прямая  $y = t$  имеет с графиком одну или две общие точки при  $m = 0$  и при  $m \geq 9$ .

Ответ:  $0; [9; +\infty)$ .



Задание 22. Пример 1. Работа 1

№ 22 с 2021 года

23)  $y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & (x \geq -2) \\ -\frac{18}{x} & (x < -2) \end{cases}$

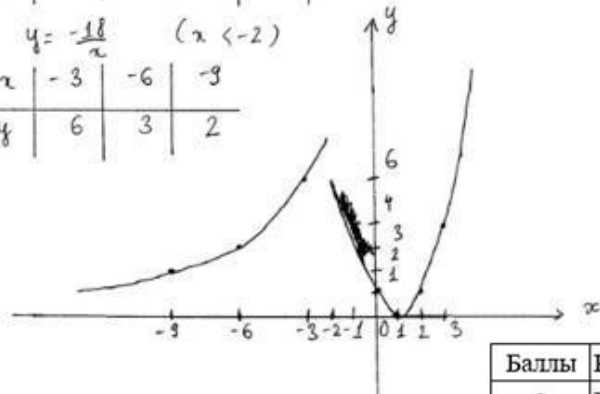
⊕  $y = x^2 - 2x + 1 \quad (x \geq -2)$

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow y_0 = 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

x	-1	0	1	2	3
y	4	1	0	1	4

⊖  $y = -\frac{18}{x} \quad (x < -2)$

x	-3	-6	-9
y	6	3	2



23

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях  $m$  прямая  $y = m$  имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: 0;  $[9; +\infty)$ .

Рассмотрим на график:

При  $x = -2$  прямая  $y = m$  имеет с графиком две общие точки

$x = -2 \Rightarrow m = y = 9$

Ответ: 9

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

? баллов

Задание 22. Пример 1. Работа 1

№ 22 с 2021 года

23)  $y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & (x \geq -2) \\ -\frac{18}{x} & (x < -2) \end{cases}$

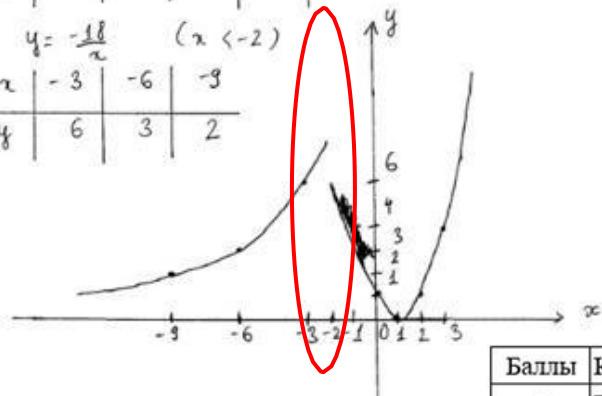
⊕  $y = x^2 - 2x + 1 \quad (x \geq -2)$

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow y_0 = 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

x	-1	0	1	2	3
y	4	1	0	1	4

⊕  $y = -\frac{18}{x} \quad (x < -2)$

x	-3	-6	-9
y	6	3	2



23

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях  $m$  прямая  $y = m$  имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: 0;  $[9; +\infty)$ .

Рассмотрим на график:

При  $x = -2$  прямая  $y = m$  имеет с графиком две общие точки

$x = -2 \Rightarrow m = y = 9$

Ответ: 9

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

0 баллов

Задание 22. Пример 1. Работа 2

№ 22 с 2021 года

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1; & \text{при } x \geq -2 \\ -\frac{18}{x}; & \text{при } x < -2 \end{cases}$$

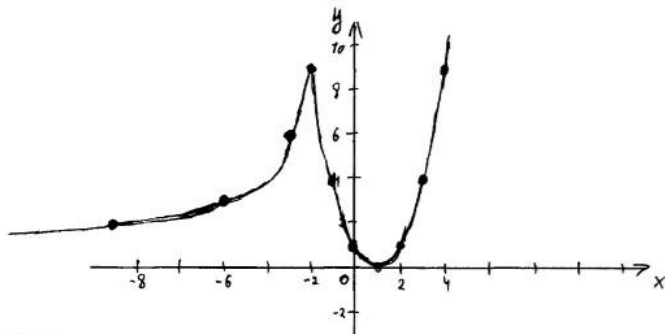
$$-\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \quad y = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 9 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$y = x^2 - 2x + 1; \text{ при } x \geq -2$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & -2 & -1 & -3 & -4 \\ \hline y & 9 & 6 & 3 & 2 \end{array}$$

$$y = -\frac{18}{x}, \text{ при } x < -2$$



Ответ: при  $m = 0$  и  $m \in [9; +\infty)$

23

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях  $m$  прямая  $y = m$  имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ:  $0; [9; +\infty)$ .

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

? баллов

Задание 22. Пример 1. Работа 2

№ 22 с 2021 года

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1; & \text{при } x \geq -2 \\ -\frac{18}{x}; & \text{при } x < -2 \end{cases}$$

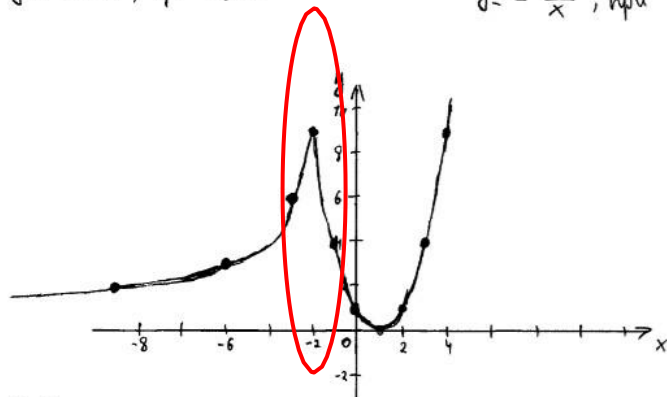
$$-\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \quad y = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 9 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$y = x^2 - 2x + 1; \text{ при } x \geq -2$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x & -2 & -1 & -3 & -4 \\ \hline y & 9 & 6 & 3 & 2 \end{array}$$

$$y = -\frac{18}{x}, \text{ при } x < -2$$



Ответ: при  $m = 0$  и  $m \in [9; +\infty)$

23

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях  $m$  прямая  $y = m$  имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ:  $0; [9; +\infty)$ .

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

0 баллов

Задание 22. Пример 1. Работа 3

№ 22 с 2021 года

23

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях  $m$  прямая  $y = m$  имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ:  $0; [9; +\infty)$ .

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{при } x \geq -2 \\ -\frac{18}{x}, & \text{при } x < -2 \end{cases}$$

1)  $y = x^2 - 2x + 1$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_0 = (1)^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

$(1; 0)$  – вершина

x	2	3	4
y	1	4	9

x	0	-1	-2
y	1	4	9

2)  $y = -\frac{18}{x}$

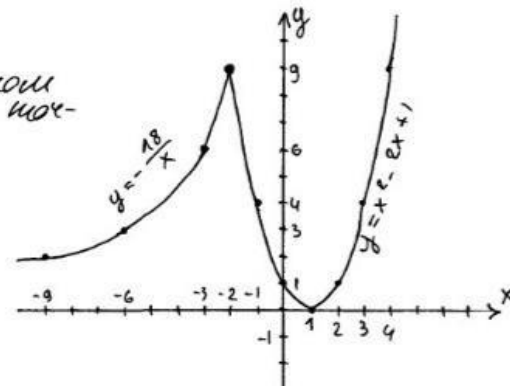
x	3	6	2
y	-6	-3	-9

x	-3	-6	-2
y	6	3	9

$y = m$   
 $m$  – ? (имеем с графиком одну или две общие точки)

$m = 0; [9; +\infty)$

Ответ:  $0; [9; +\infty)$  –  $m$



Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

? баллов

Задание 22. Пример 1. Работа 3

№ 22 с 2021 года

23

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях  $m$  прямая  $y = m$  имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ:  $0; [9; +\infty)$ .

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{при } x \geq -2 \\ -\frac{18}{x}, & \text{при } x < -2 \end{cases}$$

1)  $y = x^2 - 2x + 1$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_0 = (1)^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

$(1; 0)$  - вершина

x	2	3	4
y	1	4	9

x	0	-1	-2
y	1	4	9

2)  $y = -\frac{18}{x}$

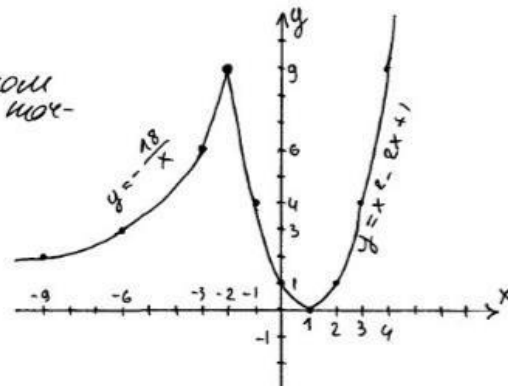
x	3	6	2
y	-6	-3	-9

x	-3	-6	-2
y	6	3	9

$y = m$   
 $m = ?$  (имеем с графиком одну или две общие точки)

$m = 0; [9; +\infty)$

Ответ:  $0; [9; +\infty)$  -  $m$



Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

0 баллов

Задание 22. Пример 1. Работа 4

№ 22 с 2021 года

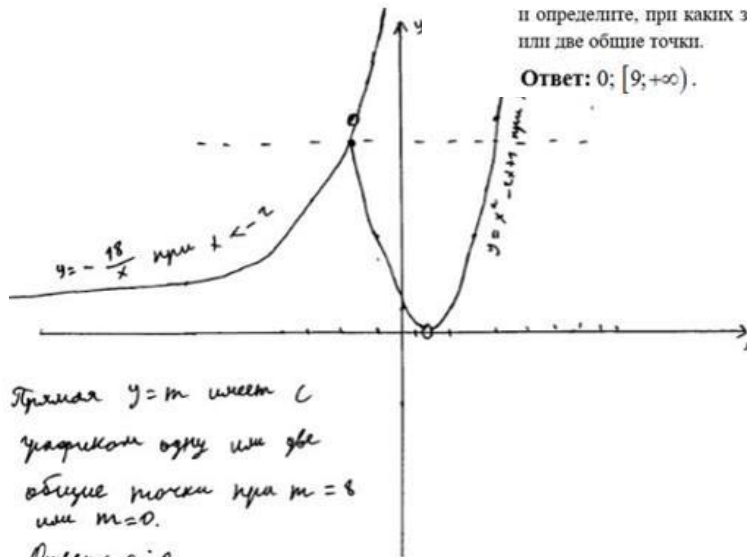
23

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях  $m$  прямая  $y = m$  имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: 0;  $[9; +\infty)$ .



Прямая  $y = m$  имеет с  
графиком одну или две  
общие точки при  $m = 0$   
или  $m \geq 9$ .  
Ответ: 0; 9

23.  $D(y): x \in (-\infty; 0); (0; +\infty)$ .

$$y = x^2 - 2x + 1$$

квадратичная функция

график - парабола

ветви вверх.

$$x_1 = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$y = -\frac{18}{x}$$

график - гиперболо.

$$\frac{x}{y} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 18 & 2 & 3 & \dots \\ \hline -1 & -1 & -3 & -2 & \dots \\ \hline \end{array}$$

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

? баллов

Задание 22. Пример 1. Работа 4

№ 22 с 2021 года

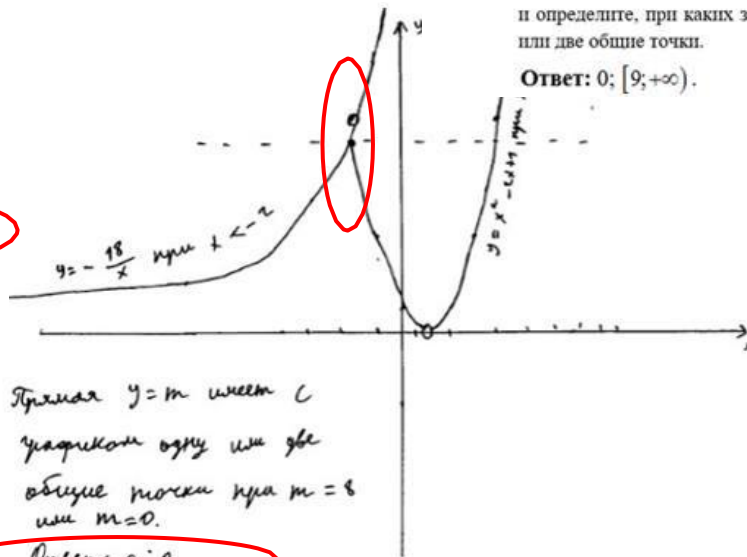
23

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях  $m$  прямая  $y = m$  имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: 0;  $[9; +\infty)$ .



Прямая  $y = m$  имеет с графиком одну или две общие точки при  $m = 8$  или  $m = 0$ .

Ответ: 0; 8

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

0 баллов

23  $D(y): x \in (-\infty; 0); (0; +\infty)$ .

$y = x^2 - 2x + 1$   
 квадратичная функция  
 график - парабола  
 ветви вверх.  
 $x_0 = \frac{2}{2} = 1$   
 $y_0 = 1 - 2 + 1 = 0$

$y = -\frac{18}{x}$   
 график - гиперболоа.

x	1	18	2	3	...
y	-18	-1	-3	-2	...



Задание 22. Пример 1. Работа 5

№ 22 с 2021 года

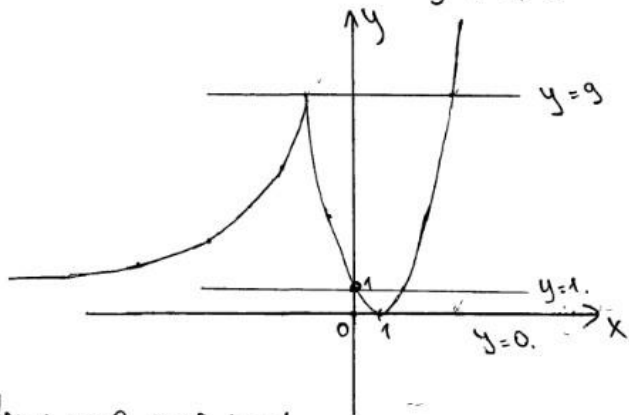
№23.

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{при } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x} & \text{при } x < -2, \end{cases}$$

$$y = x^2 - 2x + 1 = 0$$

~~.....~~  
↑, 0(1; 0)

x	0	-1	-2
y	1	4	9



Ответ:  $m > 0$ ,  $m = 9$ ,  $m = 1$ .

23

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях  $m$  прямая  $y = m$  имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ:  $0; [9; +\infty)$ .

$$y = -\frac{18}{x}$$

x	-2	-3	-6	-9
y	9	6	3	2

OD3  
 $x \neq 0$ .

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

? баллов

Задание 22. Пример 1. Работа 5

№ 22 с 2021 года

№23.

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{при } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x} & \text{при } x < -2, \end{cases}$$

$$y = x^2 - 2x + 1 = 0$$

~~Дискриминант~~  
 $\uparrow, 0(1; 0)$

x	0	-1	-2
y	1	4	9

$$y = -\frac{18}{x}$$

x	-2	-3	-6	-9
y	9	6	3	2

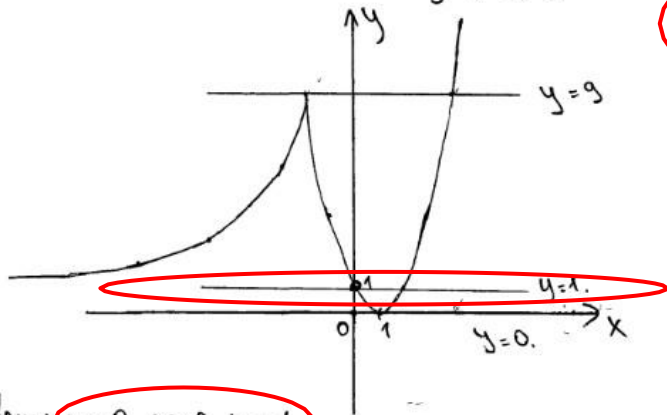
23

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях  $m$  прямая  $y = m$  имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ:  $0; [9; +\infty)$ .



0, 3  
 $x \neq 0$

Ответ:  $m = 0, m = 9, m = 1$ .

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

0 баллов

## Задание 22. Пример 2. Решение 1/3

№ 22 с 2021 года

23 Постройте график функции

$$y = |x^2 - 4x + 3|.$$

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

**Решение.**

Построим график функции  $y = x^2 - 4x + 3$  при  $x < 1$  и  $x > 3$  и график функции  $y = -x^2 + 4x - 3$  при  $1 \leq x \leq 3$ .

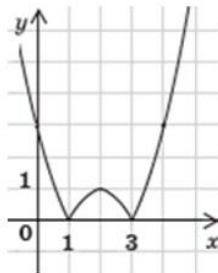


График данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс, 0, 2, 3 или 4 общие точки.

**Ответ:** 4.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдено искомое количество точек
1	График построен верно, но искомое количество точек найдено неверно или не найдено
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

## Задание 22. Пример 2. Решение 2/3

№ 22 с 2021 года

**Решение.**

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{если } x^2 - 4x + 3 \geq 0, \\ -x^2 + 4x - 3, & \text{если } x^2 - 4x + 3 \leq 0; \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{если } x \leq 1 \text{ или } x \geq 3, \\ -x^2 + 4x - 3, & \text{если } 1 < x < 3. \end{cases}$$

Построим график этой функции:

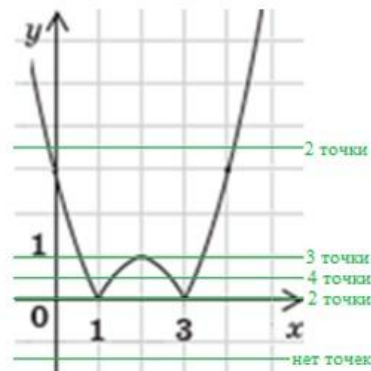
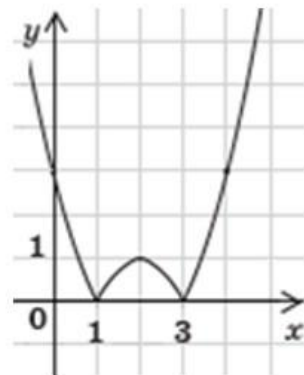
1) При  $x < 1$  и  $x > 3$  – часть параболы  $y = x^2 - 4x + 3$  – ветви направлены вверх, вершина имеет координаты  $(2; -1)$  – расположенная в верхней полуплоскости относительно оси  $Ox$ .

2) При  $1 \leq x \leq 3$  – часть параболы  $y = -x^2 + 4x - 3$  – ветви направлены вниз, вершина имеет координаты  $(2; 1)$  – расположенная в нижней полуплоскости относительно оси  $Ox$ .

Обе параболы проходят через точки  $(1; 0)$  и  $(3; 0)$ .

Прямая, параллельная оси абсцисс, может иметь с построенным графиком функции 0, 2, 3 и 4 точки. Наибольшее число общих точек – 4.

**Ответ:** 4.



## Задание 22. Пример 2. Решение 3

№ 22 с 2021 года

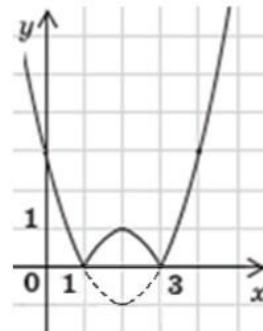
**Решение.**

$$|x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{если } x^2 - 4x + 3 \geq 0, \\ -x^2 + 4x - 3, & \text{если } x^2 - 4x + 3 \leq 0; \end{cases}$$

$$|x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{если } x \leq 1 \text{ или } x \geq 3, \\ -x^2 + 4x - 3, & \text{если } 1 < x < 3. \end{cases}$$

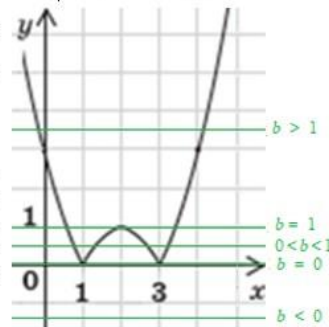
Построим график функции  $y = x^2 - 4x + 3$ .

Графиком функции  $y = x^2 - 4x + 3$  является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина имеет координаты  $(2; -1)$ .



При  $x < 1$  и  $x > 3$  графиком функции  $y = |x^2 - 4x + 3|$  будет часть параболы  $y = x^2 - 4x + 3$ , расположенная в верхней полуплоскости относительно оси  $Ox$ .

2) При  $1 \leq x \leq 3$  графиком функции  $y = |x^2 - 4x + 3|$  будет другая часть параболы  $y = x^2 - 4x + 3$ , отраженная симметрично относительно оси  $Ox$  в верхнюю полуплоскость координатной плоскости.



Прямая, параллельная оси абсцисс, задается уравнением  $y = b$ . Эта прямая пересекает построенный график функции в 2, 3 или 4 точках или не пересекает его. Наибольшее число общих точек – 4.

**Ответ:** 4.

Задание 22. Пример 2. Работа 1

№ 22 с 2021 года

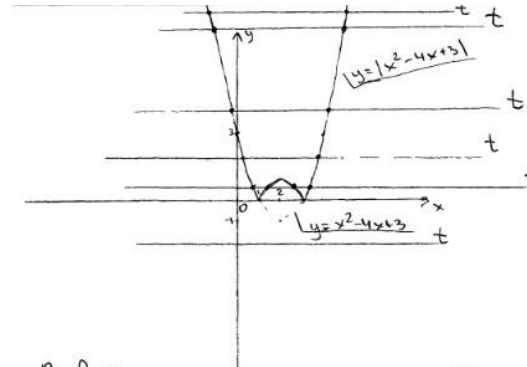
23

Постройте график функции

$$y = |x^2 - 4x + 3|.$$

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Ответ: 4.



Проведём прямые, параллельные оси абсцисс. Назовём их прямые  $t$  и отметим её точки пересечения с графиком  $y = |x^2 - 4x + 3|$   
 Ответ: 4 общих точки

№23 Решение  
 Построим график функции  $y = |x^2 - 4x + 3|$ . Графиком является парабола,  $a=1 \neq 0$   
 (ветви направлены вверх)

Чтобы построить график функции  $y = |f(x)|$  можно построить параболу, часть графика, лежащую выше оси  $Ox$  сохранить, а лежащую ниже оси  $Ox$  отобразить над осью  $Ox$ .

Найдём вершину параболы  $x_0; y_0$   $x_0 = -\frac{b}{2a}$ .  $x_0 = \frac{4}{2} = 2$

$$y_0 = 2^2 - 8 + 3 = -1 \quad (2; -1) - \text{вершина}$$

$$Oy: 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 \quad (0; 3)$$

$$Ox: x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$D = 16 - 12 = 4$$

$$x_1 = \frac{4+2}{2} = 3 \quad x_2 = \frac{4-2}{2} = 1 \quad (3; 0); (1; 0)$$

$$y(5) = 5^2 - 5 \cdot 4 + 3 = 25 - 20 + 3 = 8 \quad (5; 8)$$

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

? баллов

Задание 22. Пример 2. Работа 1

№ 22 с 2021 года

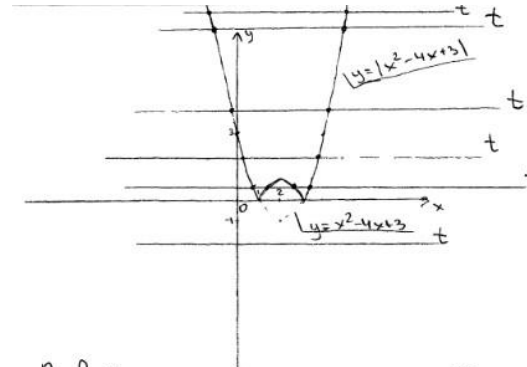
23

Постройте график функции

$$y = |x^2 - 4x + 3|.$$

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Ответ: 4.



Проведём прямые, параллельные оси абсцисс. Назовём их прямые  $t$  и отметим её точки пересечения с графиком  $y = |x^2 - 4x + 3|$   
 Ответ: 4 общих точки

№23 Решение  
 Построим график функции  $y = |x^2 - 4x + 3|$  Графиком является парабола,  $a=1 \neq 0$   
 (ветви направлены вверх)

Чтобы построить график функции  $y = |f(x)|$  можно построить параболу, часть графика, лежащую выше оси  $Ox$  сохранить, а лежащую ниже оси  $Ox$  отобразить над осью  $Ox$ .

Найдём вершину параболы  $x_0; y_0$   $x_0 = \frac{-b}{2a}$ .  $x_0 = \frac{4}{2} = 2$

$$y_0 = 2^2 - 8 + 3 = -1 \quad (2; -1) - \text{вершина}$$

$$Oy: 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 \quad (0; 3)$$

$$Ox: x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$D = 16 - 12 = 4$$

$$x_1 = \frac{4+2}{2} = 3 \quad x_2 = \frac{4-2}{2} = 1 \quad (3; 0); (1; 0)$$

$$y(5) = 5^2 - 5 \cdot 4 + 3 = 25 - 20 + 3 = 8 \quad (5; 8)$$

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

0 баллов

### Задание 22. Пример 3. Решение

№ 22 с 2021 года

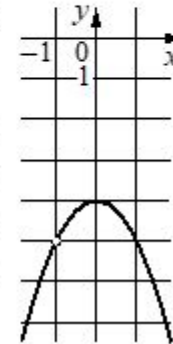
Постройте график функции  $y = \frac{(x^2 + 4)(x + 1)}{-1 - x}$  и определите, при каких значениях  $k$  прямая  $y = kx$  имеет с графиком ровно одну общую точку.

**Решение.**

Преобразуем выражение:  $\frac{(x^2 + 4)(x + 1)}{-1 - x} = -x^2 - 4$  при условии, что  $x \neq -1$ . Построим график (см. рисунок).

Прямая  $y = kx$  имеет с графиком ровно одну общую точку, если она проходит через точку  $(-1; -5)$  или если уравнение  $-x^2 - 4 = kx$  имеет один корень. Дискриминант уравнения  $x^2 + kx + 4 = 0$  равен  $k^2 - 16$ , и он должен быть равен нулю. Получаем, что  $k = 5$ ,  $k = -4$  и  $k = 4$ .

**Ответ:**  $k = 5$ ,  $k = -4$ ,  $k = 4$ .



Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл



# Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом: задания высокого уровня сложности (задание 22)

## Задание 22. Пример 3. Работа 1

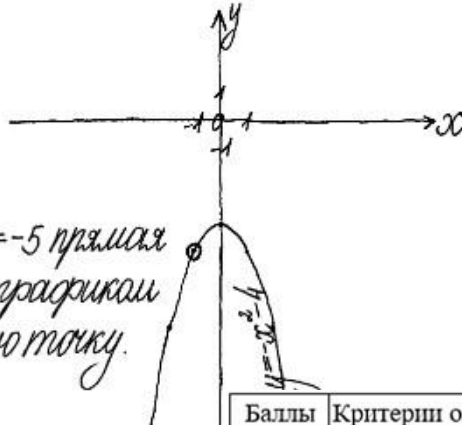
№ 22 с 2021 гола

$$y = \frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x} = \frac{(x^2+4)(x+1)}{-(1+x)} = -(x^2+4) = -x^2-4$$

$y = -x^2 - 4$  - ор. квадратичная, гр. парабола, ветки ↓, вершина  $(0, -4)$   
 $-1-x \neq 0$

$$-x \neq 1 \quad | \cdot (-1)$$

$$x \neq -1$$



При  $k = \pm 4$  и  $k = -5$  прямая  $y = kx$  имеет с графиком ровно одну общую точку.  
 Ответ:  $\pm 4; -5$ .

Постройте график функции  $y = \frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$  и определите, при каких значениях  $k$  прямая  $y = kx$  имеет с графиком ровно одну общую точку.  
 Ответ:  $k = 5, k = -4, k = 4$ .

$$\begin{aligned} kx &= -x^2 - 4 \\ kx + x^2 + 4 &= 0 \\ D &= k^2 - 4 \cdot 4 = \\ &= k^2 - 16 \\ k^2 - 16 &= 0 \\ (k-4)(k+4) &= 0 \\ k_1 &= 4 \text{ или } k_2 = -4 \end{aligned}$$

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

? баллов

Задание 22. Пример 3. Работа 1

№ 22 с 2021 года

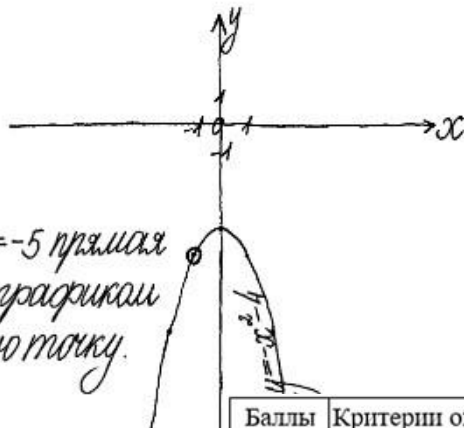
$$y = \frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x} = \frac{(x^2+4)(x+1)}{-(1+x)} = -(x^2+4) = -x^2-4$$

$y = -x^2 - 4$  - ор. квадратичная, гр. парабола, ветки ↓, вершина  $(0, -4)$  -

$$-1-x \neq 0$$

$$-x \neq 1 \quad | \cdot (-1)$$

$$x \neq -1$$



При  $k = \pm 4$  и  $k = -5$  прямая  $y = kx$  имеет с графиком ровно одну общую точку.  
Ответ:  $\pm 4; -5$ .

Постройте график функции  $y = \frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$  и определите, при каких значениях  $k$  прямая  $y = kx$  имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ:  $k = 5, k = -4, k = 4$ .

$$\begin{aligned} kx &= -x^2 - 4 \\ kx + x^2 + 4 &= 0 \\ D &= k^2 - 4 \cdot 4 = \\ &= k^2 - 16 \\ k^2 - 16 &= 0 \\ (k-4)(k+4) &= 0 \\ k_1 &= 4 \text{ или } k_2 = -4 \end{aligned}$$

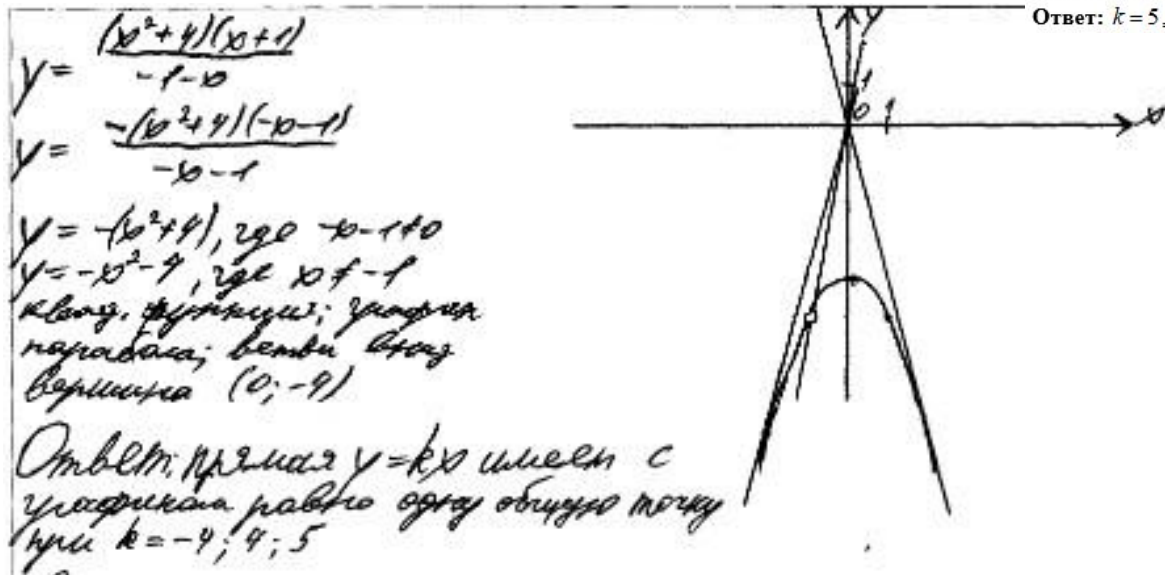
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

0 баллов

Задание 22. Пример 3. Работа 2

№ 22 с 2021 гола

Постройте график функции  $y = \frac{(x^2 + 4)(x + 1)}{-1 - x}$  и определите, при каких значениях  $k$  прямая  $y = kx$  имеет с графиком ровно одну общую точку.  
 Ответ:  $k = 5, k = -4, k = 4$ .



Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

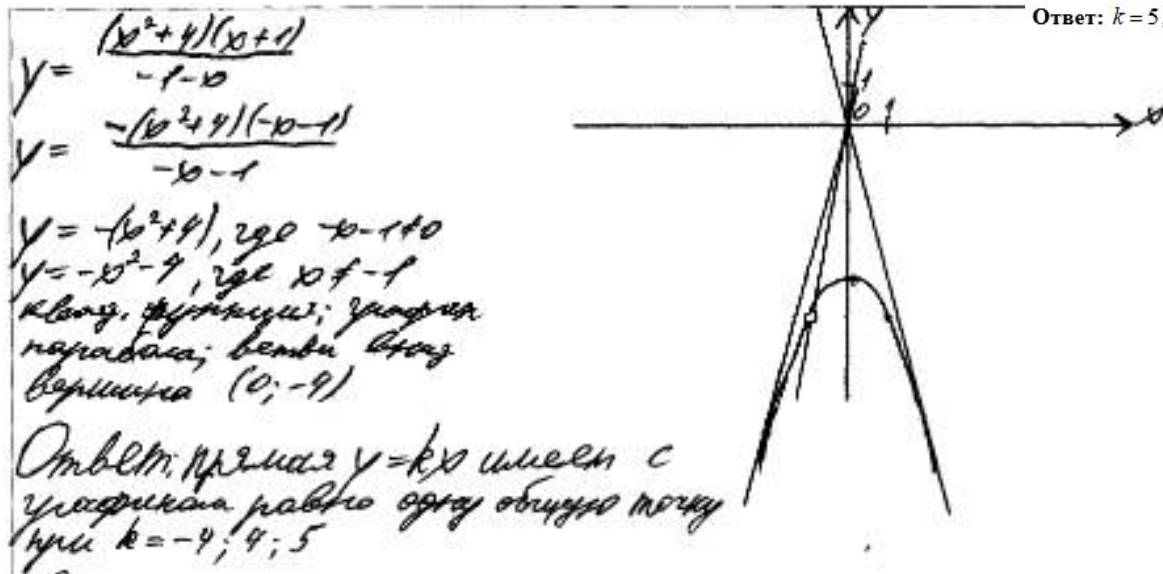
? баллов

Задание 22. Пример 3. Работа 2

№ 22 с 2021 гола

Постройте график функции  $y = \frac{(x^2 + 4)(x + 1)}{-1 - x}$  и определите, при каких значениях  $k$  прямая  $y = kx$  имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ:  $k = 5, k = -4, k = 4$ .



Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

0 баллов

## Задание 25. Пример 1

№ 25 с 2021 года

26

На стороне  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  ( $AB \neq AC$ ) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту  $AD$  в точке  $M$ ,  $AD = 9$ ,  $MD = 3$ ,  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ . Найдите  $AH$ .

**Решение.**

Пусть окружность с диаметром  $BC$  вторично пересекается с прямой  $AC$  в точке  $K$  (см. рис.). Поскольку  $BK$  — высота остроугольного треугольника  $ABC$ , точка  $K$  лежит на стороне  $AC$ .

Продолжим высоту  $AD$  за точку  $D$  до пересечения с окружностью в точке  $Q$ . Тогда  $DQ = MD = 3$ .

По следствию из теоремы о касательной и секущей

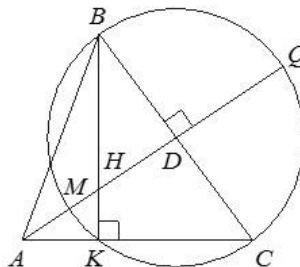
$$AK \cdot AC = AM \cdot AQ = (AD - MD) \cdot (AD + MQ) = 6 \cdot 12 = 72.$$

Из подобия прямоугольных треугольников  $AKH$  и  $ADC$  следует, что

$$\frac{AK}{AH} = \frac{AD}{AC}, \text{ откуда } AK \cdot AC = AD \cdot AH = 9AH.$$

Значит,  $9AH = 72$ . Следовательно,  $AH = 8$ .

**Ответ:** 8.



Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

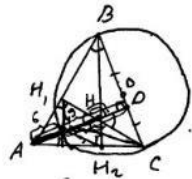
Задание 25. Пример 1. Работа 1

№ 25 с 2021 года

На стороне  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  ( $AB \neq AC$ ) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту  $AD$  в точке  $M$ ,  $AD=9$ ,  $MD=3$ ,  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ . Найдите  $AH$ .

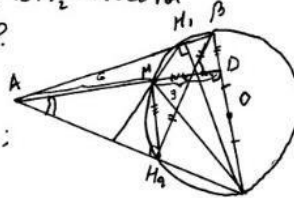
Ответ: 8.

№ 25



Дано:  
 $\triangle ABC$ ;  $\odot$  — диаметр  
 $BC = d$   
 $AD = 9$   $MD = 3$   
точка  $H$  — точка пересечения высот  
 $AD$ ;  $CH_1$ ;  $BH_2$  — высоты

Найти:  $AH = ?$



Решение:

$\triangle ABC$  — данный треугольник;  
 $BC$  — диаметр окружности  $\odot$ .

$AD = 9$ ;  $MD = 3$

$AM = AD - MD = 9 - 3 = 6$  (по условию измерения отрезков).

Доп. Построения.

Построено ~~эта~~ окружность  $MC$ .

Рассмотрю  $\triangle AM_1M$  и  $\triangle DCH_1$ .

они подобны по 1-ому признаку подобия треугольников.

Значит  $K = \frac{AD}{MC} = \frac{M_1M}{DM} = \frac{AB}{DC}$ .

$$K = \frac{9}{MC} = \frac{M_1M}{3} = \frac{AB}{DC} = K$$

Пусть  $MH = x$  см  $x > 0$ , тогда  $AH = x + 6$  см.

~~Рассмотрю  $\triangle ABD$  и  $\triangle ABH_1$ .~~

~~они подобны, значит  $K = 1,5$ .~~

Рассмотрю  $\triangle HBD$  и  $\triangle HH_2H$ .

они равны по 1-ому признаку равенства  $\triangle$ .  
( $\angle HHH_2 = \angle BHC$  как вертикальные)  
( $H_2H = BH$ ;  $H_1H = CH$ )

следовательно  $MD = HH + HD = 3 : 2 = 1,5$ .

$6 + 1,5 = 7,5$  (по условию измерения отрезков)

Ответ: 7,5 см.

$$\begin{aligned} 6 + 2x &= 9 \\ x &= 1,5 \\ AH &= 7,5 \end{aligned}$$

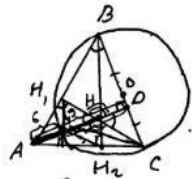
? баллов

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

Задание 25. Пример 1. Работа 1

№ 25 с 2021 года

№ 25



Дано:  
 $\triangle ABC$ ;  $\angle A = 90^\circ$   
 $BC = d$   
 $O$  - окружность

$AD = 9$   $MD = 3$   
точка  $H$  - точка пересечения высот

$AD$ ;  $CH$ ;  $BH_2$  - высоты

Найти:  $AH = ?$

Решение:

$\triangle ABC$  - данный треугольник;  
 $BC$  - диаметр окружности  $O$ .

$AD = 9$ ;  $MD = 3$

$AM = AD - MD = 9 - 3 = 6$  (по аксиоме измерения отрезков).

Доп. Построение.

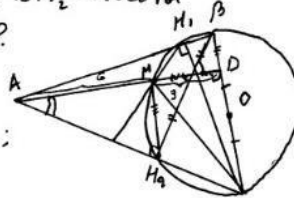
Построено ~~эта~~ окружность  $MC$ .

Рассмотрю  $\triangle AM_1H$  и  $\triangle DCH$ .

они подобны по 1-ому признаку подобия треугольников.

Значит  $K = \frac{AD}{MC} = \frac{H_1H}{DM} = \frac{AB}{DC}$

$$K = \frac{9}{3} = \frac{H_1H}{3} = \frac{AB}{DC} = K$$



На стороне  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  ( $AB \neq AC$ ) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту  $AD$  в точке  $M$ ,  $AD = 9$ ,  $MD = 3$ ,  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ . Найдите  $AH$ .

Ответ: 8.

Пусть  $MH = x$  см  $x > 0$ , тогда  $AH = x + 6$  см.

~~Рассмотрю  $\triangle ABM$  и  $\triangle AMH$ .~~

$$\begin{aligned} 6 + 2x &= 9 \\ x &= 1,5 \\ AH &= 7,5 \end{aligned}$$

~~они подобны, значит  $K = 1,5$ .~~

Рассмотрю  $\triangle H_1BD$  и  $\triangle HM_2H$ .

они равны по 1-ому признаку равенства  $\triangle$ .  
( $\angle H_1BH_2 = \angle B_1MC$  как вертикальные)  
( $H_2H = BH_1$ ;  $H_1H = CH_2$ )

следовательно  $MD = HH_1 + HD = 3 : 2 = 1,5$ .

$6 + 1,5 = 7,5$  (по аксиоме измерения отрезков)

Ответ: 7,5 см.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

0 баллов

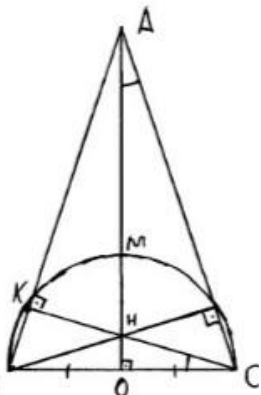
# Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом: задания высокого уровня сложности (задание 25)

## Задание 25. Пример 1. Работа 2

№ 25 с 2021 года

На стороне  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  ( $AB \neq AC$ ) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту  $AD$  в точке  $M$ ,  $AD=9$ ,  $MD=3$ ,  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ . Найдите  $AH$ .

Ответ: 8.



Решение:

т. М делит отрезок AD в отношении

$$\frac{AM}{MD} = \frac{AD - MD}{MD} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}, \text{ считая от вершины}$$

$\Rightarrow$  т. М — точка пересечения медиан  $\triangle ABC$ . ~~но как.~~

AM — медиана  $\triangle ABC$ , но т.к.  $AM \in AD$ , то есть AD является и высотой, и медианой  $\triangle ABC$  одновременно  $\Rightarrow \triangle ABC$  — равнобедренный (по признаку).

Рассмотрим  $\triangle AOC$  и  $\triangle CKB$ . ~~какие-то~~

$\angle KBO = \angle OCA$  (по св-ву равнобедренного треугольника)

$\angle AOC = \angle CKB = 90^\circ \Rightarrow$

$\triangle AOC \sim \triangle CKB$  (по двум углам).

Рассмотрим  $\triangle CKB$  и  $\triangle CDH$ :

$\angle KCB$  — общий;

$\angle BKC = \angle HDC = 90^\circ \Rightarrow$

$\triangle CKB \sim \triangle CDH$ .

т.к.  $\triangle AOC \sim \triangle CKB$ ,  
 $\triangle CKB \sim \triangle CDH$  }  $\Rightarrow \triangle AOC \sim \triangle CDH$  по 3 углам

т.к.  $\triangle AOC \sim \triangle CDH$ , то  $\Rightarrow \frac{OC}{AD} = \frac{HD}{DC} \Rightarrow$

$$DC^2 = AD \cdot HD; HD = \frac{DC^2}{AD}; HD = \frac{3^2}{9} = 1$$

$AH = AD - HD$  (по св-ву отрезков)

$$AH = 9 - 1 = 8$$

Ответ: 8.

? баллов

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл



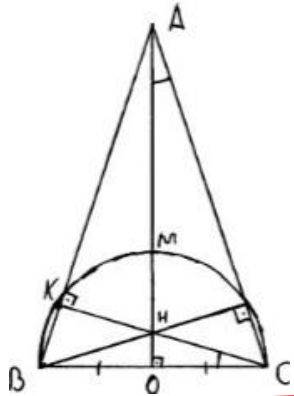
# Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом: задания высокого уровня сложности (задание 25)

## Задание 25. Пример 1. Работа 2

№ 25 с 2021 года

На стороне  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  ( $AB \neq AC$ ) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту  $AD$  в точке  $M$ ,  $AD=9$ ,  $MD=3$ ,  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ . Найдите  $AH$ .

Ответ: 8.



Решение:

т. М делит отрезок AD в отношении

$$\frac{AM}{MD} = \frac{AD - MD}{MD} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}, \text{ считая от вершины}$$

→ т. М — точка пересечения медиан  $\triangle ABC$ . ~~по ка.~~

AM — медиана  $\triangle ABC$ , но т.к.  $AM \in AD$ , то есть AD является и высотой, и медианой  $\triangle ABC$  одновременно →

$\triangle ABC$  — равнобедренный (по признаку).

Рассмотрим  $\triangle AOC$  и  $\triangle CKB$ . ~~по ка.~~

$\angle KBO = \angle OCA$  (по св-ву равнобедренного треугольника)

$\angle AOC = \angle CKB = 90^\circ \Rightarrow$

$\triangle AOC \sim \triangle CKB$  (по двум углам).

Рассмотрим  $\triangle CKB$  и  $\triangle CDH$ :

$\angle KCB$  — общий;

$\angle BKC = \angle HDC = 90^\circ \Rightarrow$

$\triangle CKB \sim \triangle CDH$ .

т.к.  $\triangle AOC \sim \triangle CKB$ ,  
 $\triangle CKB \sim \triangle CDH$  }  $\Rightarrow \triangle AOC \sim \triangle CDH$  по 3 углам

т.к.  $\triangle AOC \sim \triangle CDH$ , то  $\Rightarrow \frac{OC}{AD} = \frac{HD}{DC} \Rightarrow$

$$DC^2 = AD \cdot HD; HD = \frac{DC^2}{AD}; HD = \frac{3^2}{9} = 1$$

$AH = AD - HD$  (по св-ву отрезков)

$$AH = 9 - 1 = 8$$

Ответ: 8.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

0 баллов

# Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом: задания высокого уровня сложности (задание 25)

## Задание 25. Пример 1. Работа 3

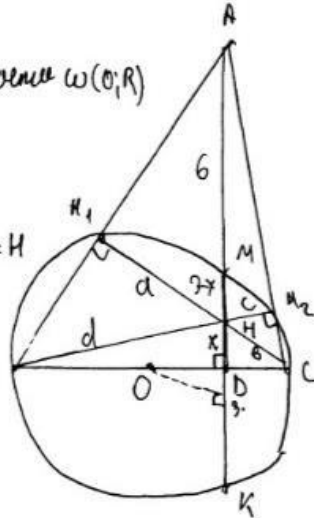
№ 25 с 2021 года

На стороне  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  ( $AB \neq AC$ ) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту  $AD$  в точке  $M$ ,  $AD=9$ ,  $MD=3$ ,  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ . Найдите  $AH$ .

Ответ: 8.

√26

- 1) дополним полукругом, до окружности  $\omega(O; R)$
- 2)  $BA \cap \omega = K_1$ ;  $AC \cap \omega = K_2$ ;  $AD \cap \omega = M$ ;  $K$
- 3) т.к.  $BC$  диаметр  $\Rightarrow \angle BK_1C = \angle BK_2C = 90^\circ \Rightarrow$   
 $CK_1$  и  $CK_2$  высоты  $\triangle ABC \Rightarrow AOK_1BK_2 \text{ и } AK_1CK_2$  —  
 циклы  $OK_1K_2$ ;
- 4) проведем с.л.  $MK \Rightarrow$  он проходит через  $O$   
 $\Rightarrow$  с.л.  $BC \parallel (BC \text{ и } OK_1 \perp BC) \Rightarrow BC$  проходит  
 через с.л.  $MK \Rightarrow MD = DK = 3$
- 5) пусть  $K_1K = a$ ;  $K_2C = b$ ;  $K_1K_2 = c$ ;  $BK_1 = d$



$\triangle H_1CK_2 \sim \triangle H_2CK_1$ .  $\angle AOK_1C = 90^\circ = \angle AK_1CK_2$ ;  $\angle K_1KA = \angle K_2KC \Rightarrow$

$$\frac{a}{x} = \frac{9-x}{6} = ab = (9-x)x$$

аналогично по теореме о произведении секущих

$$ab = (3+x)(9-x) = 9-x^2 \Rightarrow 9x-x^2 = 9-x^2 \Rightarrow 9x=9 \Rightarrow x=1$$

Ответ:  $AH = 9-1 = 8$

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

? баллов

# Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом: задания высокого уровня сложности (задание 25)

## Задание 25. Пример 1. Работа 3

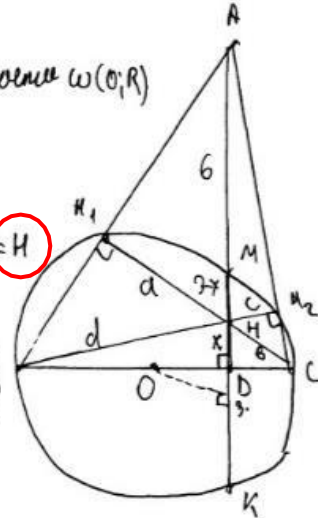
№ 25 с 2021 года

На стороне  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  ( $AB \neq AC$ ) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту  $AD$  в точке  $M$ ,  $AD=9$ ,  $MD=3$ ,  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ . Найдите  $AH$ .

Ответ: 8.

√26

- 1) дополним полукругом, до окружности  $\omega(O; R)$
- 2)  $BA \cap \omega = K_1$ ;  $AC \cap \omega = K_2$ ;  $AD \cap \omega = M$ ;  $K$
- 3) т.к.  $BC$  диаметр  $\Rightarrow \angle BK_1C = \angle BK_2C = 90^\circ \Rightarrow$   
 $CK_1$  и  $CK_2$  высоты  $\triangle ABC \Rightarrow AOK_1BK_2 \Rightarrow AH = H$   
 пусть  $BK = x$ ;
- 4) проведем с.л.  $MK \Rightarrow$  он проходит через  $O$   
 $\Rightarrow$  с.л.  $\perp BC$  по с.л.  $\perp BO \Rightarrow BC$  проходит  
 через с.л.  $MK \Rightarrow MD = DK = 3$
- 5) пусть  $K_1K = a$ ;  $K_2C = b$ ;  $K_1K_2 = c$ ;  $BK = d$



$\triangle H_1$  ч.л.  $\triangle DK_1C$  т.к.  $\angle ADK = 90^\circ = \angle AK_1C$ ;  $\angle K_1MA = \angle DK_1C \Rightarrow$

$$\frac{a}{x} = \frac{9-x}{6} = ab = (9-x)x$$

аналогично по теореме о **прямых углах** векторов

$$ab = (3+x)(9-x) = 9-x^2 \Rightarrow 9x-x^2 = 9-x^2 \Rightarrow 9x=9 \Rightarrow x=1$$

Ответ:  $AH = 9-1 = 8$

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

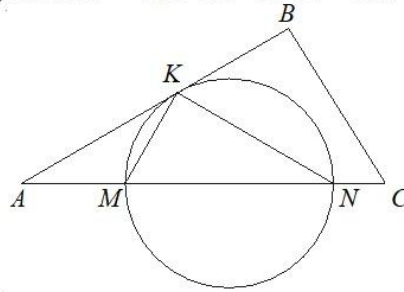
2 балла

## Задание 25. Пример 2

- 26 Точки  $M$  и  $N$  лежат на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  на расстояниях соответственно 16 и 39 от вершины  $A$ . Найдите радиус окружности, проходящей через точки  $M$  и  $N$  и касающейся луча  $AB$ , если  $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{39}}{8}$ .

**Решение.**

Пусть  $K$  — точка касания окружности с лучом  $AB$  (см. рис.). По теореме о касательной и секущей  $AK^2 = AM \cdot AN = 16 \cdot 39 = 624$ .



По теореме косинусов

$$KM^2 = AM^2 + AK^2 - 2AM \cdot AK \cos \angle BAC = 256 + 624 - 2 \cdot 16 \cdot \sqrt{624} \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = 256.$$

Значит,  $KM = 16$ . Треугольник  $AKM$  равнобедренный, поэтому  $\angle AKM = \angle KAM = \angle BAC$ .

По теореме об угле между касательной и хордой  $\angle KNM = \angle AKM = \angle BAC$ .

Пусть  $R$  — радиус окружности, проходящей через точки  $M$ ,  $N$  и  $K$ .

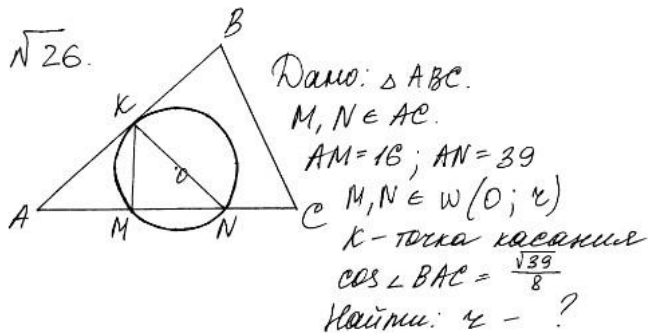
По теореме синусов

$$R = \frac{KM}{2 \sin \angle KNM} = \frac{16}{2 \sqrt{1 - \frac{39}{64}}} = 12,8.$$

**Ответ:** 12,8.

Задание 25. Пример 2. Работа 1

№ 25 с 2021 года



26 Точки  $M$  и  $N$  лежат на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  на расстояниях соответственно 16 и 39 от вершины  $A$ . Найдите радиус окружности, проходящей через точки  $M$  и  $N$  и касающейся луча  $AB$ , если

$$\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{39}}{8}.$$

Ответ: 12,8.

3. Рассмотрим  $\triangle KMN$ : ( $MN = AN - AM = 39 - 16 = 23$ )  
 $KM^2 = KN^2 + MN^2 - 2 \cdot KN \cdot MN \cdot \cos \angle KNM$ .

$$KM = \sqrt{624 + 529 - 2 \cdot 23 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} \cdot 1139} = \sqrt{1153 - 897} = 16$$

4. по теореме синусов: (по теореме косинусов)

$$\frac{KM}{\sin \angle KNM} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{KM}{2 \sin \angle KNM}$$

~~$\sin \angle KNM$~~   
 $\sin^2 \angle KNM + \cos^2 \angle KNM = 1$  - основное тригонометрическое тождество  
 $\sin \angle KNM = \sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8}$

$$R = \frac{16}{\frac{10}{8}} = 16 \cdot \frac{4}{5} = \frac{64}{5} = 12 \frac{4}{5} = 12,8$$

Ответ:  $R = 12,8$ .

1.  $AK^2 = AM \cdot AN$  (по теореме о касательной и секущей)  
 $AK^2 = 16 \cdot 39 = 624$ .

2. Рассмотрим  $\triangle AKN$ .  
 $\angle KAN = \frac{1}{2} \angle KMN$  (по теореме об угле между секущей и касательной)  
 $\angle KNM = \frac{1}{2} \angle KMN$  (вписанный угол)  
 $\Rightarrow \triangle AKN \sim \triangle KMN$

$$KN = AK$$

$$\cos \angle BAC = \cos \angle KNM.$$

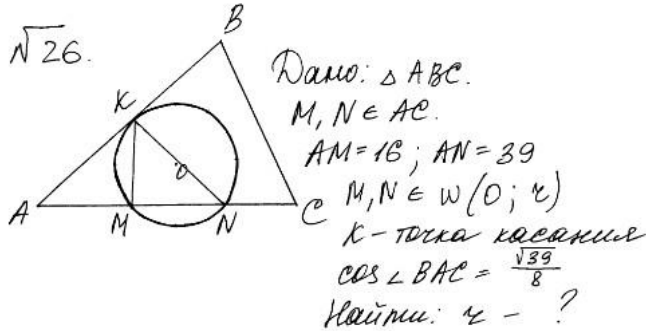
? баллов

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

# Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом: задания высокого уровня сложности (задание 25)

## Задание 25. Пример 2. Работа 1

№ 25 с 2021 года



26 Точки  $M$  и  $N$  лежат на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  на расстояниях соответственно 16 и 39 от вершины  $A$ . Найдите радиус окружности, проходящей через точки  $M$  и  $N$  и касающейся луча  $AB$ , если  $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{39}}{8}$ .

Ответ: 12,8.

1.  $AK^2 = AM \cdot AN$  (по теореме о касательной и секущей)  
 $AK^2 = 16 \cdot 39 = 624$ .

2. Рассмотрим  $\triangle AKN$ .  
 $\angle KAN = \frac{1}{2} \angle KAM$  (по теореме об угле между секущей и касательной)  
 $\angle KNM = \frac{1}{2} \angle KAM$  (вписанный угол)  
 $\Rightarrow \triangle AKN \sim \triangle NKM$

$KN = AK$   
 $\cos \angle BAC = \cos \angle KNM$ .

3. Рассмотрим  $\triangle KMN$ : ( $MN = AN - AM = 39 - 16 = 23$ )  
 $KM^2 = KN^2 + MN^2 - 2 \cdot KN \cdot MN \cdot \cos \angle KNM$ .  
 $KM = \sqrt{624 + 529 - 2 \cdot 23 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} \cdot \sqrt{624}} = \sqrt{1153 - 897} = 16$

4. по теореме синусов: (по теореме косинусов)  
 $\frac{KM}{\sin \angle KNM} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{KM}{2 \sin \angle KNM}$

~~$\sin \angle KNM$~~   
 $\sin^2 \angle KNM + \cos^2 \angle KNM = 1$  - основное тригонометрическое тождество  
 $\sin \angle KNM = \sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8}$

$R = \frac{16}{\frac{10}{8}} = 16 \cdot \frac{4}{5} = \frac{64}{5} = 12 \frac{4}{5} = 12,8$

Ответ:  $R = 12,8$ .

2 балла

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

### Задание 25. Пример 3. Решение

№ 25 с 2021 года

Точки  $M$  и  $N$  лежат на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  на расстояниях соответственно 4 и 15 от вершины  $A$ . Найдите радиус окружности, проходящей через точки  $M$  и  $N$  и касающейся луча  $AB$ , если

$$\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

**Решение.**

Пусть  $K$  — точка касания окружности с лучом  $AB$  (см. рис.). По теореме о касательной и секущей  $AK^2 = AM \cdot AN = 4 \cdot 15 = 60$ .

По теореме косинусов

$$\begin{aligned} KM^2 &= AM^2 + AK^2 - 2AM \cdot AK \cos \angle BAC = \\ &= 16 + 60 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{60} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 16 \end{aligned}$$

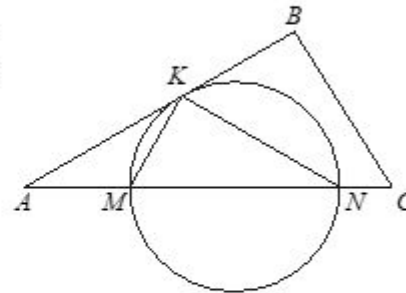
Значит,  $KM = 4$ . Треугольник  $AKM$  равнобедренный, поэтому  $\angle AKM = \angle KAM = \angle BAC$ .

По теореме об угле между касательной и хордой  $\angle KNM = \angle AKM = \angle BAC$ .

Пусть  $R$  — радиус окружности, проходящей через точки  $M$ ,  $N$  и  $K$ . По

$$\text{теореме синусов } R = \frac{KM}{2 \sin \angle KNM} = \frac{4}{2 \sqrt{1 - \frac{15}{16}}} = 8.$$

**Ответ:** 8.

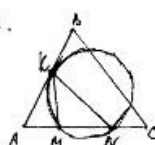


# Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом: задания высокого уровня сложности (задание 25)

## Задание 25. Пример 3. Работа 1

### № 25 с 2021 года

26.



Дано:  
 $AM = 4, AN = 15$   
 $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}$

Найти:  $R$

Решение:

$$AK^2 = \sqrt{AM \cdot AN} = \sqrt{4 \cdot 15} = 2\sqrt{15}$$

$\triangle AMK$ : По т. косинусов

$$KM = \sqrt{AK^2 + AM^2 - 2 \cdot AK \cdot AM \cdot \cos \angle KAM} = \sqrt{60 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{15} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}} = \sqrt{16} = 4$$

$\triangle ANK$ : По т. косинусов

$$KN = \sqrt{AK^2 + AN^2 - 2 \cdot AK \cdot AN \cdot \cos \angle KAN} = \sqrt{60 + 225 - 2 \cdot 15 \cdot 2\sqrt{15} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$

$$R = \frac{KM \cdot MN \cdot KN}{4S}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot KN \cdot MN \cdot \sin \angle KNM$$

Точки  $M$  и  $N$  лежат на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  на расстояниях соответственно 4 и 15 от вершины  $A$ . Найдите радиус окружности, проходящей через точки  $M$  и  $N$  и касающейся луча  $AB$ , если

$$\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Ответ: 8.

$$\triangle AKM - \text{пр } O (AK \perp KN) \Rightarrow \angle KAN = \angle KMA$$

$$\sin \angle KAN = \sqrt{1 - \cos^2 \angle KAN} = \sqrt{1 - \frac{15}{16}} = \frac{1}{4}$$

$$S = \frac{1 \cdot 2\sqrt{15} \cdot 11}{2 \cdot 4} = \frac{11\sqrt{15}}{4}$$

$$R = \frac{11 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{15}}{11 \cdot \sqrt{15}} = 8$$

Ответ: 8

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

? баллов

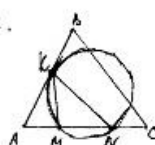


# Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом: задания высокого уровня сложности (задание 25)

## Задание 25. Пример 3. Работа 1

## № 25 с 2021 года

26.



Дано:  
 $AM = 4, AN = 15$   
 $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}$

Найти:  $R$

Решение:

$$AK^2 = \sqrt{AM \cdot AN} = \sqrt{4 \cdot 15} = 2\sqrt{15}$$

$\triangle AMK$ : По т. косинусов

$$KM = \sqrt{AK^2 + AM^2 - 2 \cdot AK \cdot AM \cdot \cos \angle KAM} = \sqrt{60 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{15} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}} = \sqrt{16} = 4$$

$\triangle ANK$ : По т. косинусов

$$KN = \sqrt{AK^2 + AN^2 - 2 \cdot AK \cdot AN \cdot \cos \angle KAN} = \sqrt{60 + 225 - 2 \cdot 15 \cdot 2\sqrt{15} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$

$$R = \frac{KM \cdot MN \cdot KN}{4S}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot KN \cdot MN \cdot \sin \angle KNM$$

Точки  $M$  и  $N$  лежат на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  на расстояниях соответственно 4 и 15 от вершины  $A$ . Найдите радиус окружности, проходящей через точки  $M$  и  $N$  и касающейся луча  $AB$ , если

$$\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Ответ: 8.

$$\triangle AKM - \text{пр } O (AK = KN) \Rightarrow \angle KAN = \angle KNA$$

$$\sin \angle KAN = \sqrt{1 - \cos^2 \angle KAN} = \sqrt{1 - \frac{15}{16}} = \frac{1}{4}$$

$$S = \frac{1 \cdot 2\sqrt{15} \cdot 11}{2 \cdot 4} = \frac{11\sqrt{15}}{4}$$

$$R = \frac{11 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{15}}{11 \cdot \sqrt{15}} = 8$$

Ответ: 8

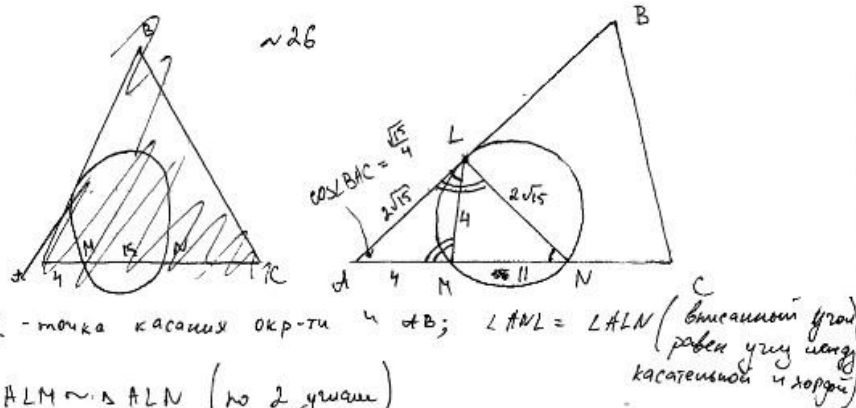
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

2 балла

# Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом: задания высокого уровня сложности (задание 25)

## Задание 25. Пример 3. Работа 2

### № 25 с 2021 года



$\triangle ALM \sim \triangle ALN$  (по 2 углам)

$$\frac{AL}{AN} = \frac{AM}{AL} = \frac{LM}{LN} \Rightarrow AL^2 = AN \cdot AM = 4 \cdot 15 \Rightarrow AL = 2\sqrt{15}$$

$\triangle ALM$  по теореме косинусов:  $LM^2 = AL^2 + AM^2 - 2 \cdot AL \cdot AM \cdot \cos(\angle BAM)$

$$LM^2 = 15 \cdot 4 + 16 - 2 \cdot 2\sqrt{15} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 15 \cdot 4 + 16 - 4 \cdot 15 = 16$$

$$LM = 4; \text{ из подобия } \Rightarrow AM \cdot LN = AL \cdot LM \Rightarrow LN = \frac{AL \cdot LM}{AM};$$

Точки  $M$  и  $N$  лежат на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  на расстояниях соответственно 4 и 15 от вершины  $A$ . Найдите радиус окружности, проходящей через точки  $M$  и  $N$  и касающейся луча  $AB$ , если

$$\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Ответ: 8.

$$LN = \frac{2\sqrt{15} \cdot 4}{4} = 2\sqrt{15}; \text{ из основного тригонометрического тождества:}$$

$$\sin^2 \angle BAC + \cos^2 \angle BAC = 1 \Rightarrow \sin \angle BAC = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16} \Rightarrow \sin \angle BAC = \frac{1}{4}$$

по теореме синусов для  $\triangle ALN$ :  $\frac{2\sqrt{15}}{\sin \angle ANL} = \frac{2\sqrt{15}}{\sin \angle LNA}$

$$\frac{2\sqrt{15}}{\sin \angle ANL} = \frac{2\sqrt{15}}{\sin \angle LNA} \Rightarrow AL = LN \Rightarrow \triangle ALN \text{ р/б (основание } AN)$$

По теореме синусов для  $\triangle LMN$ :  $\left( \begin{array}{l} \triangle LMN - \text{вписан} \\ \text{в } \omega \text{ окр-ть} \end{array} \right) \angle LAN = \angle LNA$

$$\frac{LM}{\sin(\angle LNA)} = 2R \Rightarrow \frac{4}{\frac{1}{4}} = 2R; 4 \cdot \frac{1}{4} = 2R$$

$$16 = 2R \Rightarrow R = 8$$

Ответ: 8

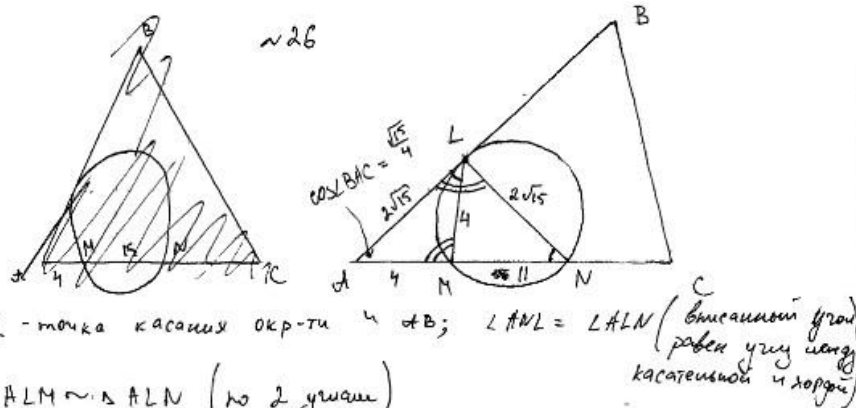
? баллов

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

# Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом: задания высокого уровня сложности (задание 25)

## Задание 25. Пример 3. Работа 2

### № 25 с 2021 года



$\triangle ALM \sim \triangle ALN$  (по 2 углам)

$$\frac{AL}{AN} = \frac{AM}{AL} = \frac{LM}{LN} \Rightarrow AL^2 = AN \cdot AM = 4 \cdot 15 \Rightarrow AL = 2\sqrt{15}$$

$\triangle ALM$  по теореме косинусов:  $LM^2 = AL^2 + AM^2 - 2 \cdot AL \cdot AM \cdot \cos(\angle BAM)$

$$LM^2 = 15 \cdot 4 + 16 - 2 \cdot 2\sqrt{15} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 15 \cdot 4 + 16 - 4 \cdot 15 = 16$$

$$LM = 4; \text{ из подобия } \Rightarrow AM \cdot LN = AL \cdot LM \Rightarrow LN = \frac{AL \cdot LM}{AM};$$

Точки  $M$  и  $N$  лежат на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  на расстояниях соответственно 4 и 15 от вершины  $A$ . Найдите радиус окружности, проходящей через точки  $M$  и  $N$  и касающейся луча  $AB$ , если

$$\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Ответ: 8.

$$LN = \frac{2\sqrt{15} \cdot 4}{4} = 2\sqrt{15}; \text{ из основного тригонометрического тождества:}$$

$$\sin^2 \angle BAC + \cos^2 \angle BAC = 1 \Rightarrow \sin \angle BAC = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16} \Rightarrow \sin \angle BAC = \frac{1}{4}$$

по теореме синусов для  $\triangle ALN$ :  $\frac{2\sqrt{15}}{\sin \angle ANL} = \frac{2\sqrt{15}}{\sin \angle LNA}$

$$\frac{2\sqrt{15}}{\sin \angle ANL} = \frac{2\sqrt{15}}{\sin \angle LNA} \Rightarrow AL = LN \Rightarrow \triangle ALN \text{ р/б (основание } AN)$$

По теореме синусов для  $\triangle LMN$ :  $\left( \begin{array}{l} \triangle LMN - \text{вписан} \\ \text{в окр-ть} \end{array} \right) \angle LAN = \angle LNA$

$$\frac{LM}{\sin(\angle LNA)} = 2R \Rightarrow \frac{4}{\frac{1}{4}} = 2R; 4 \cdot \frac{1}{4} = 2R$$

$$16 = 2R \Rightarrow R = 8$$

Ответ: 8

2 балла

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

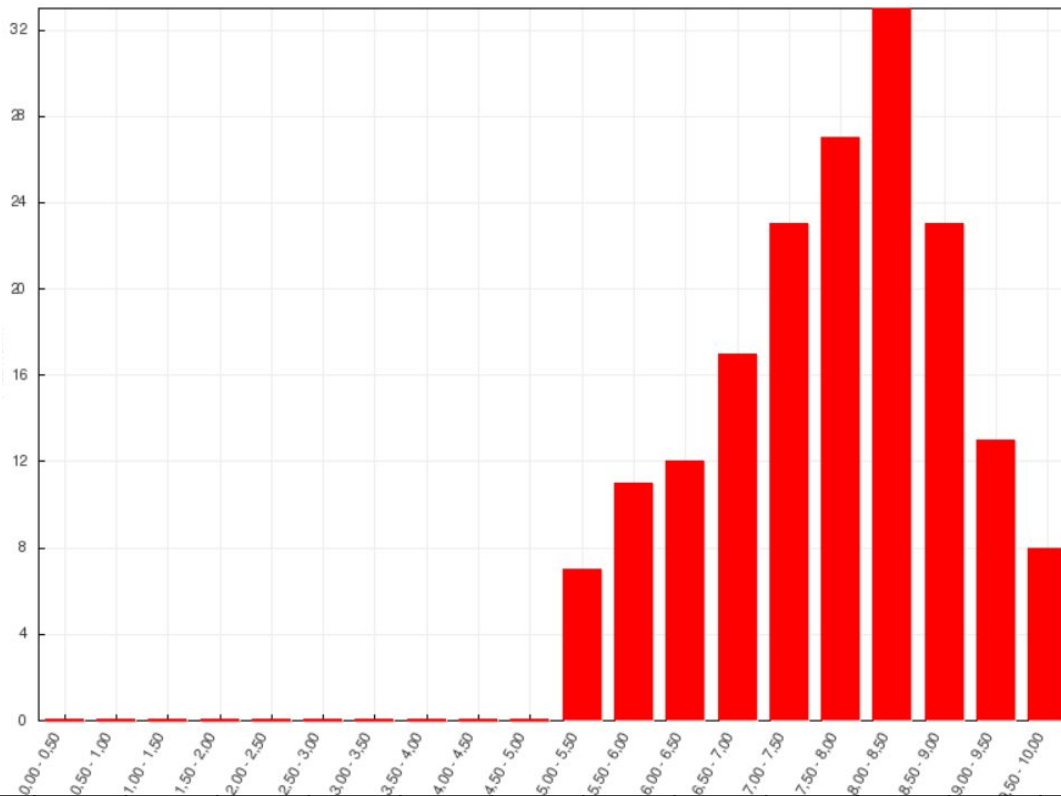


# Итоги тренинга 1 (задания 20 и 21)

# Согласование подходов к проверке заданий с развернутым ответом



Тренинг 1 (задания 20 и 21)



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0,37	0,41	0,43	0,42	0,35	0,40	0,45	0,46	0,36	0,37	0,30	0,35	0,44	0,28	0,35	0,40	0,38	0,37	0,34	0,36

## Тренинг 1 (задания 20 и 21)

### Работа 11

## № 20 с 2021 года

Решите уравнение  $x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0$ .

**Решение.**

Преобразуем уравнение:  $(x+4)(x^2 - 4) = 0$ ,

откуда  $x = -4$ ,  $x = -2$  или  $x = 2$ .

**Ответ:**  $-4$ ;  $-2$ ;  $2$ .

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

Пример 11

Задача № 21.

$$x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0.$$

$$(x^3 + 4x^2) - (4x - 16) = 0$$

$$x^2(x+4) - 4(x+4) = 0.$$

$$(x^2 - 4) \cdot (x+4) = 0$$

$$x^2 - 4 = 0 \quad \text{или} \quad x + 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x_3 = -4$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -2$$

Ответ:  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = -2$ ;  $x_3 = -4$

**? баллов**

## Тренинг 1 (задания 20 и 21)

### Работа 11

## № 20 с 2021 года

Решите уравнение  $x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0$ .

**Решение.**

Преобразуем уравнение:  $(x+4)(x^2 - 4) = 0$ ,

откуда  $x = -4$ ,  $x = -2$  или  $x = 2$ .

**Ответ:**  $-4$ ;  $-2$ ;  $2$ .

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

**0 баллов**

Пример 11

Задача № 21.

$$x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0.$$

$$(x^3 + 4x^2) - (4x - 16) = 0$$

$$x^2(x+4) - 4(x-4) = 0.$$

$$(x^2 - 4) \cdot (x+4) = 0$$

$$x^2 - 4 = 0 \quad \text{или} \quad x + 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x_3 = -4$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -2$$

Ответ:  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = -2$ ;  $x_3 = -4$

## Тренинг 1 (задания 20 и 21)

### Работа 11

## № 21 с 2021 года

	s	v	t
I	560	x+10	$\frac{560}{x+10}$
II	560	x	$\frac{560}{x}$

$$\frac{560}{x} - \frac{560}{x+10} = 1$$

$$560(x+10) - 560x = x(x+10)$$

$$560x + 5600 - 560x = x^2 + 10x$$

$$x^2 + 10x + 5600 = 0$$

$$k=5$$

$$D/4 = 25 + 5600 = 5625 = 75^2$$

$$x_1 = -5 + 75 = 70 - \text{скорость II авто.}$$

$$x_2 = -5 - 75 = -80 - \text{не, по условию задачи}$$

①  $70 + 10 = 80$  км/ч  
 скорость I авто.  
 Ответ: 80 км/ч

Два автомобиля одновременно отправляются в 560-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 10 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

**Решение.**

Пусть скорость первого автомобиля  $v$  км/ч, тогда скорость второго автомобиля  $v - 10$  км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{560}{v-10} - \frac{560}{v} = 1; 560v - 560v + 5600 = v^2 - 10v; v^2 - 10v - 5600 = 0,$$

откуда  $v = 80$ .

**Ответ:** 80 км/ч.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

**? баллов**



## Тренинг 1 (задания 20 и 21)

### Работа 11

## № 21 с 2021 года

	s	v	t
I	560	x+10	$\frac{560}{x+10}$
II	560	x	$\frac{560}{x}$

$$\frac{560}{x} - \frac{560}{x+10} = 1 \quad | \cdot x(x+10)$$

$$560(x+10) - 560x = x(x+10)$$

$$560x + 5600 - 560x = x^2 + 10x$$

$$x^2 + 10x + 5600 = 0$$

$$k=5$$

$$D/4 = 25 + 5600 = 5625 = 75^2$$

$$x_1 = -5 + 75 = 70 - \text{скорость II авто.}$$

$$x_2 = -5 - 75 = -80 - \text{не, по условию задачи}$$

①  $70 + 10 = 80$  км/ч  
 скорость I авто.  
 Ответ: 80 км/ч

Два автомобиля одновременно отправляются в 560-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 10 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

**Решение.**

Пусть скорость первого автомобиля  $v$  км/ч, тогда скорость второго автомобиля  $v - 10$  км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{560}{v-10} - \frac{560}{v} = 1; 560v - 560v + 5600 = v^2 - 10v; v^2 - 10v - 5600 = 0,$$

откуда  $v = 80$ .

**Ответ:** 80 км/ч.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

**0 баллов**

## Тренинг 1 (задания 20 и 21)

### Работа 14

№ 20 с 2021 года

Пример 14

√ 2 1

$$x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0 \quad ; x \neq 0$$

$$x^2(x+4) - x - 4 = 0$$

$$x^2 - 1(x+4) + (x+4) = 0$$

$$(x^2 - 1)(x+4) = 0$$

$$\begin{cases} x+4=0 \\ x^2-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-4 \\ x^2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-4 \\ \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases} \end{cases}$$

Ответ:  $x = \{-4; -1; 1\}$

Решите уравнение  $x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0$ .

**Решение.**

Преобразуем уравнение:  $(x+4)(x^2-4) = 0$ ,

откуда  $x = -4$ ,  $x = -2$  или  $x = 2$ .

**Ответ:**  $-4; -2; 2$ .

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

**? баллов**

## Тренинг 1 (задания 20 и 21)

### Работа 14

Пример 14

√ 2 1

$$x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0 \quad ; \quad x \neq 0$$

$$x^2(x+4) - x - 4 = 0$$

$$x^2 - 1(x+4) + (x+4) = 0$$

$$(x^2 - 1)(x+4) = 0$$

$$\begin{cases} x+4=0 \\ x^2-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-4 \\ x^2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-4 \\ \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases} \end{cases}$$

Ответ:  $x = \{-4; -1; 1\}$

## № 20 с 2021 года

Решите уравнение  $x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0$ .

**Решение.**

Преобразуем уравнение:  $(x+4)(x^2-4) = 0$ ,

откуда  $x = -4$ ,  $x = -2$  или  $x = 2$ .

**Ответ:**  $-4; -2; 2$ .

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

**0 баллов**

## Тренинг 1 (задания 20 и 21)

### Работа 14

22.

$x$  км/ч - скорость второго автомобиля,  
 $x+10$  км/ч - скорость первого автомобиля

$t$  ч - разницы во времени

560 км - расстояние;  $x > 0$

$$\frac{560}{x} - \frac{560}{x+10} = 1 \quad | \cdot x \cdot (x+10)$$

$$x \neq 0; -10$$

$$560 \cdot (x+10) - 560x = x \cdot (x+10)$$

$$560x + 5600 - 560x = x^2 + 10x$$

$$-x^2 - 10x + 5600 = 0$$

$$a = -1; b = -10; c = 5600$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-10)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 5600 = 100 + 22400 = 22500$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm 150}{-2}$$

$$x_1 = \frac{10+150}{-2} = \frac{160}{-2} = -80 - \text{не удов. условию } x > 0$$

$$x_2 = \frac{10-150}{-2} = \frac{-140}{-2} = 70 \text{ км/ч} - \text{ скорость второго}$$

$$70+10 = 80 \text{ км/ч} - \text{ скорость первого}$$

Ответ: 80 км/ч

## № 21 с 2021 года

Два автомобиля одновременно отправляются в 560-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 10 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

**Решение.**

Пусть скорость первого автомобиля  $v$  км/ч, тогда скорость второго автомобиля  $v-10$  км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{560}{v-10} - \frac{560}{v} = 1; 560v - 560v + 5600 = v^2 - 10v; v^2 - 10v - 5600 = 0,$$

откуда  $v = 80$ .

**Ответ:** 80 км/ч.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

**? баллов**

## Тренинг 1 (задания 20 и 21)

### Работа 14

22.

$x$  км/ч – скорость второго автомобиля,  
 $x+10$  км/ч – скорость первого автомобиля

1 ч – разница во времени

560 км – расстояние;  $x > 0$

$$\frac{560}{x} - \frac{560}{x+10} = 1 \quad | \cdot x \cdot (x+10) \quad | x \neq 0, -10$$

$$560 \cdot (x+10) - 560x = x \cdot (x+10)$$

$$560x + 5600 - 560x = x^2 + 10x$$

$$-x^2 - 10x + 5600 = 0$$

$$a = -1; b = -10; c = 5600$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-10)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 5600 = 100 + 22400 = 22500$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm 150}{-2}$$

$$x_1 = \frac{10+150}{-2} = \frac{160}{-2} = -80 \text{ – не удов. условию } x > 0$$

$$x_2 = \frac{10-150}{-2} = \frac{-140}{-2} = 70 \text{ км/ч – скорость второго}$$

$$70+10 = 80 \text{ км/ч – скорость первого}$$

Ответ: 80 км/ч

## № 21 с 2021 года

Два автомобиля одновременно отправляются в 560-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 10 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

**Решение.**

Пусть скорость первого автомобиля  $v$  км/ч, тогда скорость второго автомобиля  $v-10$  км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{560}{v-10} - \frac{560}{v} = 1; 560v - 560v + 5600 = v^2 - 10v; v^2 - 10v - 5600 = 0,$$

откуда  $v = 80$ .

**Ответ:** 80 км/ч.

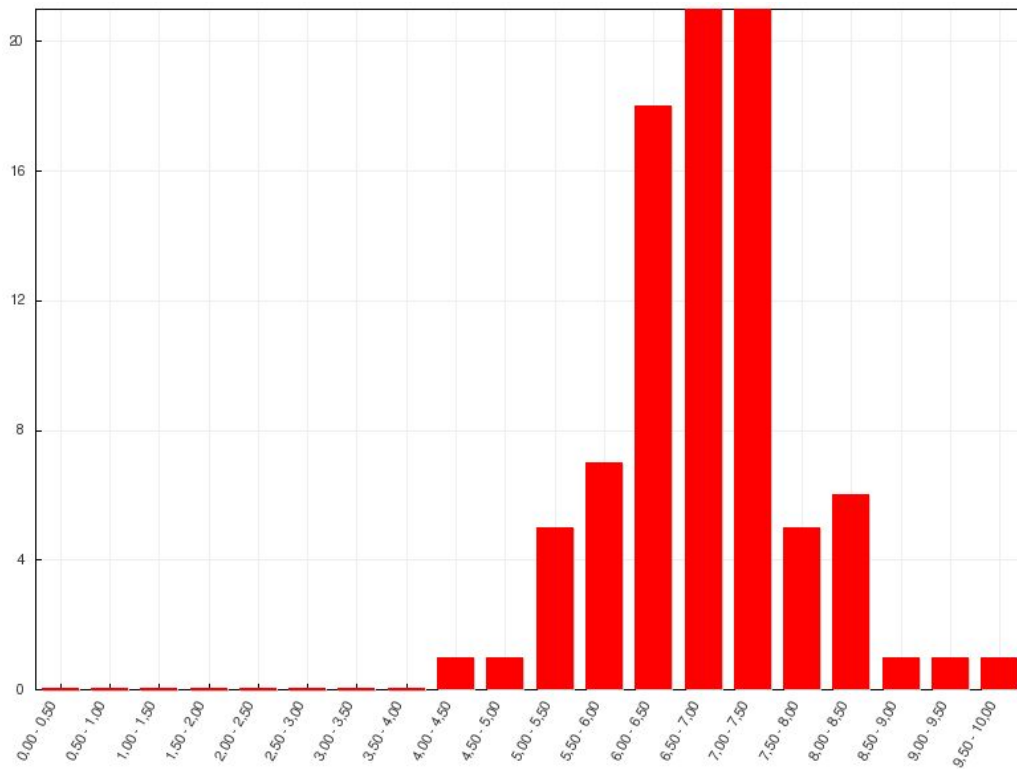
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

**0 баллов**



# Итоги тренинга 2 (задания 23 и 24)

## Тренинг 2 (задания 23 и 24)



<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>	<b>16</b>	<b>17</b>	<b>18</b>	<b>19</b>	<b>20</b>
0,18	0,20	0,30	0,44	0,29	0,40	0,28	0,48	0,40	0,35	0,45	0,39	0,39	0,26	0,37	0,14	0,47	0,32	0,31	0,40

## Тренинг 2 (задания 23 и 24)

### Работа 1

## № 23 с 2021 года

Найдите боковую сторону  $AB$  трапеции  $ABCD$ , если углы  $ABC$  и  $BCD$  равны соответственно  $30^\circ$  и  $135^\circ$ , а  $CD=17$ .

**Решение.**

Проведём перпендикуляры  $BH=CG$  к прямой  $AD$ .

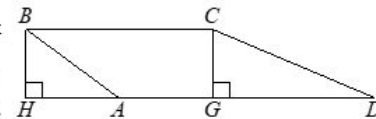
В прямоугольном треугольнике  $CDG$  угол  $GCD$  равен  $45^\circ$ , следовательно,

$$CG = CD \cdot \cos 45^\circ = \frac{17\sqrt{2}}{2}.$$

В прямоугольном треугольнике  $ABH$  катет  $BH = CG = \frac{17\sqrt{2}}{2}$ , а угол  $ABH$

равен  $60^\circ$ . Значит,  $AB = \frac{BH}{\cos 60^\circ} = \frac{17\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 17\sqrt{2}$ .

**Ответ:**  $17\sqrt{2}$ .



24)

Дано:  $CD=17$   
 $\angle ABC = 30^\circ$ ;  $\angle BCD = 135^\circ$ .  
 $ABCD$  - трапеция.

Найти:  $AB$  - ?

Решение:  $CK$  - высота  $\Rightarrow \angle AKC$ ;  
 $\angle DKC$ ;  $\angle BCK = 30^\circ \Rightarrow$   
 $\angle KCD = \angle BCD - \angle BCK = 135 - 30 = 45^\circ$ ;  $\angle CKD = 90^\circ \Rightarrow$   
 $\angle KDC = 180 - \angle CKD - \angle KCD = 180 - 90 - 45 = 45^\circ \Rightarrow \triangle CKD$  - равнобедренный, равнобедренный ~~...~~

24)  $\frac{BH}{AB} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow BH = \frac{1}{2} AB$   
 $\frac{CG}{CD} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow CG = \frac{\sqrt{2}}{2} CD = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 17 = 8,5\sqrt{2}$

$\frac{BH}{17\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow BH = 8,5\sqrt{2}$   
 $\frac{1}{2} AB = 8,5\sqrt{2} \Rightarrow AB = 17\sqrt{2}$

трапеция,  $BC \parallel AD$  (как основания трапеции)  $\Rightarrow \angle ABC = \angle BAH$   
 $\angle BAH = 30^\circ \Rightarrow \frac{1}{2} AB = BH$   
 $\angle ABC = \angle BAH$  (как накрест лежащие)

Ответ:  $AB = 17\sqrt{2}$

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

**? баллов**



## Тренинг 2 (задания 23 и 24)

### Работа 1

## № 23 с 2021 года

Найдите боковую сторону  $AB$  трапеции  $ABCD$ , если углы  $ABC$  и  $BCD$  равны соответственно  $30^\circ$  и  $135^\circ$ , а  $CD = 17$ .

**Решение.**

Проведём перпендикуляры  $BH = CG$  к прямой  $AD$ .

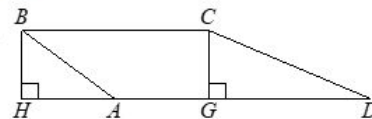
В прямоугольном треугольнике  $CDG$  угол  $GCD$  равен  $45^\circ$ , следовательно,

$$CG = CD \cdot \cos 45^\circ = \frac{17\sqrt{2}}{2}.$$

В прямоугольном треугольнике  $ABH$  катет  $BH = CG = \frac{17\sqrt{2}}{2}$ , а угол  $ABH$

равен  $60^\circ$ . Значит,  $AB = \frac{BH}{\cos 60^\circ} = \frac{17\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 17\sqrt{2}$ .

**Ответ:**  $17\sqrt{2}$ .



24) ~~Решение~~ ~~Решение~~

Дано:  $CD = 17$   
 $\angle ABC = 30^\circ$ ;  $\angle BCD = 135^\circ$ .  
 $ABCD$  - трапеция.

Найти:  $AB$  - ?

Решение:  $CK$  - высота  $\Rightarrow \angle AKC$ ;  
 $\angle DKC$ ;  $\angle BCK = 30^\circ \Rightarrow$   
 $\angle KCD = \angle BCD - \angle BCK = 135 - 30 = 45^\circ$ ;  $\angle CKD = 90^\circ \Rightarrow$   
 $\angle KDC = 180 - \angle CKD - \angle KCD = 180 - 90 - 45 = 45^\circ \Rightarrow \triangle CKD$  - равнобедренный.

~~Катет, равнобедренный~~ ~~Решение~~ ~~Решение~~

24) ~~Решение~~ ~~Решение~~  $\Rightarrow CK = \frac{\sqrt{2}}{2}$   
 $\cos \angle KCD = \cos 45^\circ \Rightarrow \frac{CK}{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{CK}{17} = \frac{\sqrt{2}}{2}$   $2CK = 17\sqrt{2}$   $CK = 8,5\sqrt{2}$ ;  $CK = BK$  (как высоты)

трапеция,  $BC \parallel AD$  (как основания трапеции)  $\Rightarrow \angle ABC = \angle BAH$   
 $\angle BAH = 30^\circ \Rightarrow \frac{1}{2} AB = BK$   $\frac{1}{2} AB = 8,5\sqrt{2} \Rightarrow AB = 17\sqrt{2}$   
 $(\angle ABC = \angle BAH$  (как накрест. стоящие))

Ответ:  $AB = 17\sqrt{2}$

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

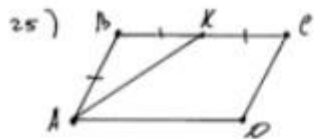
**0 баллов**

## Тренинг 2 (задания 23 и 24)

### Работа 1

## № 24 с 2021 года

25) Сторона  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  вдвое больше стороны  $AB$ . Точка  $K$  — середина стороны  $BC$ . Докажите, что  $AK$  — биссектриса угла  $BAD$ .

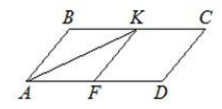


*Рано*  
 $ABCD$  - параллелограмм.  
 $BC = 2 AB$   
 $BK = KC = AB$ .  
 Д-ром, что  $AK$  - бис.

*Доказательство*  
 $\triangle ABK$  - равнобедренный (т.к.  $AB = BK$  по условию) ( $BC = 2AB \Rightarrow BK = KC = AB$ )  
 $\angle BAK = \angle BKA$  (как углы при основании равнобедренного треугольника).  
 $BC \parallel AD$  (как стороны параллелограмма) (протягиваемые стороны).  
 $\angle BKA = \angle KAD$  (как накрест-лежащие углы).  
 $\angle BAK = \angle KAD \Rightarrow AK$  - биссектриса.

**Доказательство.**

Проведём прямую  $KF$  параллельно стороне  $AB$  (см. рисунок). Поскольку  $BK = KC = AB$ , параллелограмм  $ABKF$  является ромбом, поэтому диагональ  $AK$  ромба  $ABKF$  делит угол  $BAF$  пополам. Значит,  $AK$  — биссектриса угла  $BAD$ .



Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл

**? баллов**

## Тренинг 2 (задания 23 и 24)

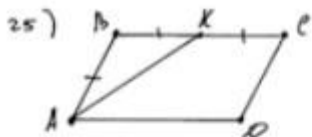
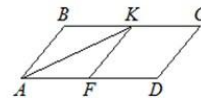
### Работа 1

## № 24 с 2021 года

25) Сторона  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  вдвое больше стороны  $AB$ . Точка  $K$  — середина стороны  $BC$ . Докажите, что  $AK$  — биссектриса угла  $BAD$ .

#### Доказательство.

Проведём прямую  $KF$  параллельно стороне  $AB$  (см. рисунок). Поскольку  $BK = KC = AB$ , параллелограмм  $ABKF$  является ромбом, поэтому диагональ  $AK$  ромба  $ABKF$  делит угол  $BAF$  пополам. Значит,  $AK$  — биссектриса угла  $BAD$ .



*Рано*  
 $ABCD$  - параллелограмм.  
 $BC = 2 \cdot AB$   
 $BK = KC = AB$ .  
 Д-ром, что  $AK$  - бис.

*Доказательство*  
 $\triangle ABK$  - равнобедренный (т.к.  $AB = BK$  (по условию))

$(BC = 2 \cdot AB \Rightarrow BK = KC = AB)$

$\angle BAK = \angle KBA$  (как углы при основании равнобедренного треугольника).

$BC \parallel AD$  (как стороны параллелограмма) (протягиваемые стороны)

$\angle BKA = \angle KAD$  (как накрест-лежащие углы)

$\angle BAK = \angle KAD \Rightarrow AK$  - биссектриса.

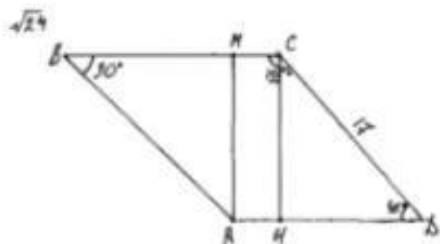
Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл

**0 баллов**

## Тренинг 2 (задания 23 и 24)

### Работа 2

## № 23 с 2021 года



Дано:  $ABCD$  - трапеция  
 $\angle ABC = 30^\circ$ ;  $\angle BCD = 135^\circ$ ;  
 $CD = 17$ .  
 Найти:  $AB$ .

Решение

Сумма углов при боковой стороне трапеции равна  $180^\circ$ .  
 Тогда угол  $\angle CDA = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ .

Опустим высоту  $CH$  из  $C$  на  $AD$ .

Треугольник  $CHD$  - прямоугольный равнобедренный

$$CH = CD \sin 45^\circ = 17 \cdot (\sqrt{2}) : 2$$

Возведем перпендикуляр из  $A$  к  $BC$ .

Треугольник  $ABM$  - прямоугольный

$$AM = CH = 17 \cdot (\sqrt{2}) : 2$$

$$AB = AM : \sin 30^\circ = 17\sqrt{2}$$

Ответ:  $17\sqrt{2}$

Найдите боковую сторону  $AB$  трапеции  $ABCD$ , если углы  $ABC$  и  $BCD$  равны соответственно  $30^\circ$  и  $135^\circ$ , а  $CD = 17$ .

**Решение.**

Проведём перпендикуляры  $BH = CG$  к прямой  $AD$ .

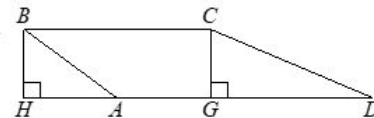
В прямоугольном треугольнике  $CDG$  угол  $GCD$  равен  $45^\circ$ , следовательно,

$$CG = CD \cdot \cos 45^\circ = \frac{17\sqrt{2}}{2}.$$

В прямоугольном треугольнике  $ABH$  катет  $BH = CG = \frac{17\sqrt{2}}{2}$ , а угол  $ABH$

равен  $60^\circ$ . Значит,  $AB = \frac{BH}{\cos 60^\circ} = \frac{17\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 17\sqrt{2}$ .

Ответ:  $17\sqrt{2}$ .



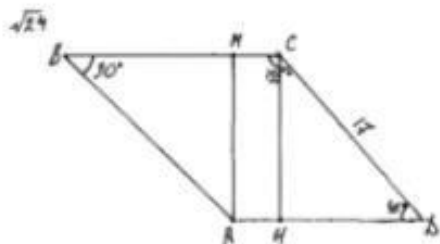
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

**? баллов**

## Тренинг 2 (задания 23 и 24)

### Работа 2

## № 23 с 2021 года



Дано:  $ABCD$  - трапеция  
 $\angle ABC = 30^\circ$ ;  $\angle BCD = 135^\circ$ ;  
 $CD = 17$ .  
 Найти:  $AB$ .

Решение

Сумма углов при боковой стороне трапеции равна  $180^\circ$ .  
 Тогда угол  $\angle CDA = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ .

Опустим высоту  $CH$  из  $C$  на  $AD$ .

Треугольник  $CHD$  - прямоугольный равнобедренный

$$CH = CD \sin 45^\circ = 17 \cdot (\sqrt{2}) : 2$$

Возведем перпендикуляр из  $A$  к  $BC$ .

Треугольник  $ABM$  - прямоугольный

$$AM = CH = 17 \cdot (\sqrt{2}) : 2$$

$$AB = AM : \sin 30^\circ = 17\sqrt{2}$$

Ответ:  $17\sqrt{2}$

Найдите боковую сторону  $AB$  трапеции  $ABCD$ , если углы  $ABC$  и  $BCD$  равны соответственно  $30^\circ$  и  $135^\circ$ , а  $CD = 17$ .

**Решение.**

Проведём перпендикуляры  $BH = CG$  к прямой  $AD$ .

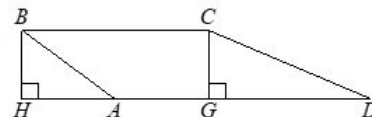
В прямоугольном треугольнике  $CDG$  угол  $GCD$  равен  $45^\circ$ , следовательно,

$$CG = CD \cdot \cos 45^\circ = \frac{17\sqrt{2}}{2}.$$

В прямоугольном треугольнике  $ABH$  катет  $BH = CG = \frac{17\sqrt{2}}{2}$ , а угол  $ABH$

равен  $60^\circ$ . Значит,  $AB = \frac{BH}{\cos 60^\circ} = \frac{17\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 17\sqrt{2}$ .

Ответ:  $17\sqrt{2}$ .



Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

**0 баллов**

## Тренинг 2 (задания 23 и 24)

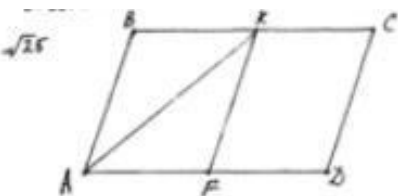
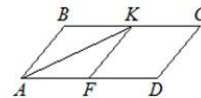
### Работа 2

№ 24 с 2021 года

- 25 Сторона  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  вдвое больше стороны  $AB$ . Точка  $K$  — середина стороны  $BC$ . Докажите, что  $AK$  — биссектриса угла  $BAD$ .

**Доказательство.**

Проведём прямую  $KF$  параллельно стороне  $AB$  (см. рисунок). Поскольку  $BK = KC = AB$ , параллелограмм  $ABKF$  является ромбом, поэтому диагональ  $AK$  ромба  $ABKF$  делит угол  $BAF$  пополам. Значит,  $AK$  — биссектриса угла  $BAD$ .



Дано:  $ABCD$  - параллелограмм  
 $BC = 2AB$ ;  $BK = KC$   
 Докажите:  $AK$  - биссектриса  $\angle BAD$

Доказательство:

Проведём отрезок  $KF$  параллельный  $AB$   
 Поскольку  $BK = KC = AB$  параллелограмм  $ABKF$  является ромбом  
 Поэтому диагональ ромба  $ABKF$  делит угол  $BAF$  пополам  
 Значит  $AK$  является биссектрисой угла  $BAD$

ч.т.д.

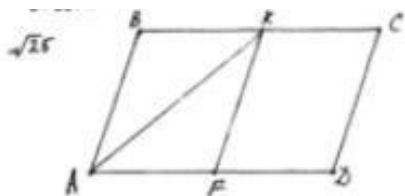
Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл

? баллов

## Тренинг 2 (задания 23 и 24)

### Работа 2

## № 24 с 2021 года



Дано:  $ABCD$  - параллелограмм  
 $BC = 2AB$ ;  $BK = KC$   
 Докажите:  $AK$  - биссектриса  $\angle BAD$

Доказательство:

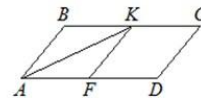
Проведем отрезок  $KF$  параллельный  $AB$   
 Поскольку  $BK = KC = AB$  параллелограмм  $ABKF$  является ромбом  
 Поэтому диагональ ромба  $AK$  делит угол  $BAF$  пополам  
 Значит  $AK$  является биссектрисой угла  $BAD$

ч.т.д.

- 25 Сторона  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  вдвое больше стороны  $AB$ . Точка  $K$  — середина стороны  $BC$ . Докажите, что  $AK$  — биссектриса угла  $BAD$ .

Доказательство.

Проведём прямую  $KF$  параллельно стороне  $AB$  (см. рисунок). Поскольку  $BK = KC = AB$ , параллелограмм  $ABKF$  является ромбом, поэтому диагональ  $AK$  ромба  $ABKF$  делит угол  $BAF$  пополам. Значит,  $AK$  — биссектриса угла  $BAD$ .



Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл

0 баллов

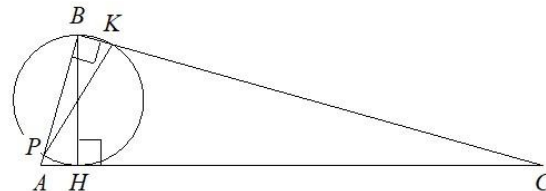
## Тренинг 2 (задания 23 и 24)

### Работа 16

## № 23 с 2021 года

- 24 Точка  $H$  является основанием высоты  $BH$ , проведённой из вершины прямого угла  $B$  прямоугольного треугольника  $ABC$ . Окружность с диаметром  $BH$  пересекает стороны  $AB$  и  $CB$  в точках  $P$  и  $K$  соответственно. Найдите  $PK$ , если  $BH = 13$ .

Решение.



Угол  $PBK$  опирается на дугу  $PK$  и равен  $90^\circ$ , а значит,  $PK$  — диаметр, откуда получаем, что  $BH = PK = 13$ .

Ответ: 13.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

? баллов

Дано

$\triangle ABC$

$BH$  — высота, диаметр

$\angle B = 90^\circ$

Окружность  $(O, r)$   $\cap AB, BC =$

$= P, K$

$BH = 13$

$PK = ?$

№ 24

Решение

Дополнительное  
конструирование:  $PH$  и  $KH$

Так как  $\triangle BPHK$  —  
вписанный четырёхугольник и  
бисектоугольник можно сказать окружности

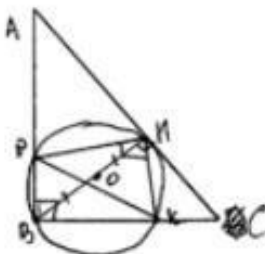
то  $\angle PBK + \angle PHK = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle PHK = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

Так как  $\angle BPH$  опирается на диаметр,  $\angle BPH = 90^\circ$

$\Rightarrow PHKB$  — прямоугольник  $\Rightarrow PK = BH = 13$

Ответ: 13





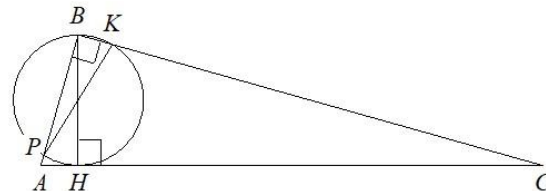
## Тренинг 2 (задания 23 и 24)

### Работа 16

## № 23 с 2021 года

- 24 Точка  $H$  является основанием высоты  $BH$ , проведённой из вершины прямого угла  $B$  прямоугольного треугольника  $ABC$ . Окружность с диаметром  $BH$  пересекает стороны  $AB$  и  $CB$  в точках  $P$  и  $K$  соответственно. Найдите  $PK$ , если  $BH = 13$ .

Решение.



Угол  $PBK$  опирается на дугу  $PK$  и равен  $90^\circ$ , а значит,  $PK$  — диаметр, откуда получаем, что  $BH = PK = 13$ .

Ответ: 13.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

**0 баллов**

S24

Решение

Дано

$\triangle ABC$

$BH$  — высота, диаметр

$\angle B = 90^\circ$

Окружность  $(O, r)$  с диаметром  $BH$

$P, K$

$BH = 13$

$PK = ?$

Дополнительное  
конструирование:  $PH$  и  $KH$

Так как  $\angle BPHK$  —  
вписанный четырехугольник и  
биссектриса его делит диаметр  
то  $\angle PBK + \angle PHK = 180^\circ$

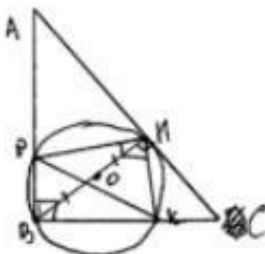
$\Rightarrow \angle PHK = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle PHK = 90^\circ$

Так как  $\angle BPH$  опирается на диаметр,  $\angle BPH = 90^\circ$

$\Rightarrow PHKB$  — прямоугольник  $\Rightarrow PK = BH = 13$

Ответ: 13

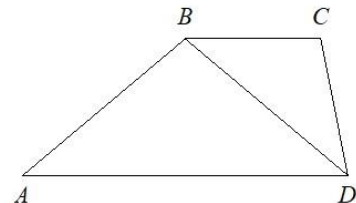


## Тренинг 2 (задания 23 и 24)

### Работа 16

## № 24 с 2021 года

- 25 Основания  $BC$  и  $AD$  трапеции  $ABCD$  равны соответственно 3 и 12,  $BD = 6$ . Докажите, что треугольники  $CBD$  и  $BDA$  подобны.  
Доказательство.



В треугольниках  $ADB$  и  $DBC$  углы  $ADB$  и  $DBC$  равны как накрест лежащие, кроме того,  $\frac{AD}{DB} = \frac{DB}{BC} = 2$ . Поэтому треугольники  $CBD$  и  $BDA$  подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл

**? баллов**

С25

Дано:

$ABCD$ -трапеция  
 $BC, AD$ -основания  
 $BC = 3$   
 $AD = 12$   
 $BD = 6$

Доказать:  
 $\triangle CBD \sim \triangle BDA$

Решение:

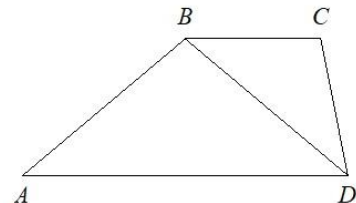
$\frac{BD}{BC} = \frac{6}{3} = 2$   
 $\frac{AD}{BD} = \frac{12}{6} = 2 \Rightarrow$   
 $\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{BD}, \angle CBD = \angle ADB$  (накрест лежащие углы при  $BC \parallel AD$ )  $\Rightarrow \triangle CBD \sim \triangle BDA$  (по двум пропорциональным сторонам и углу между ними)

## Тренинг 2 (задания 23 и 24)

### Работа 16

## № 24 с 2021 года

- 25 Основания  $BC$  и  $AD$  трапеции  $ABCD$  равны соответственно 3 и 12,  $BD = 6$ . Докажите, что треугольники  $CBD$  и  $BDA$  подобны.  
Доказательство.



В треугольниках  $ADB$  и  $DBC$  углы  $ADB$  и  $DBC$  равны как накрест лежащие, кроме того,  $\frac{AD}{DB} = \frac{DB}{BC} = 2$ . Поэтому треугольники  $CBD$  и  $BDA$  подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл

**1 балл**

С25

Дано:  $ABCD$  - трапеция  
 $BC, AD$  - основания  
 $BC = 3$   
 $AD = 12$   
 $BD = 6$

Доказать:  $\triangle CBD \sim \triangle BDA$

Решение:

$\frac{BD}{BC} = \frac{6}{3} = 2$   
 $\frac{AD}{BD} = \frac{12}{6} = 2 \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{BD}{BC} = 2 \Rightarrow$   
 $\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{BD}, \angle CBD = \angle ADB$  (накрест лежащие углы при  $BC \parallel AD$ )  $\Rightarrow \triangle CBD \sim \triangle BDA$   
 (по двум пропорциональным сторонам и углу между ними)



**Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом: задания высокого уровня сложности (задания 22 и 25).**

**Согласование подходов к проверке заданий с развернутым ответом**

*Указания к зачету.*

Вы оцениваете математическую корректность решения математической задачи выпускника 9 класса в соответствии с критериями оценивания заданий с развернутым ответом

Успехов!