Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ
ФИПИ

Подготовка экспертов для работы в региональной предметной комиссии при проведении итоговой аттестации по общеобразовательным программам основного общего образования

Тема 4. Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом: задания высокого уровня сложности (задания 22 и 25).

Согласование подходов к проверке заданий с развернутым ответом

Семенов Андрей Викторович, к. пед. н., ведущий научный сотрудник ФГБНУ «ФИПИ»

11 февраля 2021 года

ФИПИ

Содержание курса

Тема лекции	Даты	Самостоят. работа
Тема 1. Подходы к формированию и организации работы региональной предметной комиссии. **Содержание и структура КИМ ОГЭ по математике.** **Особенности заданий с развернутым ответом КИМ ОГЭ по математике**	1 февраля 2021 г. (понедельник) 15-00	Входная диагностика
Тема 2. Методика проверки и оценки алгебраических заданий повышенного уровня сложности с развернутым ответом (задания 20 и 21)	4 февраля 2021 г. (четверг) 15-00	Тренинг 1
Тема 3. Методика проверки и оценки геометрических заданий повышенного уровня сложности с развернутым ответом (задания 23 и 24)	8 февраля 2021 г. (понедельник) 15-00	Тренинг 2
Тема 4. Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом: задания высокого уровня сложности (задания 22 и 25). **Согласование подходов к проверке заданий с развернутым ответом**	11 февраля 2021 г. (четверг) 15-00	Итоговый зачет

ФИПИ

Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом: задания высокого уровня сложности (задание 22)

16. Линейная функция и её график

Пример 3. Построим график функции $y = 2x + 3$.

▶ Функция $y = 2x + 3$ линейная, поэтому её графиком является прямая. Используя формулу $y = 2x + 3$, найдём координаты двух точек графика:
если $x = -2$, то $y = 2 \cdot (-2) + 3 = -1$;
если $x = 1$, то $y = 2 \cdot 1 + 3 = 5$.
Отметим точки $A(-2; -1)$ и $B(1; 5)$. Проведём через эти точки прямую (рис. 33). Прямая AB есть график функции $y = 2x + 3$. ◁

При построении графика линейной функции часто бывает удобно в качестве одной из точек брать точку с абсциссой 0.

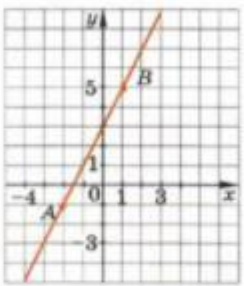


Рис. 33

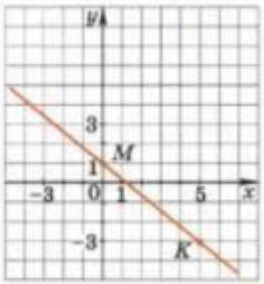


Рис. 34

Пример 4. Построим график функции $y = -0{,}8x + 1$.

▶ Найдём координаты двух точек графика:
если $x = 0$, то $y = -0{,}8 \cdot 0 + 1 = 1$;
если $x = 5$, то $y = -0{,}8 \cdot 5 + 1 = -3$.
Отметим точки $M(0; 1)$ и $K(5; -3)$ и проведём через них прямую (рис. 34). Прямая MK — график функции $y = -0{,}8x + 1$. ◁

Для тех, кто хочет знать больше

17. Задание функции несколькими формулами

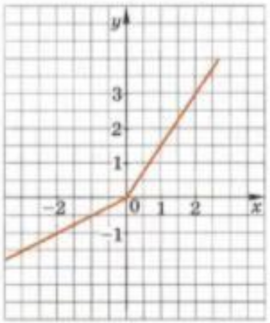


Рис. 46

Пример 2. Построим график функции $y = x + 0{,}5|x|$.

▶ Освободимся от знака модуля. Если $x < 0$, то $|x| = -x$. Значит,

$$y = x - 0{,}5x = 0{,}5x \text{ при } x < 0.$$

Если $x \geqslant 0$, то $|x| = x$. Значит, $y = x + 0{,}5x = 1{,}5x$ при $x \geqslant 0$.
Итак, данную функцию можно задать двумя формулами:

$$y = \begin{cases} 0{,}5x, \text{ если } x < 0, \\ 1{,}5x, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

На рисунке 46 изображён график этой функции. Он состоит из двух лучей. ◁

Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом: задания высокого уровня сложности (задание 22)

7. Построение графика квадратичной функции

Чтобы построить график квадратичной функции, нужно:
1) найти координаты вершины параболы и отметить ее в координатной плоскости;
2) построить еще несколько точек, принадлежащих параболе;
3) соединить отмеченные точки плавной линией.

Заметим, что абсциссу m вершины удобно находить по формуле $m = -\frac{b}{2a}$. Ординату n можно находить, подставив найденное значение абсциссы в формулу $y = ax^2 + bx + c$, так как при $x = m$

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + n = n.$$

Приведем примеры построения графиков квадратичных функций.

Пример 1. Построим график функции $y = 0{,}5x^2 + 3x + 0{,}5$.

► Графиком функции $y = 0{,}5x^2 + 3x + 0{,}5$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем координаты m и n вершины этой параболы:

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot 0{,}5} = -3;$$

$$n = 0{,}5 \cdot (-3)^2 + 3 \cdot (-3) + 0{,}5 = -4.$$

Значит, вершина параболы — точка $(-3; -4)$.
Составим таблицу значений функции:

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
y	4	$0{,}5$	-2	$-3{,}5$	-4	$-3{,}5$	-2	$0{,}5$	4

Построив точки, координаты которых указаны в таблице, и соединив их плавной линией, получим график функции $y = 0{,}5x^2 + 3x + 0{,}5$ (рис. 31). ◁

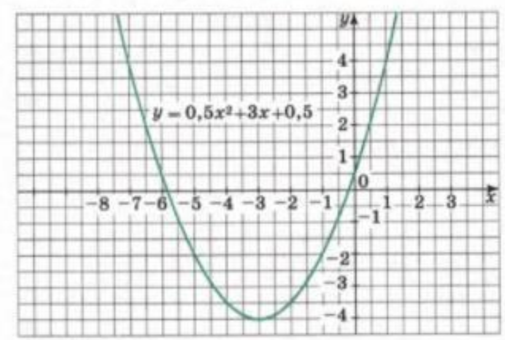


Рис. 31

При составлении таблицы и построении графика учитывалось, что прямая $x = -3$ является осью симметрии параболы. Поэтому мы брали точки с абсциссами -4 и -2, -5 и -1, -6 и 0, симметричные относительно прямой $x = -3$ (эти точки имеют одинаковые ординаты).

Для тех, кто хочет знать больше

10. Дробно-линейная функция и ее график

Вам известны свойства и график функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$. Отметим еще одно свойство этой функции и особенность ее графика.

При неограниченном возрастании положительных значений аргумента значения функции, оставаясь положительными, убывают и стремятся к нулю, т. е. если $x > 0$ и $x \to +\infty$, то $y \to 0$. Аналогично если $x < 0$ и $x \to -\infty$, то $y \to 0$. На графике это свойство проявляется в том, что точки графика по мере их удаления в бесконечность (т. е. при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$) неограниченно приближаются к оси x. Говорят, что ось x, т. е. прямая $y = 0$, является *асимптотой* графика функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$.

Пример 1. Построим график функции $y = \frac{2x+4}{x-1}$.

▶ Для этого выделим из дроби $\frac{2x+4}{x-1}$ целую часть, представив дробь в виде $n + \frac{k}{x-m}$.

Имеем

$$\frac{2x+4}{x-1} = \frac{2x-2+6}{x-1} = \frac{2(x-1)+6}{x-1} = 2 + \frac{6}{x-1}.$$

Здесь $k = 6$, $m = 1$, $n = 2$.

График функции $y = \frac{6}{x-1} + 2$ можно получить из графика функции $y = \frac{6}{x}$ с помощью двух параллельных переносов: сдвига гиперболы $y = \frac{6}{x}$ на 1 единицу вправо вдоль оси x и сдвига полученного графика $y = \frac{6}{x-1}$ на 2 единицы вверх в направлении оси y. При этом преобразовании сдвинутся и асимптоты гиперболы $y = \frac{6}{x}$: ось x перейдет в прямую $y = 2$, а ось y — в прямую $x = 1$.

Для построения графика данной функции поступим так: проведем в координатной плоскости пунктиром асимптоты: прямую $x = 1$ и прямую $y = 2$. Так как гипербола состоит из двух ветвей, то для построения этих ветвей составим две

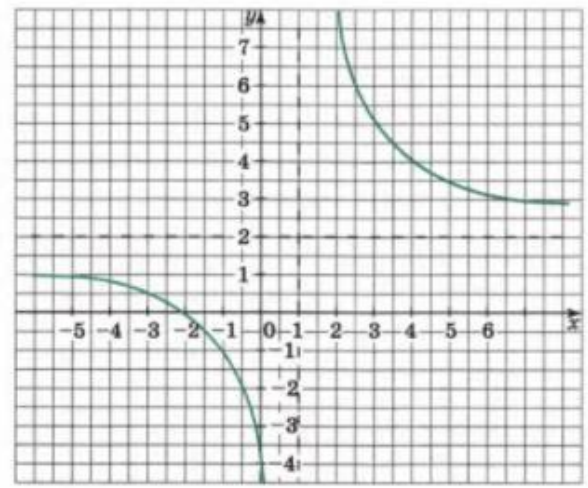


Рис. 45

таблицы: одну для $x < 1$, другую для $x > 1$.

x	−5	−3	−2	−1	0
y	1	0,5	0	−1	−4

x	2	3	4	5	7
y	8	5	4	3,5	3

Отметив в координатной плоскости точки, координаты которых указаны в первой таблице, и соединив их плавной непрерывной линией, получим одну ветвь гиперболы. Аналогично, используя вторую таблицу, получим вторую ветвь гиперболы.

График функции $y = \frac{2x+4}{x-1}$ изображен на рисунке 45. ◁

Задание 22. Пример 1. Решение 1/2

№ 22 с 2021 года

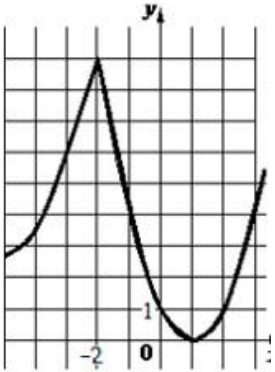
23 Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, & \text{если } x\geq -2, \\ -\dfrac{18}{x}, & \text{если } x<-2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Решение.

Построим график функции $y=-\dfrac{18}{x}$ при $x<-2$ и график функции $y=x^2-2x+1$ при $x\geq -2$.



Прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки при $m=0$ и при $m\geq 9$.

Ответ: 0; $[9;+\infty)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

Задание 22. Пример 1. Решение 2

№ 22 с 2021 года

Решение.

Построим график функции $y = -\dfrac{18}{x}$.

Графиком является гипербола, состоящая из двух ветвей, расположенных во второй и четвертой четвертях.

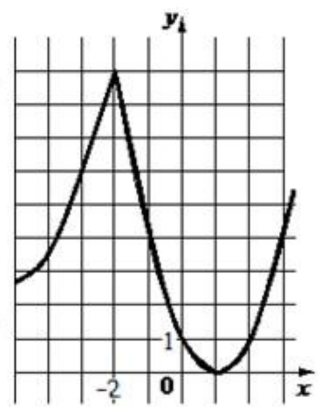
Так как нужна ветвь гиперболы при $x < -2$, то строим ветвь во второй четверти.

x	-1	$\mathbf{-2}$	-3	-6	-9	-18
y	18	**9**	6	3	2	1

Построим график функции $y = x^2 - 2x + 1$. Квадратичная функция, графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.

Вершина параболы – (1; 0). Так нам нужна часть параболы при при $x \geq -2$, то вычислим координаты точек при $x \geq -2$, учитываю симметрию относительно прямой $x = 1$.

x	$\mathbf{-2}$	-1	0	1	2	3	4
y	**9**	4	1	0	1	4	9

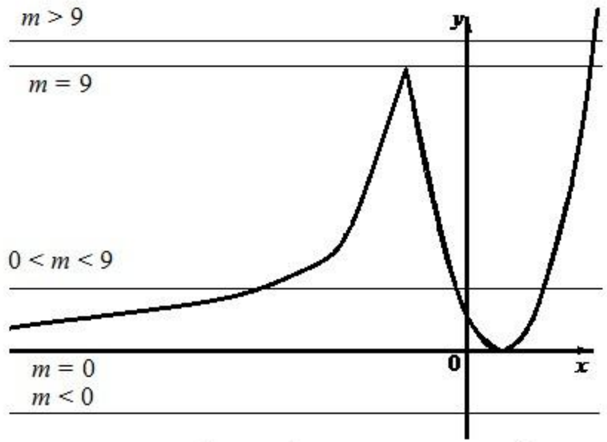


Оставим ветвь гиперболы при $x < -2$ и часть параболы при $x \geq -2$. (В точке $x = -2$ происходит «склейка» графиков.)

№ 22 с 2021 года

Задание 22. Пример 1. Решение 2 (*окончание*)

Построим семейство прямых $y = m$, параллельных или совпадающих с осью Ox.



При $m < 0$ прямая $y = m$ с графиком функции не имеет общих точек;
при $m = 0$ прямая $y = m$ с графиком функции имеет одну общую точку;
при $0 < m < 9$ прямая $y = m$ с графиком функции имеет три общих точки;
при $m = 9$ прямая $y = m$ с графиком функции имеет две общие точки;
при $m > 9$ прямая $y = m$ с графиком функции имеет одну общую точку.

Прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки при $m = 0$ и при $m \ge 9$.

Ответ: 0; $[9; +\infty)$.

Задание 22. Пример 1. Работа 1

№ 22 с 2021 года

23 Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, \text{ если } x \geq -2, \\ -\dfrac{18}{x}, \text{ если } x<-2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: 0; $[9;+\infty)$.

(23) $y\begin{cases} x^2-2x+1 & (x\geq-2) \\ -\frac{18}{x} & (x<-2) \end{cases}$

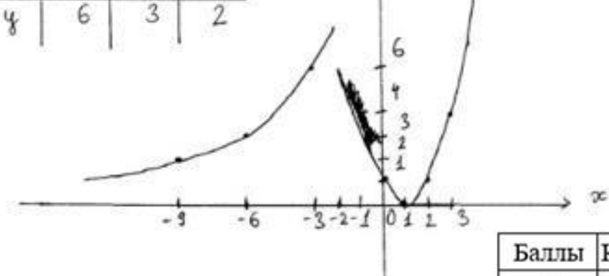
1) $y=x^2-2x+1 \quad (x\geq 2)$

$x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{2}{2}=1 \Rightarrow y_0=1^2-2\cdot1+1=1-2+1=0$

x	-1	0	1	2	3
y	4	1	0	1	4

2) $y=-\frac{18}{x} \quad (x<-2)$

x	-3	-6	-9
y	6	3	2



Расмотрим на график.
При $x=-2$ прямая $y=m$ имеет с графиком две общие точки
$x=-2 \Rightarrow m=y=9$
Ответ: 9

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

? баллов

Задание 22. Пример 1. Работа 1

№ 22 с 2021 года

23 Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, \text{ если } x\geq -2, \\ -\dfrac{18}{x}, \text{ если } x<-2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: 0; $[9;+\infty)$.

(23) $y\begin{cases} x^2-2x+1 & (x\geq -2) \\ -\frac{18}{x} & (x<-2) \end{cases}$

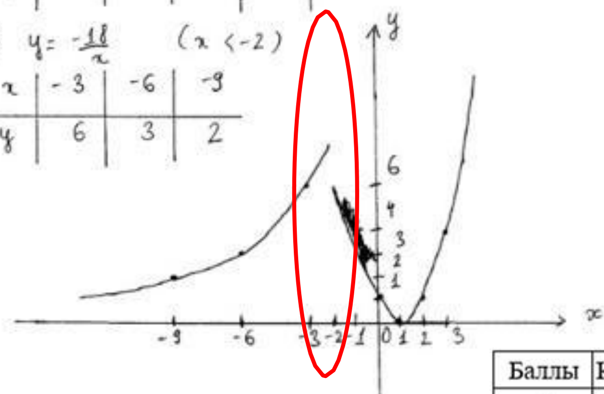
• $y=x^2-2x+1 \quad (x\geq -2)$

$x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{2}{2}=1 \Rightarrow y_0=1^2-2\cdot 1+1=1-2+1=0$

x	-1	0	1	2	3
y	4	1	0	1	4

• $y=-\frac{18}{x} \quad (x<-2)$

x	-3	-6	-9
y	6	3	2



Рассмотрим на график.

При $x=-2$ прямая $y=m$ имеет с графиком две общие точки

$x=-2 \Rightarrow m=y=9$

Ответ: 9

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

0 баллов

Задание 22. Пример 1. Работа 2

№ 22 с 2021 года

$$y = \begin{cases} x^2-2x+1 \text{ ; при } x \geq -2 \\ -\frac{18}{x} \text{ ; при } x < -2 \end{cases}$$

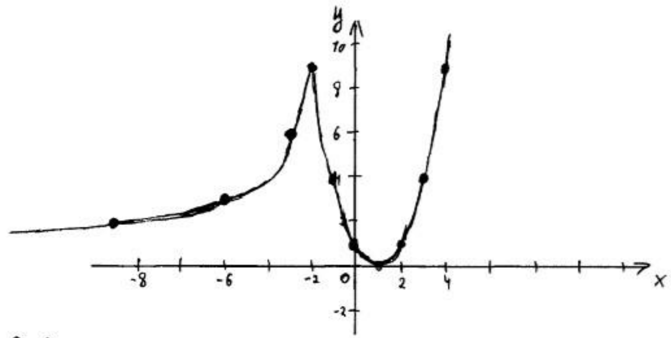
$-\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$ $\quad y = 1-2+1=0$

x	-2	-1	0	1	2
y	9	4	1	4	9

$y = x^2-2x+1$; при $x \geq -2$

x	-9	-6	-3
y	2	3	6

$y = -\frac{18}{x}$, при $x < -2$



Ответ: при $m=0$ и $m \in [9;+\infty)$

23 Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2-2x+1, \text{ если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, \text{ если } x < -2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: $0; [9;+\infty)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

? баллов

Задание 22. Пример 1. Работа 2

№ 22 с 2021 года

$$y = \begin{cases} x^2-2x+1 \ ; \text{при } x \geq -2 \\ -\frac{18}{x} \ ; \text{при } x < -2 \end{cases}$$

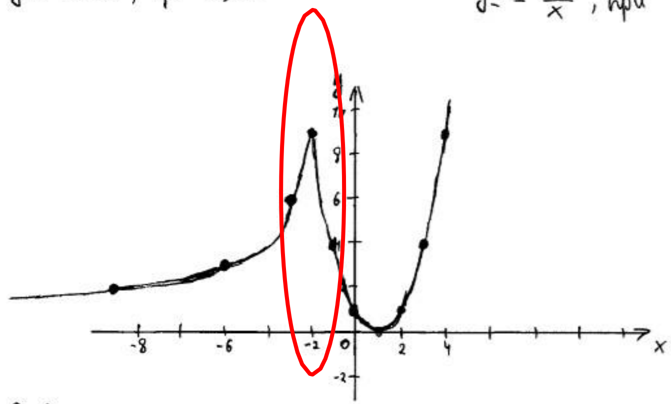
$-\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \qquad y = 1-2+1=0$

x	-2	-1	0	1	2
y	9	4	1	4	9

$y=x^2-2x+1$; при $x \geq -2$

x	-9	-6	-3
y	2	3	6

$y = -\frac{18}{x}$, при $x < -2$



Ответ: при $m=0$ и $m \in [9;+\infty)$

23 Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2-2x+1, \text{ если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, \text{ если } x < -2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: 0; $[9;+\infty)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

0 баллов

Задание 22. Пример 1. Работа 3

№ 22 с 2021 года

23 Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, \text{ если } x\geq -2, \\ -\frac{18}{x}, \text{ если } x<-2,\end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: $0;\ [9;+\infty)$.

$$y\begin{cases} 1)\ x^2-2x+1, \text{ при } x\geqslant -2 \\ 2)\ -\frac{18}{x}, \text{ при } x<-2\end{cases}$$

1) $y=x^2-2x+1$

$x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{2}{2}=1$

$y_0=1^2-2\cdot 1+1=1-2+1=0$

$(1;0)$ – вершина

x	2	3	4
y	1	4	9

x	0	-1	-2
y	1	4	9

2) $y=-\frac{18}{x}$

x	3	6	2
y	-6	-3	-9

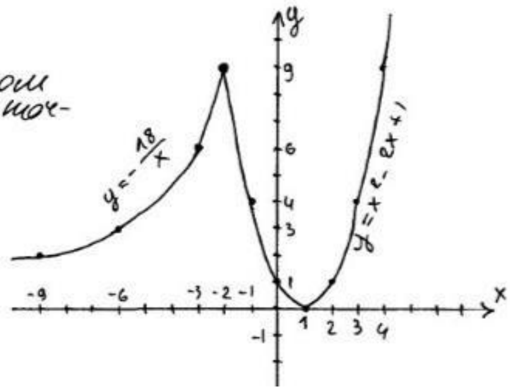
x	-3	-6	-2
y	6	3	9

$y=m$

m – ? (имеет с графиком одну или две общие точки)

$m=0;[9;+\infty)$

Ответ: $0;[9;+\infty)$ – m



Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

? баллов

Задание 22. Пример 1. Работа 3

№ 22 с 2021 года

23 Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\dfrac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: $0;\ [9;+\infty)$.

$$y\begin{cases} 1)\ x^2-2x+1, \text{ при } x \geqslant -2 \\ 2)\ -\dfrac{18}{x}, \text{ при } x < -2 \end{cases}$$

1) $y = x^2 - 2x + 1$

$x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1$

$y_0 = (1)^2 - 2\cdot 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

$(1; 0)$ − вершина

x	2	3	4
y	1	4	9

x	0	−1	−2
y	1	4	9

2) $y = -\dfrac{18}{x}$

x	3	6	2
y	−6	−3	−9

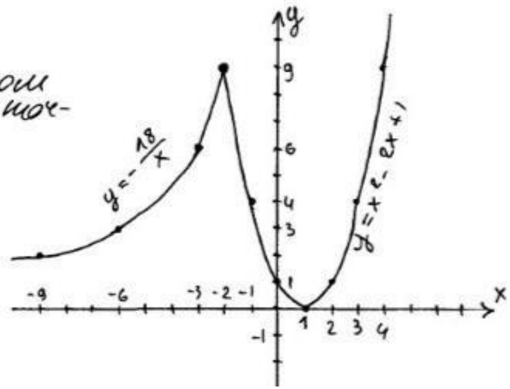
x	−3	−6	−2
y	6	3	9

$y = m$

m − ? (имеет с графиком одну или две общие точки)

$m = 0; [9; +\infty)$

Ответ: $0; [9; +\infty)$ − m



Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

0 баллов

Задание 22. Пример 1. Работа 4

№ 22 с 2021 года

23 Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, \text{ если } x\ge -2, \\ -\dfrac{18}{x}, \text{ если } x<-2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: $0;\ [9;+\infty)$.

23. $D(y): x \in (-\infty; 0); (0; +\infty)$.

$y = x^2 - 2x + 1$

квадратичная функция

график – парабола

ветви вверх.

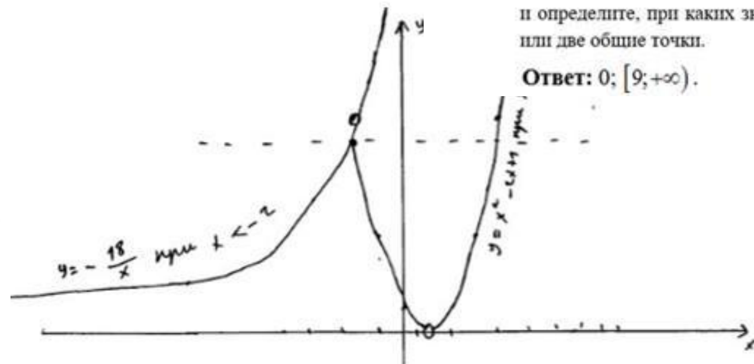
$x_в = \frac{2}{2} = 1$

$y_в = 1 - 2 + 1 = 0$

$y = -\frac{18}{x}$

график – гипербола.

x	1	18	2	9	...
y	-18	-1	-9	-2	...



Прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки при $m = 8$ или $m = 0$.

Ответ: 0; 8

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

? баллов

Задание 22. Пример 1. Работа 4

№ 22 с 2021 года

23 Постройте график функции

$$y=\begin{cases}x^2-2x+1, & \text{если } x\geq -2,\\ -\dfrac{18}{x}, & \text{если } x<-2,\end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: 0; $[9;+\infty)$.

23. $D(y): x \in (-\infty;0);(0;+\infty)$.

$y = x^2 - 2x + 1$

квадратичная функция

график - парабола

ветви вверх.

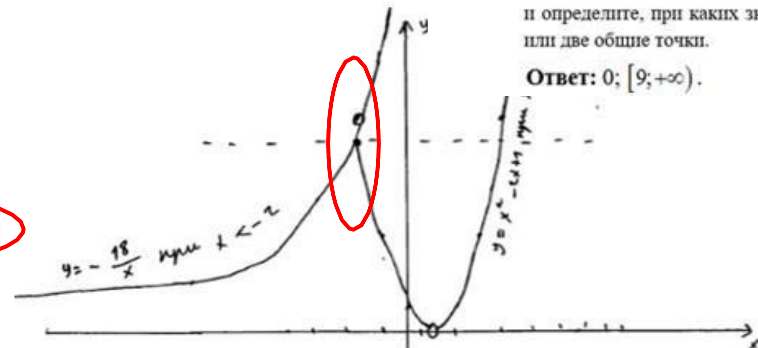
$x_в = \frac{2}{2} = 1$

$y_в = 1 - 2 + 1 = 0$

$y = -\frac{18}{x}$

график - гипербола.

x	1	18	2	9	...
y	−18	−1	−9	−2	...



Прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки при $m = 8$ или $m = 0$.

Ответ: 0; 8

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

0 баллов

Задание 22. Пример 1. Работа 5

№ 22 с 2021 года

23 Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, \text{ если } x\geq -2, \\ -\dfrac{18}{x}, \text{ если } x<-2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: 0; $[9;+\infty)$.

№23.

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1 \text{ при } x\geq -2. \\ -\dfrac{18}{x} \text{ при } x<-2 \end{cases}$$

$y=x^2-2x+1=0$

т. О$(1;0)$

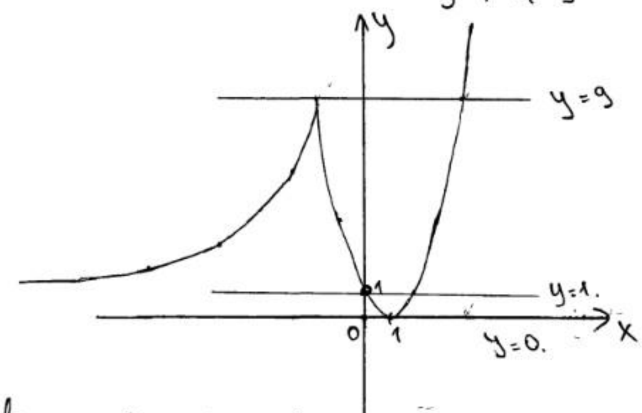
x	0	-1	-2
y	1	4	9

$y=-\dfrac{18}{x}$

x	-2	-3	-6	-9
y	9	6	3	2

ОДЗ

$x\neq 0$.



Ответ: $m=0$, $m=9$, $m=1$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

? баллов

Задание 22. Пример 1. Работа 5

№ 22 с 2021 года

№23.

$y=\begin{cases} x^2-2x+1 \text{ при } x \geq -2. \\ -\frac{18}{x} \text{ при } x<-2 \end{cases}$

$y=x^2-2x+1=0$

т. $O(1;0)$

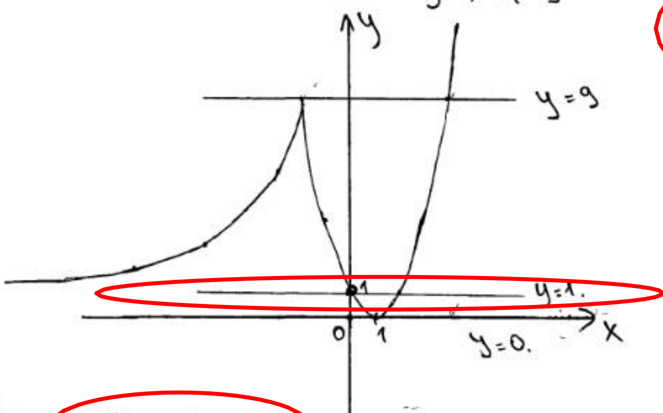
x	0	-1	-2
y	1	4	9

$y=-\frac{18}{x}$

x	-2	-3	-6	-9
y	9	6	3	2

ОДЗ

$x \neq 0$



Ответ: $m=0$, $m=9$, $m=1$.

23 Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, \text{ если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, \text{ если } x<-2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: 0; $[9;+\infty)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

0 баллов

Задание 22. Пример 2. Решение 1/3

№ 22 с 2021 года

23 Постройте график функции

$$y = |x^2 - 4x + 3|.$$

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Решение.

Построим график функции $y = x^2 - 4x + 3$ при $x < 1$ и $x > 3$ и график функции $y = -x^2 + 4x - 3$ при $1 \le x \le 3$.

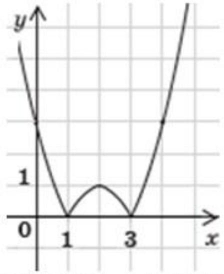


График данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс, 0, 2, 3 или 4 общие точки.

Ответ: 4.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдено искомое количество точек
1	График построен верно, но искомое количество точек найдено неверно или не найдено
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

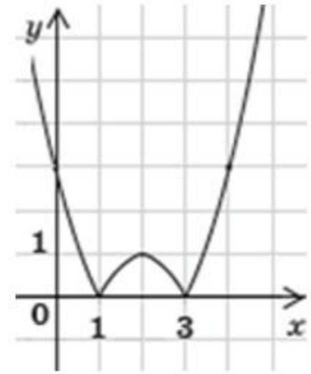
Задание 22. Пример 2. Решение 2/3

№ 22 с 2021 года

Решение.

$$y=\begin{cases} x^2-4x+3, \text{ если } x^2-4x+3\ge 0, \\ -x^2+4x-3, \text{ если } x^2-4x+3\le 0; \end{cases}$$

$$y=\begin{cases} x^2-4x+3, \text{ если } x\le 1 \text{ или } x\ge 3, \\ -x^2+4x-3, \text{ если } 1<x<3. \end{cases}$$

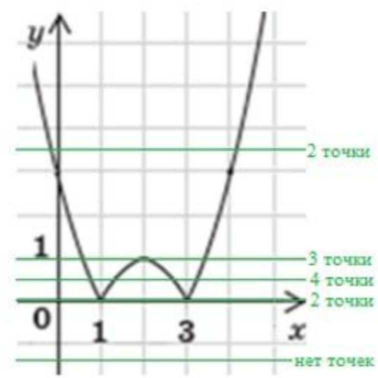


Построим график этой функции:

1) При $x<1$ и $x>3$ – часть параболы $y=x^2-4x+3$ – ветви направлены вверх, вершина имеет координаты $(2;\ -1)$ – расположенная в верхней полуплоскости относительно оси Ox.

2) При $1\le x\le 3$ – часть параболы $y=-x^2+4x-3$ – ветви направлены вниз, вершина имеет координаты $(2;\ 1)$ – расположенная в нижней полуплоскости относительно оси Ox.

Обе параболы проходят через точки $(1;\ 0)$ и $(3;\ 0)$.



Прямая, параллельная оси абсцисс, может иметь с построенным графиком функции 0, 2, 3 и 4 точки. Наибольшее число общих точек – 4.

Ответ: 4.

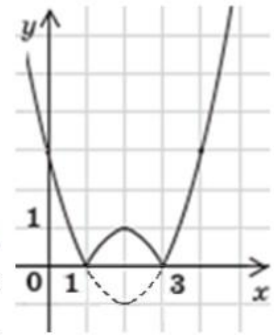
Задание 22. Пример 2. Решение 3

№ 22 с 2021 года

Решение.

$$\left|x^2-4x+3\right|=\begin{cases}x^2-4x+3, \text{ если } x^2-4x+3\ge 0,\\ -x^2+4x-3, \text{ если } x^2-4x+3\le 0;\end{cases}$$

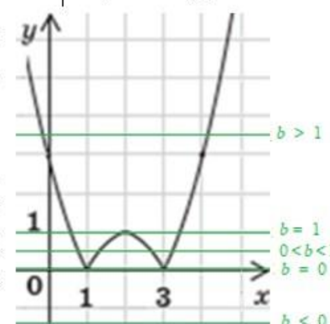
$$\left|x^2-4x+3\right|=\begin{cases}x^2-4x+3, \text{ если } x\le 1 \text{ или } x\ge 3,\\ -x^2+4x-3, \text{ если } 1<x<3.\end{cases}$$



Построим график функции $y=x^2-4x+3$. Графиком функции $y=x^2-4x+3$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина имеет координаты (2; – 1).

При $x<1$ и $x>3$ графиком функции $y=\left|x^2-4x+3\right|$ будет часть параболы $y=x^2-4x+3$, расположенная в верхней полуплоскости относительно оси Ox.

2) При $1\le x\le 3$ графиком функции $y=\left|x^2-4x+3\right|$ будет другая часть параболы $y=x^2-4x+3$, отраженная симметрично относительно оси Ox в верхнюю полуплоскость координатной плоскости.



Прямая, параллельная оси абсцисс, задается уравнением $y=b$. Эта прямая пересекает построенный график функции в 2, 3 или 4 точках или не пересекает его. Наибольшее число общих точек – 4.

Ответ: 4.

Задание 22. Пример 2. Работа 1

№ 22 с 2021 года

23 Постройте график функции

$$y = \left|x^2 - 4x + 3\right|.$$

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Ответ: 4.

№23 Решение

Построим график функции $y=|x^2-4x+3|$ Графиком является парабола, $a=1>0$ (ветви направлены вверх)

Чтобы построить график функции $y=|f(x)|$ можно построить параболу, часть графика, лежащую выше оси OX сохранить, а часть лежащую ниже оси OX отобразить над осью OX.

Найдём вершину параболы $x_0; y_0$ $x_0 = \frac{-b}{2a}$. $x_0 = \frac{4}{2} = 2$

$y_0 = 2^2-8+3 = -1$ $(2;-1)$ – вершина

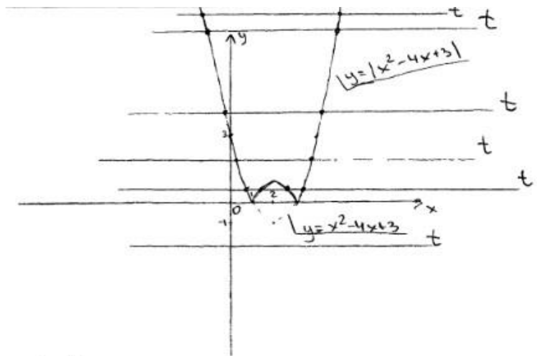
OY: $0^2-4\cdot0+3=3$ $(0;3)$

OX: $x^2-4x+3=0$

$D=16-12=4$

$x_1 = \frac{4+2}{2} = 3$ $x_2 = \frac{4-2}{2} = 1$ $(3;0);(1;0)$

$y(5) = 5^2-5\cdot4+3 = 25-20+3 = 8$ $(5;8)$



Проведём прямые, параллельные оси абсцисс. Назовём их прямая t и отметим её точки пересечения с графиком $y=|x^2-4x+3|$

Ответ: 4 общих точки

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

? баллов

Задание 22. Пример 2. Работа 1

№ 22 с 2021 года

23 Постройте график функции

$$y = \left|x^2 - 4x + 3\right|.$$

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Ответ: 4.

№23

Решение

Построим график функции $y=|x^2-4x+3|$ Графиком является парабола, $a=1 \geqslant$ (ветви направлены вверх)

Чтобы построить график функции $y=|f(x)|$ можно построить параболу, часть графика, лежащую выше оси OX сохранить, а часть лежащую ниже оси OX отобразить над осью OX.

Найдём вершину параболы $x_0; y_0$ $x_0=\frac{-b}{2a}$. $x_0=\frac{4}{2}=2$

$y_0=2^2-8+3=-1$ $(2;-1)$ – вершина

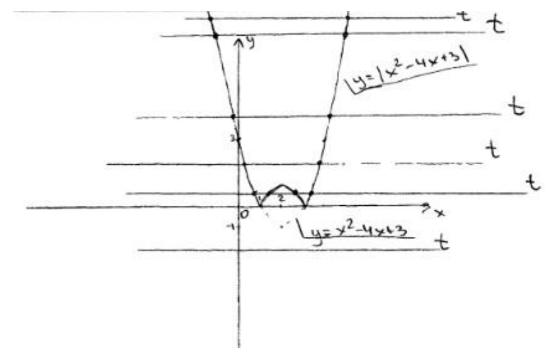
OY: $0^2-4\cdot0+3=3$ $(0;3)$

OX: $x^2-4x+3=0$

$D=16-12=4$

$x_1=\frac{4+2}{2}=3$ $x_2=\frac{4-2}{2}=1$ $(3;0);(1;0)$

$y(5)=5^2-5\cdot4+3=25-20+3=8$ $(5;8)$



Проведём прямые, параллельные оси абсцисс. Назовём их прямые t и отметим её точки пересечения с графиком $y=|x^2-4x+3|$

Ответ: 4 общих точки

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

0 баллов

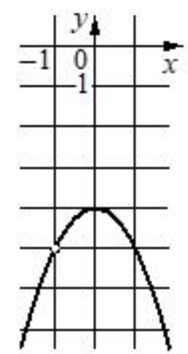
Задание 22. Пример 3. Решение

№ 22 с 2021 года

Постройте график функции $y=\dfrac{\left(x^2+4\right)(x+1)}{-1-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Преобразуем выражение: $\dfrac{\left(x^2+4\right)(x+1)}{-1-x}=-x^2-4$ при условии, что $x\neq-1$. Построим график (см. рисунок).



Прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку, если она проходит через точку $(-1;-5)$ или если уравнение $-x^2-4=kx$ имеет один корень. Дискриминант уравнения $x^2+kx+4=0$ равен k^2-16, и он должен быть равен нулю. Получаем, что $k=5$, $k=-4$ и $k=4$.

Ответ: $k=5$, $k=-4$, $k=4$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

Задание 22. Пример 3. Работа 1

№ 22 с 2021 гола

Постройте график функции $y=\dfrac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $k=5$, $k=-4$, $k=4$.

$y=\dfrac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}=\dfrac{(x^2+4)(x+1)}{-(1+x)}=-(x^2+4)=-x^2-4$

$y=-x^2-4$ - ф. квадратичная, гр. парабола, ветви ↓, вершина $(0;-4)$

$-1-x\neq 0$

$-x\neq 1 \mid\cdot(-1)$

$x\neq -1$

$kx=-x^2-4$

$kx+x^2+4=0$

$D=k^2-4\cdot 4=$

$=k^2-16$

$k^2-16=0$

$(k-4)(k+4)=0$

$k_1=4$ или $k_2=-4$

При $k=\pm 4$ и $k=-5$ прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: ± 4; -5.

? баллов

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

Задание 22. Пример 3. Работа 1

№ 22 с 2021 гола

Постройте график функции $y=\frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $k=5$, $k=-4$, $k=4$.

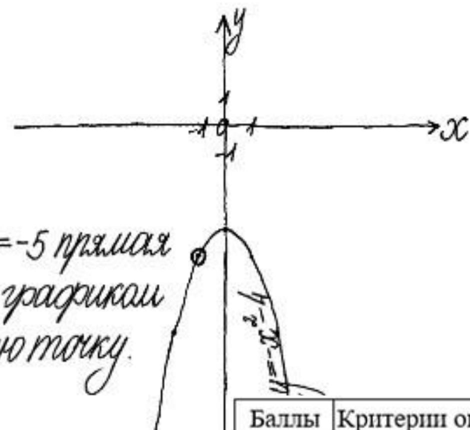
$y=\frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}=\frac{(x^2+4)\cancel{(x+1)}}{-\cancel{(1+x)}}=-(x^2+4)=-x^2-4$

$y=-x^2-4$ - ф. квадратичная, гр. парабола, ветви ↓, вершина $(0;-4)$

$-1-x\neq0$

$-x\neq1 \quad |\cdot(-1)$

$x\neq-1$



$kx=-x^2-4$

$kx+x^2+4=0$

$D=k^2-4\cdot4=$

$=k^2-16$

$k^2-16=0$

$(k-4)(k+4)=0$

$k_1=4$ или $k_2=-4$

При $k=\pm4$ и $k=-5$ прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: ±4; -5.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

0 баллов

Задание 22. Пример 3. Работа 2

№ 22 с 2021 года

Постройте график функции $y=\frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $k=5$, $k=-4$, $k=4$.

$y=\frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$

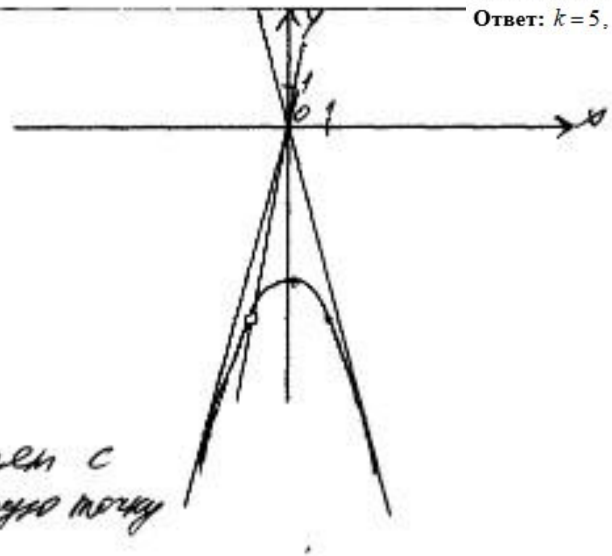
$y=\frac{-(x^2+4)(-x-1)}{-x-1}$

$y=-(x^2+4)$, где $-x-1\neq0$

$y=-x^2-4$, где $x\neq-1$

квадр. функция; графика парабола; ветви вниз

вершина $(0;-4)$



Ответ: прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку при $k=-4;4;5$

? баллов

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

Задание 22. Пример 3. Работа 2

№ 22 с 2021 гола

Постройте график функции $y=\frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $k=5$, $k=-4$, $k=4$.

$y=\frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$

$y=\frac{-(x^2+4)(-x-1)}{-x-1}$

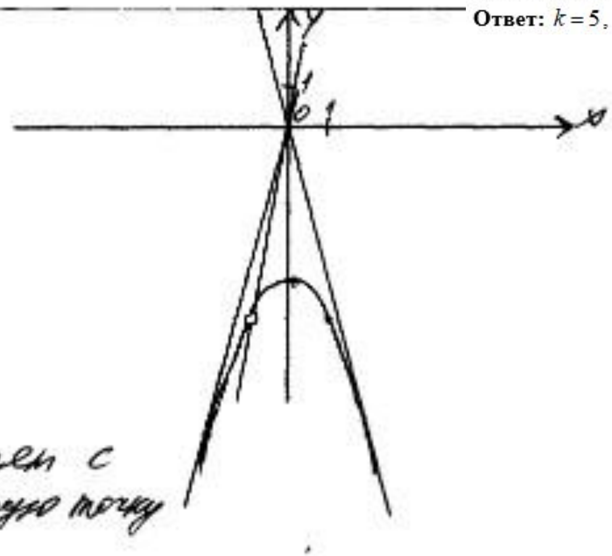
$y=-(x^2+4)$, где $-x-1\neq 0$

$y=-x^2-4$, где $x\neq -1$

квад. функция; графика парабола; ветви вниз

вершина $(0;-4)$

Ответ: прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку при $k=-4;4;5$



Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

0 баллов

Задание 25. Пример 1

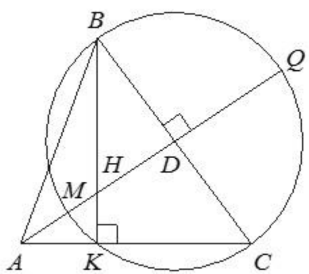
№ 25 с 2021 года

26 На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Решение.

Пусть окружность с диаметром BC вторично пересекается с прямой AC в точке K (см. рис.). Поскольку BK — высота остроугольного треугольника ABC, точка K лежит на стороне AC.

Продолжим высоту AD за точку D до пересечения с окружностью в точке Q. Тогда $DQ = MD = 3$.



По следствию из теоремы о касательной и секущей

$AK \cdot AC = AM \cdot AQ = (AD - MD) \cdot (AD + MQ) =$
$= 6 \cdot 12 = 72$.

Из подобия прямоугольных треугольников AKH и ADC следует, что

$\frac{AK}{AH} = \frac{AD}{AC}$, откуда $AK \cdot AC = AD \cdot AH = 9AH$.

Значит, $9AH = 72$. Следовательно, $AH = 8$.

Ответ: 8.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

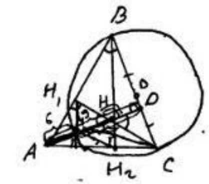
Задание 25. Пример 1. Работа 1

№ 25 с 2021 года

На стороне BC остроугольного треугольника ABC $(AB \neq AC)$ как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

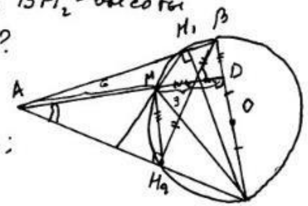
Ответ: 8.

№26



Дано:
$\triangle ABC$; ~~∠B – острый~~ O – окружность
$BC = d$
$AB = 9$ $MD = 3$
точка H – точка пересечения высот
AD; CH_1; BH_2 – высоты
Найти: $AH = ?$

Решение:



$\triangle ABC$ – данный треугольник;
BC – диаметр окружности O.
$AD = 9$; $MD = 3$
$AM = AD - MD = 9 - 3 = 6$ (по аксиоме измерения отрезков).
Доп. построение.
Построю ~~эти~~ отрезок MC.
Рассмотрю $\triangle AH_1H$ и $\triangle DCM$.
Они подобны по 1-ому признаку подобия треугольников.
Значит $K = \frac{AD}{MC} = \frac{H_1H}{DM} = \frac{AB}{DC}$.
$K = \frac{9}{MC} = \frac{H_1H}{3} = \frac{AB}{DC} = K$

Пусть $MH = x$ см $x > 0$, тогда $AH = x + 6$ см.
~~Рассмотрю △ABD и △ABH₁~~
~~Они подобны, значит K = 1,5.~~
Рассмотрю $\triangle HBD$ и $\triangle HH_2H$.
Они равные по 1-ому признаку равенства $\triangle$.
($\angle HHH_2 = \angle BHC$ как вертикальные)
($H_2H = BH$; $H_1H = CH$)
Следовательно $MD = MH + HD = 3 : 2 = 1,5$.
$AH = AM + MH$.
$6 + 1,5 = 7,5$ (по аксиоме измерения отрезков)
Ответ: 7,5 см.

$6 + 2x = 9$
$x = 1,5$
$AH = 7,5$

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

? баллов

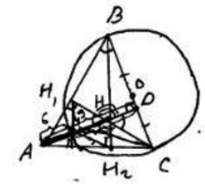
Задание 25. Пример 1. Работа 1

№ 25 с 2021 года

На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

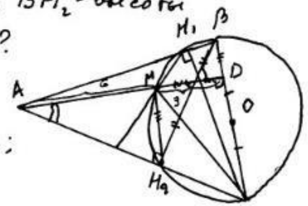
Ответ: 8.

№26



Дано:
$\triangle ABC$; ~~$\angle B$ – острый~~ O - окружность
$BC = d$
$AB = 9$ $MD = 3$
точка H - точка пересечения высот
AD; CH_1; BH_2 - высоты
Найти: $AH = ?$

Решение:



$\triangle ABC$ - данный треугольник;
BC - диаметр окружности O.
$AD = 9$; $MD = 3$
$AM = AD - MD = 9 - 3 = 6$ (по аксиоме измерения отрезков).
Доп. Построение.
Построю ~~отрез~~ отрезок MC.
Рассмотрю $\triangle AH_1H$ и $\triangle DCM$.
Они подобны по 1-ому признаку подобия треугольников.
Значит $K = \frac{AD}{MC} = \frac{H_1H}{DM} = \frac{AB}{DC}$.
$K = \frac{9}{MC} = \frac{H_1H}{3} = \frac{AB}{DC} = K$

Пусть $MH = x$ см $x > 0$, тогда $AH = x + 6$ см.
~~Рассмотрю $\triangle ABD$ и $\triangle ABH_1$~~
~~Они подобны, значит $k = 1,5$.~~
Рассмотрю $\triangle HBD$ и $\triangle HH_2H$.
Они равные по 1-ому признаку равенства $\triangle$.
($\angle HHH_2 = \angle BHC$ как вертикальные)
($H_2H = BH$; $H_1H = CH$)
Следовательно $MD = MH + HD = 3 : 2 = 1,5$.
$AH = AM + MH$.
$6 + 1,5 = 7,5$ (по аксиоме измерения отрезков)
Ответ: 7,5см.

$6 + 2x = 9$
$x = 1,5$
$AH = 7,5$

0 баллов

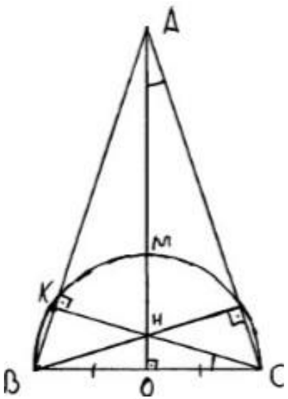
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

Задание 25. Пример 1. Работа 2

№ 25 с 2021 года

На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Ответ: 8.



Решение:

т. M делит отрезок AD в отношении $\frac{AM}{MD} = \frac{AD-MD}{MD} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$, считая от вершин

=> т. M - точка пересечения медиан △ABC. ~~но так.~~

AM - медиана △ABC, но т.к. AM ∈ AD, то есть AD является и высотой, и медианой △ABC одновременно =>

△ABC - равнобедренный (по признаку).

Рассмотрим △AOC и △CKB. [redacted]

∠KBO = ∠OCA (по св-ву равнобедренного треугольника)

∠AOC = ∠CKB = 90° =>

△AOC ∼ △CKB (по двум углам).

Рассмотрим △CKB и △CDH:

[redacted] ∠KCB - общий;

∠BKC = ∠HDC = 90° =>

△CKB ∼ △CDH.

Т.к. △AOC ∼ △CKB, △CKB ∼ [redacted] △CDH } => △AOC ∼ △CDH (под

т.к. △AOC ∼ △CDH, то => $\frac{DC}{AD} = \frac{HD}{DC}$ =>

$DC^2 = AD \cdot HD$; $HD = \frac{DC^2}{AD}$; $HD = \frac{3^2}{9} = 1$

AH = AD - HD (по св-ву отрезков)

AH = 9 - 1 = 8

Ответ: 8.

? баллов

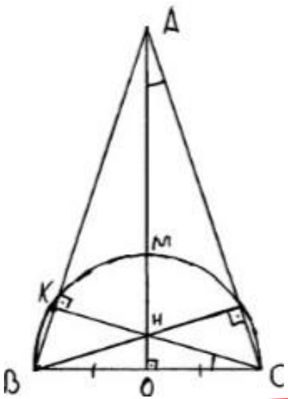
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

Задание 25. Пример 1. Работа 2

№ 25 с 2021 года

На стороне BC остроугольного треугольника ABC $(AB \neq AC)$ как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Ответ: 8.



Решение:

т. M делит отрезок AD в отношении $\frac{AM}{MD} = \frac{AD-MD}{MD} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$, считая от вершины

=> т. M - точка пересечения медиан $\triangle ABC$. ~~не так~~

AM - медиана $\triangle ABC$, но т.к. $AM \in AD$, то есть AD является и высотой, и медианой $\triangle ABC$ одновременно =>

$\triangle ABC$ - равнобедренный (по признаку).

Рассмотрим $\triangle AOC$ и $\triangle CKB$. [redacted]

$\angle KBO = \angle OCA$ (по св-ву равнобедренного треугольника)

$\angle AOC = \angle CKB = 90°$ =>

$\triangle AOC \sim \triangle CKB$ (по двум углам).

Рассмотрим $\triangle CKB$ и $\triangle CDH$:

[redacted] $\angle KCB$ - общий;

$\angle BKC = \angle HDC = 90°$ =>

$\triangle CKB \sim \triangle CDH$.

Т.к. $\triangle AOC \sim \triangle CKB$, $\triangle CKB \sim$ [redacted] $\triangle CDH$ } => $\triangle AOC \sim \triangle CDH$ (под

т.к. $\triangle AOC \sim \triangle CDH$, то => $\frac{DC}{AD} = \frac{HD}{DC}$ =>

$DC^2 = AD \cdot HD$; $HD = \frac{DC^2}{AD}$; $HD = \frac{3^2}{9} = 1$

$AH = AD - HD$ (по св-ву отрезков)

$AH = 9 - 1 = 8$

Ответ: 8.

0 баллов

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

Задание 25. Пример 1. Работа 3

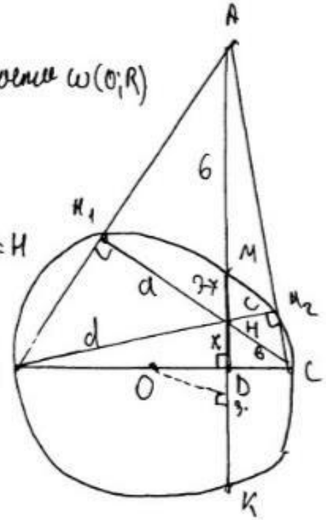
№ 25 с 2021 года

На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Ответ: 8.

$\sqrt{26}$

1) дополним полуокружность до окружности $\omega(O;R)$
2) $BA \cap \omega = H_1$; $AC \cap \omega = H_2$; $AD \cap \omega = M; K$
3) т.к. BC диаметр $\Rightarrow \angle BH_1C = \angle BH_2C = 90 \Rightarrow$
CH_1 и BH_2 высоты $\triangle ABC \Rightarrow AD \cap BH_2 \cap BH_1 = H$
пусть $DH = x$;
4) проведем сер. $\perp$ $MK \Rightarrow$ он проходит через O
$\Rightarrow$ сер $\perp \parallel BC$ но они $\cap$ в $O \Rightarrow BC$ проходит через сер $MK \Rightarrow MD = DK = 3$
5) пусть $H_1H = a$; $HC = b$; $HM_2 = c$; $BH = d$



$\triangle H_1HA \sim \triangle DHC$ т.к. $\angle ADC = 90 = \angle AH_1C$; $\angle H_1HA = \angle DHC \Rightarrow$

$\dfrac{a}{x} = \dfrac{9-x}{b} \Rightarrow ab = (9-x)x$

~~аналогично~~ по теореме о произведении секущих

$ab = (3-x)(3+x) = 9 - x^2 \Rightarrow 9x - x^2 = 9 - x^2 \Rightarrow 9x = 9 \Rightarrow x = 1$

Ответ: $AH = 9 - 1 = 8$

? баллов

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

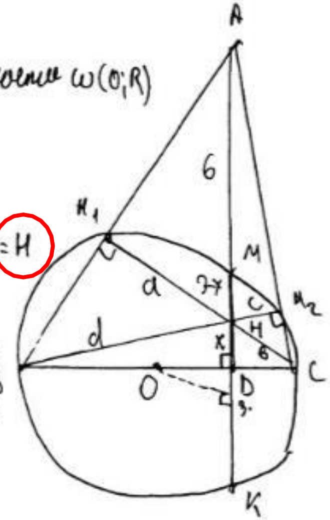
Задание 25. Пример 1. Работа 3

№ 25 с 2021 года

На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Ответ: 8.

$\sqrt{26}$



1) дополним полуокружность до окружности $\omega(O;R)$

2) $BA \cap \omega = H_1$; $AC \cap \omega = H_2$; $AD \cap \omega = M; K$

3) т.к BC диаметр $\Rightarrow \angle BH_1C = \angle BH_2C = 90 \Rightarrow$
CH_1 и BH_2 высоты $\Delta ABC \Rightarrow AD \cap BH_2 \cap BH_1 = H$
пусть $DH = x$;

4) проведем сер. $\perp$ $MK \Rightarrow$ он проходит через O
$\Rightarrow$ сер $\perp \parallel BC$ но они $\cap$ $BO \Rightarrow BC$ проходит
через сер $MK \Rightarrow MD = DK = 3$

5) пусть $H_1H = a$; $HC = b$; $HM_2 = c$; $BH = d$

$\Delta H_1HA \sim \Delta DHC$ т.к. $\angle ADC = 90 = \angle AH_1C$; $\angle H_1HA = \angle DHC \Rightarrow$

$\frac{a}{x} = \frac{9-x}{b} \Rightarrow ab = (9-x)x$

~~аналогично~~ по теореме о произведении секущих

$ab = (3-x)(3+x) = 9 - x^2 \Rightarrow 9x - x^2 = 9 - x^2 \Rightarrow 9x = 9 \Rightarrow x = 1$

Ответ: $AH = 9 - 1 = 8$

2 балла

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

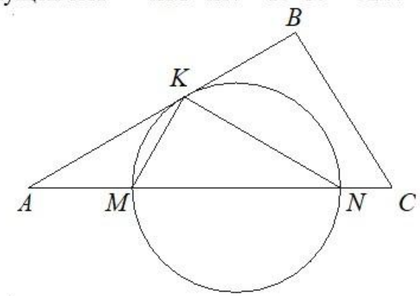
Задание 25. Пример 2

№ 25 с 2021 года

26 Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 16 и 39 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{39}}{8}$.

Решение.

Пусть K — точка касания окружности с лучом AB (см. рис.). По теореме о касательной и секущей $AK^2 = AM \cdot AN = 16 \cdot 39 = 624$.



По теореме косинусов

$$KM^2 = AM^2 + AK^2 - 2AM \cdot AK\cos\angle BAC = 256 + 624 - 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{624} \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = 256.$$

Значит, $KM = 16$. Треугольник AKM равнобедренный, поэтому $\angle AKM = \angle KAM = \angle BAC$.

По теореме об угле между касательной и хордой $\angle KNM = \angle AKM = \angle BAC$.

Пусть R — радиус окружности, проходящей через точки M, N и K. По теореме синусов

$$R = \frac{KM}{2\sin\angle KNM} = \frac{16}{2\sqrt{1-\frac{39}{64}}} = 12{,}8.$$

Ответ: 12,8.

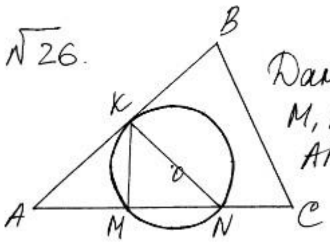
Задание 25. Пример 2. Работа 1

№ 25 с 2021 года

26	Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 16 и 39 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{39}}{8}$.

Ответ: 12,8.

№26.



Дано: $\triangle ABC$.
$M, N \in AC$.
$AM = 16$; $AN = 39$
$M, N \in \omega(O; r)$
K – точка касания
$\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{39}}{8}$
Найти: r – ?

1. $AK^2 = AM \cdot AN$ (по теореме о касательной и секущей)
$AK^2 = 16 \cdot 39 = 624$.

2. Рассмотрим $\triangle AKN$.
$\angle KAN = \frac{1}{2} \cup KM$ (по теореме об угле между секущей и касательной)
$\angle KNM = \frac{1}{2} \cup KM$ (вписанный угол)
$\Rightarrow \triangle AKN$ – р/б.

$KN = AK$
$\cos\angle BAC = \cos\angle KNM$.

3. Рассмотрим $\triangle KMN$: ($MN = AN - AM = 39 - 16 = 23$)
$KM^2 = KN^2 + MN^2 - 2KM \cdot KN \cdot \cos\angle KNM$.
$KM = \sqrt{624 + 529 - 2 \cdot 23 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} \cdot 4\sqrt{39}} = \sqrt{1153 - 897} = 16$
(по теореме косинусов)

4. по теореме синусов:
$\frac{KM}{\sin\angle KNM} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{KM}{2\sin\angle KNM}$

~~sin∠KNM~~
$\sin^2\angle KNM + \cos^2\angle KNM = 1$ – основное тригонометрическое тождество
$\sin\angle KNM = \sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8}$

$R = \frac{16}{\frac{10}{8}} = 16 \cdot \frac{4}{5} = \frac{64}{5} = 12\frac{4}{5} = 12,8$

Ответ: $R = 12,8$.

? баллов

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

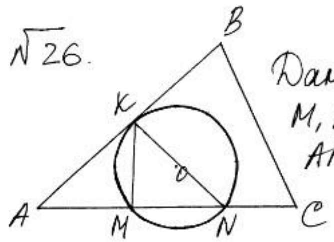
Задание 25. Пример 2. Работа 1

№ 25 с 2021 года

26 Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 16 и 39 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{39}}{8}$.

Ответ: 12,8.

№26.



Дано: $\triangle ABC$.
$M, N \in AC$.
$AM = 16$; $AN = 39$
$M, N \in \omega(O; r)$
K – точка касания
$\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{39}}{8}$
Найти: r – ?

1. $AK^2 = AM \cdot AN$ (по теореме о касательной и секущей)
$AK^2 = 16 \cdot 39 = 624$.

2. Рассмотрим $\triangle AKN$.
$\angle KAN = \frac{1}{2} \cup KM$ (по теореме об угле между секущей и касательной)
$\angle KNM = \frac{1}{2} \cup KM$ (вписанный угол)
$\Rightarrow \triangle AKN$ – р/б.

$KN = AK$
$\cos\angle BAC = \cos\angle KNM$.

3. Рассмотрим $\triangle KMN$: $(MN = AN - AM = 39 - 16 = 23)$
$KM^2 = KN^2 + MN^2 - 2KM \cdot KN \cdot \cos\angle KNM$.
$KM = \sqrt{624 + 529 - 2 \cdot 23 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} \cdot \sqrt{39}} = \sqrt{1153 - 897} = 16$ (по теореме косинусов)

4. по теореме синусов:
$\frac{KM}{\sin\angle KNM} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{KM}{2\sin\angle KNM}$

~~sin∠KNM~~
$\sin^2\angle KNM + \cos^2\angle KNM = 1$ – основное тригонометрическое тождество
$\sin\angle KNM = \sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8}$

$R = \frac{16}{\frac{10}{8}} = 16 \cdot \frac{4}{5} = \frac{64}{5} = 12\frac{4}{5} = 12,8$

Ответ: $R = 12,8$.

2 балла

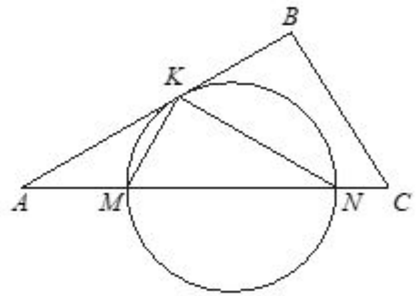
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

Задание 25. Пример 3. Решение

№ 25 с 2021 года

Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 4 и 15 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Решение.



Пусть K — точка касания окружности с лучом AB (см. рис.). По теореме о касательной и секущей $AK^2 = AM \cdot AN = 4 \cdot 15 = 60$.

По теореме косинусов

$$KM^2 = AM^2 + AK^2 - 2AM \cdot AK\cos\angle BAC =$$

$$= 16 + 60 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{60} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 16$$

Значит, $KM = 4$. Треугольник AKM равнобедренный, поэтому $\angle AKM = \angle KAM = \angle BAC$.

По теореме об угле между касательной и хордой $\angle KNM = \angle AKM = \angle BAC$.

Пусть R — радиус окружности, проходящей через точки M, N и K. По теореме синусов $R = \frac{KM}{2\sin\angle KNM} = \frac{4}{2\sqrt{1-\frac{15}{16}}} = 8$.

Ответ: 8.

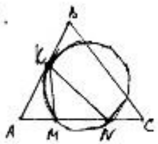
Задание 25. Пример 3. Работа 1

№ 25 с 2021 года

Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 4 и 15 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Ответ: 8.

26.



Дано:
$AM = 4,\ AN = 15,$
$\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}$

Найти: R

Решение:

$AK^2 = \sqrt{AM \cdot AN} = \sqrt{4 \cdot 15} = 2\sqrt{15}$

$\triangle AKM$: По т. косинусов

$KM = \sqrt{AK^2 + AM^2 - 2AK \cdot AM \cdot \cos\angle KAM} = \sqrt{60 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{15} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}} = \sqrt{16} = 4$

$\triangle AKN$: По т. косинусов

$KN = \sqrt{AK^2 + AN^2 - 2 \cdot AK \cdot AN \cdot \cos\angle KAN} = \sqrt{60 + 225 - 2 \cdot 15 \cdot 2\sqrt{15} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$

$R = \frac{KM \cdot MN \cdot KN}{4S}$

$S = \frac{1}{2} KN \cdot MN \cdot \sin\angle KNM$

$\triangle AKN$ – р/б $(AK = KN) \Rightarrow \angle KAN = \angle KNA$

$\sin\angle KAN = \sqrt{1 - \cos^2\angle KAN} = \sqrt{1 - \frac{15}{16}} = \frac{1}{4}$

$S = \frac{1 \cdot 2\sqrt{15} \cdot 11}{2 \cdot 4} = \frac{11\sqrt{15}}{4}$

$R = \frac{11 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{15}}{11 \cdot \sqrt{15}} = 8$

Ответ: 8

? баллов

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

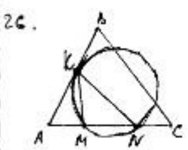
Задание 25. Пример 3. Работа 1

№ 25 с 2021 года

Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 4 и 15 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Ответ: 8.

26.



Дано:
$AM = 4,\ AN = 15,$
$\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}$

Найти: R

Решение:

$AK^2 = \sqrt{AM\cdot AN} = \sqrt{4\cdot 15} = 2\sqrt{15}$

$\triangle AKM$: по т. косинусов

$KM = \sqrt{AK^2 + AM^2 - 2AK\cdot AM\cdot \cos\angle KAM} = \sqrt{60+16-2\cdot 4\cdot 2\sqrt{15}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}} = \sqrt{16} = 4$

$\triangle AKN$: по т. косинусов

$KN = \sqrt{AK^2 + AN^2 - 2\cdot AK\cdot AN\cdot \cos\angle KAN} = \sqrt{60+225-2\cdot 15\cdot 2\sqrt{15}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$

$R = \frac{KM\cdot MN\cdot KN}{4S}$

$S = \frac{1}{2} KN\cdot MN\cdot \sin\angle KNM$

$\triangle AKN$ − р/б ($AK = KN$) => $\angle KAN = \angle KNA$

$\sin\angle KAN = \sqrt{1-\cos^2\angle KAN} = \sqrt{1-\frac{15}{16}} = \frac{1}{4}$

$S = \frac{1\cdot 2\sqrt{15}\cdot 11}{2\cdot 4} = \frac{11\sqrt{15}}{4}$

$R = \frac{11\cdot 4\cdot 2\sqrt{15}}{11\cdot\sqrt{15}} = 8$

Ответ: 8

2 балла

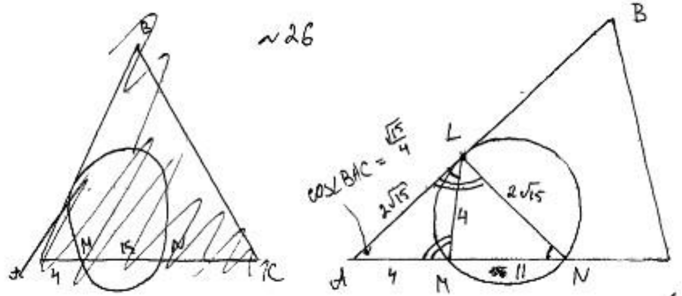
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

Задание 25. Пример 3. Работа 2

№ 25 с 2021 года

Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 4 и 15 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Ответ: 8.



L - точка касания окр-ти и AB; $\angle ANL = \angle ALN$ (вписанный угол равен углу между касательной и хордой)

$\triangle ALM \sim \triangle ALN$ (по 2 углам)

$\frac{AL}{AN} = \frac{AM}{AL} = \frac{LM}{LN} \Rightarrow AL^2 = AN \cdot AM = 4 \cdot 15 \Rightarrow AL = 2\sqrt{15}$

$\triangle ALM$ по теореме косинусов: $LM^2 = AL^2 + AM^2 - 2 \cdot AL \cdot AM \cdot \cos(\angle BAC)$

$LM^2 = 15 \cdot 4 + 16 - \underline{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{15} \cdot 4 \cdot \sqrt{15}} = 15 \cdot 4 + 16 - 4 \cdot 15 = 16$

$LM = 4$; из подобия $\Rightarrow AM \cdot LN = AL \cdot LM \Rightarrow LN = \frac{AL \cdot LM}{AM}$;

$LN = \frac{2\sqrt{15} \cdot 4}{4} = 2\sqrt{15}$; из основного тригонометрического тождества:

$\sin^2 BAC + \cos^2 BAC = 1 \Rightarrow \sin BAC = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16} \Rightarrow \sin BAC = \frac{1}{4}$

~~по теореме синусов для $\triangle ALN$~~: $\cancel{\frac{2\sqrt{15}}{\sin ANL} = \frac{2\sqrt{15}}{\sin\angle NA}} =$

$\cancel{\frac{2\sqrt{15}}{\sin ANL} = \frac{2\sqrt{15}}{\sin LAN}}$

$AL = LN \Rightarrow \triangle ALN$ р/б (основание AN)

$\Downarrow$

По теореме синусов для $\triangle LMN$: ($\triangle LMN$ - вписан в окружность) $\angle LAN = \angle LNA$

$\Downarrow$

$\frac{LM}{\sin(\angle LNA)} = 2R \Rightarrow \frac{4}{\frac{1}{4}} = 2R$; $4 : \frac{1}{4} = 2R$

$16 = 2R \Rightarrow \boxed{R = 8}$

$\sin(\angle LAN) = \sin(\angle LNA) = \frac{1}{4}$

Ответ: 8

? баллов

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

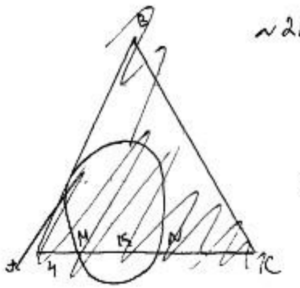
Задание 25. Пример 3. Работа 2

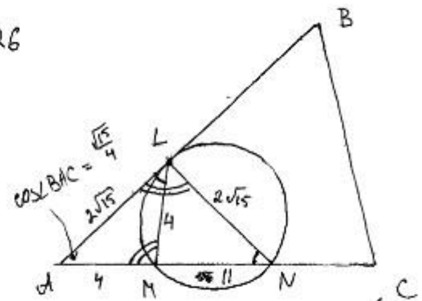
№ 25 с 2021 года

Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 4 и 15 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Ответ: 8.

№26





L - точка касания окр-ти и AB; $\angle ANL = \angle ALN$ (вписанный угол равен углу между касательной и хордой)

$\triangle ALM \sim \triangle ALN$ (по 2 углам)

$\frac{AL}{AN} = \frac{AM}{AL} = \frac{LM}{LN} \Rightarrow AL^2 = AN \cdot AM = 4 \cdot 15 \Rightarrow AL = 2\sqrt{15}$

$\triangle ALM$ по теореме косинусов: $LM^2 = AL^2 + AM^2 - 2 \cdot AL \cdot AM \cdot \cos(\angle BAC)$

$LM^2 = 15 \cdot 4 + 16 - \frac{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{15} \cdot 4 \cdot \sqrt{15}}{4} = 15 \cdot 4 + 16 - 4 \cdot 15 = 16$

$LM = 4$; из подобия $\Rightarrow AM \cdot LN = AL \cdot LM \Rightarrow LN = \frac{AL \cdot LM}{AM}$;

$LN = \frac{2\sqrt{15} \cdot 4}{4} = 2\sqrt{15}$; из основного тригонометрического тождества:

$\sin^2 BAC + \cos^2 BAC = 1 \Rightarrow \sin BAC = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16} \Rightarrow \sin BAC = \frac{1}{4}$

~~по теореме синусов для $\triangle ALN$~~: $\cancel{\frac{2\sqrt{15}}{\sin ANL}} = \cancel{\frac{2\sqrt{15}}{\sin\angle NA}} =$

$\cancel{\frac{2\sqrt{15}}{\sin ANL} = \frac{2\sqrt{15}}{\sin LAN}}$ $AL = LN \Rightarrow \triangle ALN$ р/б (основание AN)

$\Downarrow$

По теореме синусов для $\triangle LMN$: ($\triangle LMN$ - вписан в окружность) $\angle LAN = \angle LNA$

$\Downarrow$

$\frac{LM}{\sin(\angle LNA)} = 2R \Rightarrow \frac{4}{\frac{1}{4}} = 2R$; $4 : \frac{1}{4} = 2R$ $\sin(\angle LAN) = \sin(\angle LNA) = \frac{1}{4}$

$16 = 2R \Rightarrow \boxed{R = 8}$

Ответ: 8

2 балла

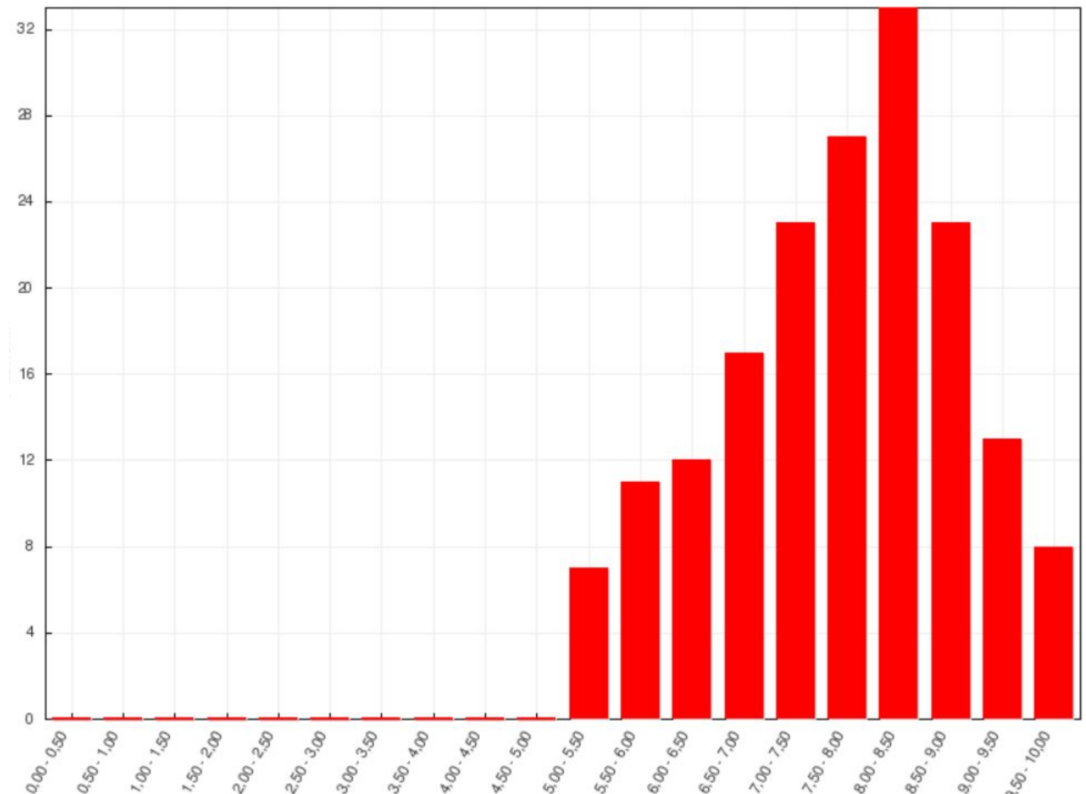
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

Итоги тренинга 1 (задания 20 и 21)

ФИПИ

Согласование подходов к проверке заданий с развернутым ответом

Тренинг 1 (задания 20 и 21)



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0,37	0,41	0,43	0,42	0,35	0,40	0,45	0,46	0,36	0,37	0,30	0,35	0,44	0,28	0,35	0,40	0,38	0,37	0,34	0,36

Согласование подходов к проверке заданий с развернутым ответом

Тренинг 1 (задания 20 и 21)

Работа 11

№ 20 с 2021 года

Пример 11

Задание № 21.

$x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0.$

$(x^3 + 4x^2) - (4x - 16) = 0$

$x^2(x+4) - 4(x+4) = 0.$

$(x^2 - 4) \cdot (x+4) = 0$

$x^2 - 4 = 0$ или $x + 4 = 0$

$x^2 = 4$ $\quad x_3 = -4$

$x_1 = 2$

$x_2 = -2$

Ответ: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = -4$

Решите уравнение $x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0$.

Решение.

Преобразуем уравнение: $(x+4)(x^2-4) = 0$,

откуда $x = -4$, $x = -2$ или $x = 2$.

Ответ: -4; -2; 2.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

? баллов

Тренинг 1 (задания 20 и 21)

Работа 11

№ 20 с 2021 года

Пример 11

Задание № 21.

$x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0.$

$(x^3 + 4x^2) - (4x - 16) = 0$

$x^2(x+4) - 4(x+4) = 0.$

$(x^2 - 4) \cdot (x+4) = 0$

$x^2 - 4 = 0$ или $x + 4 = 0$

$x^2 = 4$ $\quad$ $x_3 = -4$

$x_1 = 2$

$x_2 = -2$

Ответ: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = -4$

Решите уравнение $x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0$.

Решение.

Преобразуем уравнение: $(x+4)(x^2-4) = 0$,

откуда $x = -4$, $x = -2$ или $x = 2$.

Ответ: -4; -2; 2.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

0 баллов

Тренинг 1 (задания 20 и 21)

Работа 11

	s	v	t
I	560	x+10	$\frac{560}{x+10}$
II	560	x	$\frac{560}{x}$

$$\frac{560}{x} - \frac{560}{x+10} = 1 \mid x(x+10)$$

$$560(x+10) - 560x = x(x+10)$$

$$\cancel{560}x + 5600 - \cancel{560x} = x^2 + 10x$$

$$x^2 + 10x + 5600 = 0$$

$k = 5$

$$D/4 = 25 + 5600 = 5625 = 75^2$$

$x_1 = -5 + 75 = 70$ - скорость II авто.

$x_2 = -5 - 75 = -80$ - не. по условию задачи

① $70 + 10 = 80$ км/ч скорость I авто.

Ответ: 80 км/ч

№ 21 с 2021 года

Два автомобиля одновременно отправляются в 560-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 10 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Решение.

Пусть скорость первого автомобиля v км/ч, тогда скорость второго автомобиля $v-10$ км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{560}{v-10} - \frac{560}{v} = 1;\ 560v - 560v + 5600 = v^2 - 10v;\ v^2 - 10v - 5600 = 0,$$

откуда $v = 80$.

Ответ: 80 км/ч.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

? баллов

Тренинг 1 (задания 20 и 21)

Работа 11

№ 21 с 2021 года

	s	v	t
I	560	x+10	$\frac{560}{x+10}$
II	560	x	$\frac{560}{x}$

$$\frac{560}{x} - \frac{560}{x+10} = 1 \quad | \cdot x(x+10)$$

$$560(x+10) - 560x = x(x+10)$$

$$\cancel{560x} + 5600 - \cancel{560x} = x^2 + 10x$$

$$x^2 + 10x + 5600 = 0$$

$$k = 5$$

$$D/4 = 25 + 5600 = 5625 = 75^2$$

$x_1 = -5 + 75 = 70$ - скорость II авто.

$x_2 = -5 - 75 = -80$ - не по условию задачи

① $70 + 10 = 80$ км/ч скорость I авто.

Ответ: 80 км/ч

Два автомобиля одновременно отправляются в 560-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 10 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Решение.

Пусть скорость первого автомобиля v км/ч, тогда скорость второго автомобиля $v-10$ км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{560}{v-10} - \frac{560}{v} = 1;\ 560v - 560v + 5600 = v^2 - 10v;\ v^2 - 10v - 5600 = 0,$$

откуда $v = 80$.

Ответ: 80 км/ч.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

0 баллов

Тренинг 1 (задания 20 и 21)

№ 20 с 2021 года

Работа 14

Пример 14

V & 1

$x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0 \quad ; x \neq 0$

$x^2(x+4) - x - 4 = 0$

$x^2 - 1(x+4) + (x+4) = 0$

$(x^2 - 1)(x+4) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x+4=0 \\ x^2-1=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x^2=1 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=-4 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right. \end{array}\right.$

Ответ: $x = \{-4; -1; 1\}$

Решите уравнение $x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0$.

Решение.

Преобразуем уравнение: $(x+4)(x^2-4) = 0$,

откуда $x = -4$, $x = -2$ или $x = 2$.

Ответ: -4; -2; 2.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

? баллов

Тренинг 1 (задания 20 и 21)

Работа 14

№ 20 с 2021 года

Пример 14

$\sqrt{2}$ 1

$x^3+4x^2-x-4=0$; $x\neq 0$

$x^2(x+4)-x-4=0$

$x^2-1(x+4)\cancel{x}+(x+4)=0$

$(x^2-1)(x+4)=0$

$\left[\begin{array}{l} x+4=0 \\ x^2-1=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x^2=1 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=-4 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right. \end{array}\right.$

Ответ: $x=\{-4;-1;1\}$

Решите уравнение $x^3+4x^2-4x-16=0$.

Решение.

Преобразуем уравнение: $(x+4)(x^2-4)=0$,

откуда $x=-4$, $x=-2$ или $x=2$.

Ответ: -4; -2; 2.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

0 баллов

Тренинг 1 (задания 20 и 21)

Работа 14

22.

x км/ч – скорость второго автомобиля,

$x+10$ км/ч – скорость первого автомобиля

1 ч – разница во времени

560 км – расстояние ; $x>0$

$\frac{560}{x} - \frac{560}{x+10} = 1 \mid \cdot x \cdot (x+10)$

$x \neq 0; -10$

$560 \cdot (x+10) - 560x = x \cdot (x+10)$

$560x + 5600 - 560x = x^2 + 10x$

$-x^2 - 10x + 5600 = 0$

$a = -1; b = -10; c = 5600$

$D = b^2 - 4ac$

$D = (-10)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 5600 = 100 + 22400 = 22500$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$x_{1,2} = \frac{10 \pm 150}{-2}$

$x_1 = \frac{10+150}{-2} = \frac{160}{-2} = -80$ – не удов. условию $x>0$

$x_2 = \frac{10-150}{-2} = \frac{-140}{-2} = 70$ км/ч – скорость второго

$70 + 10 = 80$ км/ч – скорость первого

Ответ: 80 км/ч

№ 21 с 2021 года

Два автомобиля одновременно отправляются в 560-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 10 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Решение.

Пусть скорость первого автомобиля v км/ч, тогда скорость второго автомобиля $v-10$ км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{560}{v-10} - \frac{560}{v} = 1;\ 560v - 560v + 5600 = v^2 - 10v;\ v^2 - 10v - 5600 = 0,$$

откуда $v = 80$.

Ответ: 80 км/ч.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

? баллов

Тренинг 1 (задания 20 и 21)

Работа 14

2 2.

x км/ч – скорость второго автомобилиста,

$x+10$ км/ч – скорость первого автомобилиста

1 ч – разница во времени

560 км – расстояние ; $x > 0$

$\frac{560}{x} - \frac{560}{x+10} = 1 \mid \cdot x \cdot (x+10)$

$x \neq 0; -10$

$560 \cdot (x+10) - 560x = x \cdot (x+10)$

$560x + 5600 - 560x = x^2 + 10x$

$-x^2 - 10x + 5600 = 0$

$a = -1; b = -10; c = 5600$

$D = b^2 - 4ac$

$D = (-10)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 5600 = 100 + 22400 = 22500$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$x_{1,2} = \frac{10 \pm 150}{-2}$

$x_1 = \frac{10+150}{-2} = \frac{160}{-2} = -80$ – не удов. условию $x > 0$

$x_2 = \frac{10-150}{-2} = \frac{-140}{-2} = 70$ км/ч – скорость второго

$70 + 10 = 80$ км/ч – скорость первого

Ответ: 80 км/ч

№ 21 с 2021 года

Два автомобиля одновременно отправляются в 560-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 10 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Решение.

Пусть скорость первого автомобиля v км/ч, тогда скорость второго автомобиля $v-10$ км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{560}{v-10} - \frac{560}{v} = 1;\ 560v - 560v + 5600 = v^2 - 10v;\ v^2 - 10v - 5600 = 0,$$

откуда $v = 80$.

Ответ: 80 км/ч.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

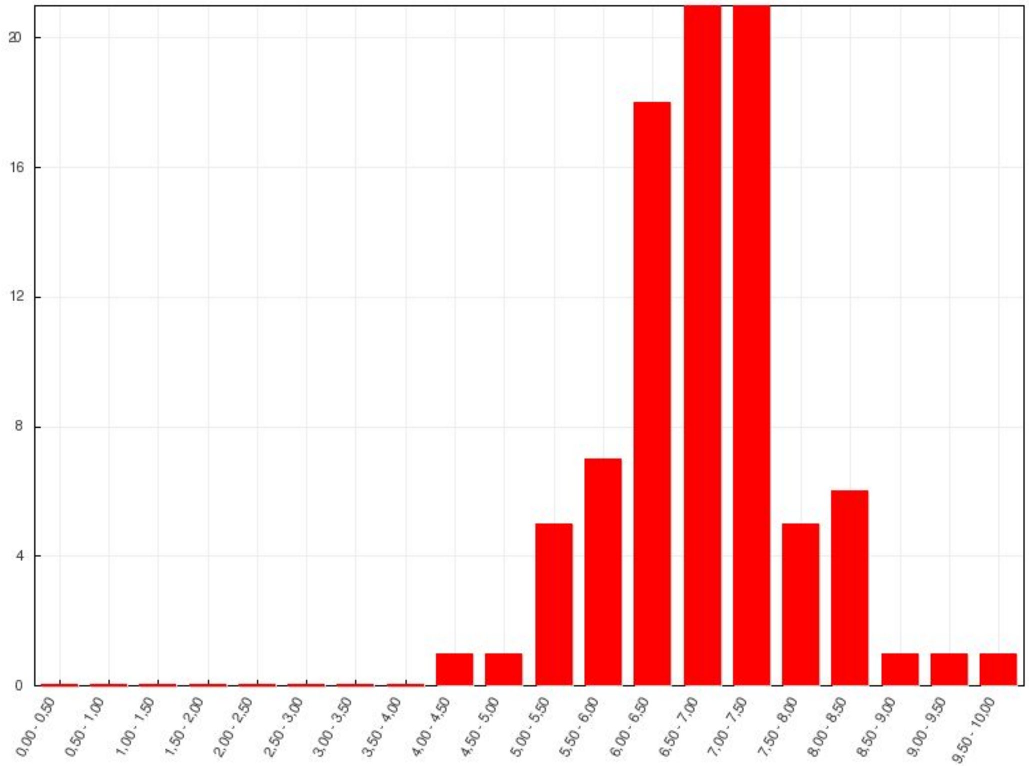
0 баллов

Итоги тренинга 2 (задания 23 и 24)

ФИПИ

Согласование подходов к проверке заданий с развернутым ответом

Тренинг 2 (задания 23 и 24)



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0,18	0,20	0,30	0,44	0,29	0,40	0,28	0,48	0,40	0,35	0,45	0,39	0,39	0,26	0,37	0,14	0,47	0,32	0,31	0,40

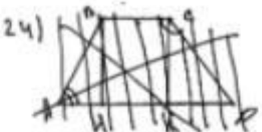
Согласование подходов к проверке заданий с развернутым ответом

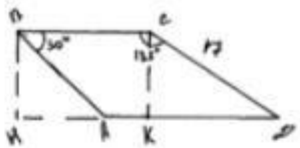
Тренинг 2 (задания 23 и 24)

№ 23 с 2021 года

Работа 1

24)





Дано: $CD = 17$

$\angle ABC = 30°$; $BCD = 135°$.

$ABCD$ – трапеция.

Найти AB – ?

Решение: CK – высота $\Rightarrow \angle AKC$; $\angle DKC$; $\angle BCK = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KCD = \cancel{135} \angle BCD - \angle BCK = 135 - 90 = 45°$; $\angle CKD = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KDC = 180 - \angle CKD - \angle KCD = 180 - 90 - 45° = 45° \Rightarrow \triangle KCD$ - равнобедренный, прямоугольный ~~[illegible]~~

24) ~~[illegible]~~ $\Rightarrow \dfrac{CK}{CD} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos \angle KCD = \cos \angle 45°$

$\dfrac{CK}{17} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad 2CK = 17\sqrt{2}$ $\quad CK = 8{,}5\sqrt{2}$; $CK = BK$ (как высоты

трапеции). $BC \parallel AD$ (как основания трапеции) $\Rightarrow \angle ABC = \angle BAH$

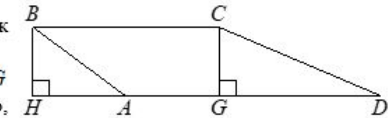
$\angle BAH = 30° \Rightarrow \frac{1}{2} AB = BH$ $\quad \frac{1}{2} AB = 8{,}5\sqrt{2} \Rightarrow AB = 17\sqrt{2}$

($\angle ABC = \angle BAH$ (как накрест лежащие))

Ответ: $AB = 17\sqrt{2}$

Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно $30°$ и $135°$, а $CD = 17$.

Решение.



Проведём перпендикуляры $BH = CG$ к прямой AD.

В прямоугольном треугольнике CDG угол GCD равен $45°$, следовательно, $CG = CD \cdot \cos 45° = \frac{17\sqrt{2}}{2}$.

В прямоугольном треугольнике ABH катет $BH = CG = \frac{17\sqrt{2}}{2}$, а угол ABH равен $60°$. Значит, $AB = \frac{BH}{\cos 60°} = \frac{17\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 17\sqrt{2}$.

Ответ: $17\sqrt{2}$.

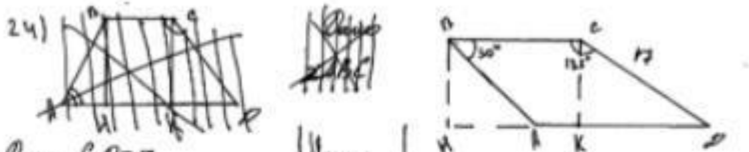
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

? баллов

Тренинг 2 (задания 23 и 24)

Работа 1

24)



Дано: $CD = 17$

$\angle ABC = 30°$; $BCD = 135°$.

ABCD – трапеция.

Найти: АВ – ?

Решение: CK – высота $\Rightarrow \angle AKC$; $\angle DKC$; $\angle BCK = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KCD = \angle BCD - \angle BCK = 135 - 90 = 45°$; $\angle CKD = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KDC = 180 - \angle CKD - \angle KCD = 180 - 90 - 45° = 45° \Rightarrow \triangle KCD$ – равнобедренный, прямоугольный

24) $\cos \angle KCD = \cos \angle 45° \Rightarrow \frac{CK}{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{CK}{17} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad 2CK = 17\sqrt{2}$ $\quad CK = 8{,}5\sqrt{2}$; $CK = BK$ (как высоты трапеции). $BC \parallel AD$ (как основания трапеции) $\Rightarrow \angle ABC = \angle BAH$

$\angle BAH = 30° \Rightarrow \frac{1}{2} AB = BH$ $\quad \frac{1}{2} AB = 8{,}5\sqrt{2} \Rightarrow AB = 17\sqrt{2}$

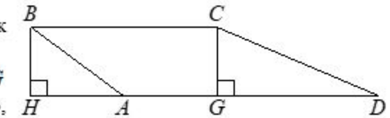
($\angle ABC = \angle BAH$ (как накрест лежащие))

Ответ: $AB = 17\sqrt{2}$

№ 23 с 2021 года

Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно $30°$ и $135°$, а $CD = 17$.

Решение.



Проведём перпендикуляры $BH = CG$ к прямой AD.

В прямоугольном треугольнике CDG угол GCD равен $45°$, следовательно, $CG = CD \cdot \cos 45° = \frac{17\sqrt{2}}{2}$.

В прямоугольном треугольнике ABH катет $BH = CG = \frac{17\sqrt{2}}{2}$, а угол ABH равен $60°$. Значит, $AB = \frac{BH}{\cos 60°} = \frac{17\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 17\sqrt{2}$.

Ответ: $17\sqrt{2}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

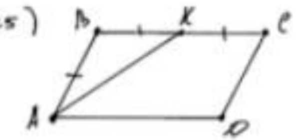
0 баллов

Тренинг 2 (задания 23 и 24)

№ 24 с 2021 года

Работа 1

25)



Дано

ABCD – параллелограм.

$BC = \frac{2}{1} AB$

$BK = KC = AB$.

Д-ать, что AK – бис.

Доказательство

△ABC – ~~равносторонний~~ равнобедренный (т.к. AB = BK (по условию)) (BC = 2AB => BK = KC = AB)

⇓

∠BAK = ∠BKA (как углы при основании Равностороннего треугольника).

BC // AD (как стороны параллелограма) (Противолежащие стороны)

⇓

∠BKA = ∠KAD (как накрест-лежащие углы)

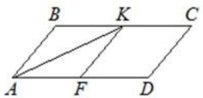
⇓

∠BAK = ∠KAD => AK – биссектриса.

25 Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB. Точка K — середина стороны BC. Докажите, что AK — биссектриса угла BAD.

Доказательство.

Проведём прямую KF параллельно стороне AB (см. рисунок). Поскольку $BK = KC = AB$, параллелограмм $ABKF$ является ромбом, поэтому диагональ AK ромба $ABKF$ делит угол BAF пополам. Значит, AK — биссектриса угла BAD.



Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

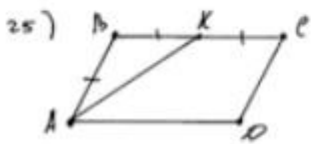
? баллов

Тренинг 2 (задания 23 и 24)

№ 24 с 2021 года

Работа 1

25)

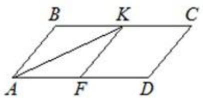


Дано
ABCD – параллелограм.
BC = 2/1 AB
BK = KC = AB.
Д-ать, что AK – бис.

Доказательство
△ABC – ~~равносторонний~~ равнобедренный (т.к AB = BK (по условию)) (BC = 2AB => BK = KC = AB)
⇓
∠BAK = ∠BKA (как углы при основании равностороннего треугольника).
BC ∥ AD (как стороны параллелограмма)(противолежащие стороны)
⇓
∠BKA = ∠KAD (как накрест-лежащие углы)
⇓
∠BAK = ∠KAD => AK – биссектриса.

25 Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB. Точка K — середина стороны BC. Докажите, что AK — биссектриса угла BAD.

Доказательство.
Проведём прямую KF параллельно стороне AB (см. рисунок). Поскольку $BK = KC = AB$, параллелограмм $ABKF$ является ромбом, поэтому диагональ AK ромба $ABKF$ делит угол BAF пополам. Значит, AK — биссектриса угла BAD.



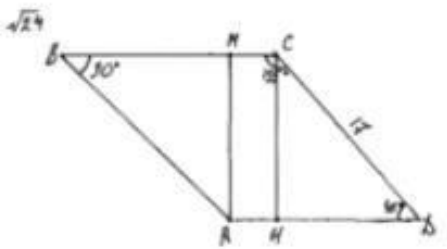
Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

0 баллов

Тренинг 2 (задания 23 и 24)

№ 23 с 2021 года

Работа 2



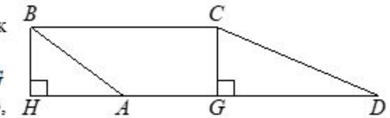
Дано: ABCD – трапеция
ABC = 30°; BCD = 135°;
CD = 17.
Найти: AB.

Решение

Сумма углов при боковых сторонах трапеции равна 180°
Тогда угол $\angle CDA = 180° - \cancel{150}^{135°} = 45°$
Опустим высоту CH из C на AD
Треугольник CHD – прямоугольный равнобедренный
$CH = CD \sin 45° = 17 \cdot (\sqrt{2}) : 2$
Возведем перпендикуляр из A к BC
Треугольник ABM – прямоугольный
$AM = CH = 17 \cdot (\sqrt{2}) : 2$
$AB = AM : \sin 30° = 17\sqrt{2}$
Ответ: $17\sqrt{2}$

Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно $30°$ и $135°$, а $CD = 17$.

Решение.



Проведём перпендикуляры $BH = CG$ к прямой AD.

В прямоугольном треугольнике CDG угол GCD равен $45°$, следовательно, $CG = CD \cdot \cos 45° = \frac{17\sqrt{2}}{2}$.

В прямоугольном треугольнике ABH катет $BH = CG = \frac{17\sqrt{2}}{2}$, а угол ABH равен $60°$. Значит, $AB = \frac{BH}{\cos 60°} = \frac{17\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 17\sqrt{2}$.

Ответ: $17\sqrt{2}$.

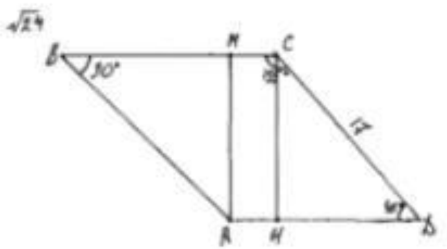
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

? баллов

Тренинг 2 (задания 23 и 24)

№ 23 с 2021 года

Работа 2



Дано: ABCD – трапеция

ABC = 30°; BCD = 135°;

CD = 17.

Найти: AB.

Решение

Сумма углов при боковых сторонах трапеции равна 180°

Тогда угол ∠CDA = 180° − ~~150~~ 135° = 45°

Опустим высоту CH из C на AD

Треугольник CHD – прямоугольный равнобедренный

CH = CD sin 45° = 17 · (√2) : 2

Возведем перпендикуляр из A к BC

Треугольник ABM – прямоугольный

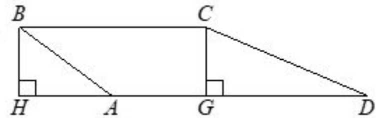
AM = CH = 17 · (√2) : 2

AB = AM : sin 30° = 17√2

Ответ: 17√2

Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно $30°$ и $135°$, а $CD = 17$.

Решение.



Проведём перпендикуляры $BH = CG$ к прямой AD.

В прямоугольном треугольнике CDG угол GCD равен $45°$, следовательно, $CG = CD \cdot \cos 45° = \frac{17\sqrt{2}}{2}$.

В прямоугольном треугольнике ABH катет $BH = CG = \frac{17\sqrt{2}}{2}$, а угол ABH равен $60°$. Значит, $AB = \frac{BH}{\cos 60°} = \frac{17\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 17\sqrt{2}$.

Ответ: $17\sqrt{2}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

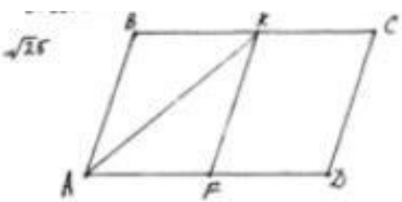
0 баллов

Согласование подходов к проверке заданий с развернутым ответом

Тренинг 2 (задания 23 и 24)

№ 24 с 2021 года

Работа 2



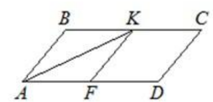
Дано: ABCD-параллелограмм
BC = 2AB ; BK = KC;
Доказать: AK - биссектриса ∠BAD

Доказательство:
Проведем отрезок KF параллельный AB
Поскольку BK = KC = AB параллелограмм ABKF явл. ромбом
Поэтому диагональ ромба ABKF делит угол BAF пополам
Значит AK является биссектрисой угла BAD

Ч.Т.Д.

25 Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB. Точка K — середина стороны BC. Докажите, что AK — биссектриса угла BAD.

Доказательство.
Проведём прямую KF параллельно стороне AB (см. рисунок). Поскольку $BK = KC = AB$, параллелограмм $ABKF$ является ромбом, поэтому диагональ AK ромба $ABKF$ делит угол BAF пополам. Значит, AK — биссектриса угла BAD.



Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

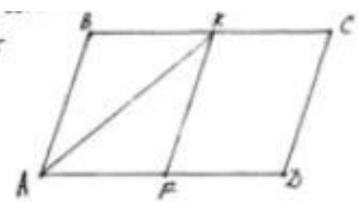
? баллов

Согласование подходов к проверке заданий с развернутым ответом

Тренинг 2 (задания 23 и 24)

№ 24 с 2021 года

Работа 2



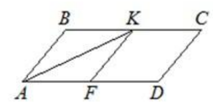
Дано: ABCD-параллелограмм
BC = 2AB ; BK = KC;
Доказать: AK - биссектриса ∠BAD

Доказательство:
Проведем отрезок KF параллельный AB
Поскольку BK = KC = AB параллелограмм ABKF явл. ромбом
Поэтому диагональ ромба ABKF делит угол BAF пополам
Значит AK является биссектрисой угла BAD

Ч.Т.Д.

25 Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB. Точка K — середина стороны BC. Докажите, что AK — биссектриса угла BAD.

Доказательство.
Проведём прямую KF параллельно стороне AB (см. рисунок). Поскольку $BK = KC = AB$, параллелограмм $ABKF$ является ромбом, поэтому диагональ AK ромба $ABKF$ делит угол BAF пополам. Значит, AK — биссектриса угла BAD.



Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

0 баллов

Тренинг 2 (задания 23 и 24)

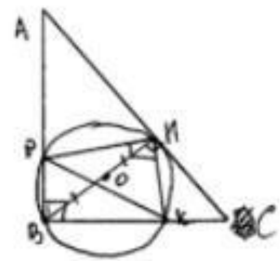
№ 23 с 2021 года

Работа 16

S24

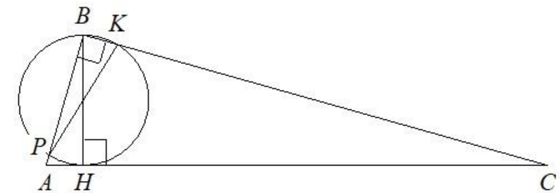
Дано
△ABC
BH - высота, диаметр
$\angle B=90^\circ$
Окружность (O, r) ∩ AB, BC =
= P, K
BH = 13
PK - ?

Решение
Дополнительное построение: PH и KH
Так как BPHK - вписанный четырёхугольник и вокруг него можно описать окружность, то $\angle PBK + \angle PHK = 180$
$\Rightarrow \angle PHK = 180 - 90^\circ = 90^\circ$
Так как $\angle BPH$ опирается на диаметр, $\angle BPH = 90^\circ$
$\Rightarrow$ PHKB - прямоугольник $\Rightarrow PK = BH = 13$
Ответ: 13



24 Точка H является основанием высоты BH, проведённой из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите PK, если $BH = 13$.

Решение.



Угол PBK опирается на дугу PK и равен 90°, а значит, PK — диаметр, откуда получаем, что $BH = PK = 13$.

Ответ: 13.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

? баллов

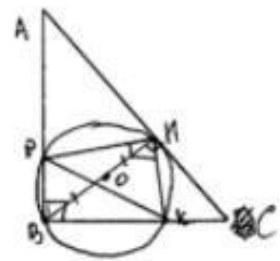
Тренинг 2 (задания 23 и 24)

№ 23 с 2021 года

Работа 16

S24

Дано	Решение
$\triangle ABC$	Дополнительное построение: PH и KH
BH - высота, диаметр	Так как ~~...~~ $BPHK$ - вписанный четырёхугольник и около него можно описать окружность
$\angle B = 90^\circ$	то $\angle PBK + \angle PHK = 180$
Окружность $(O, r) \cap AB, BC = P, K$	$\Rightarrow \angle PHK = 180 - 90^\circ = 90^\circ$
$BH = 13$	
PK - ?	



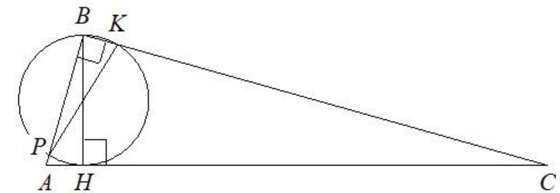
Так как $\angle BPH$ опирается на диаметр, $\angle BPH = 90^\circ$

$\Rightarrow PHKB$ - прямоугольник $\Rightarrow PK = BH = 13$

Ответ: 13

24 Точка H является основанием высоты BH, проведённой из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите PK, если $BH = 13$.

Решение.



Угол PBK опирается на дугу PK и равен 90°, а значит, PK — диаметр, откуда получаем, что $BH = PK = 13$.

Ответ: 13.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

0 баллов

Тренинг 2 (задания 23 и 24)

Работа 16

№25

Дано:
ABCD-трапеция
BC, AD-основания
BC = 3
AD = 12
BD = 6

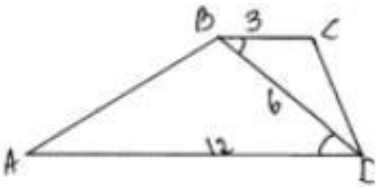
Доказать:
$\triangle CBD \sim \triangle BDA$

Решение:

$\frac{BD}{BC} = \frac{6}{3} = 2$

$\frac{AD}{BD} = \frac{12}{6} = 2$ ~~…~~ $2 = 2 \Rightarrow$

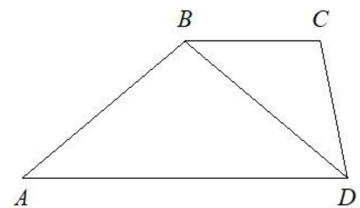
$\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{BD}$, $\angle CBD = \angle ADB$ (накрестлежащие углы при $BC \parallel AD$) $\Rightarrow \triangle CBD \sim \triangle BDA$ (по двум сходственным сторонам и углу между ними)



№ 24 с 2021 года

25 Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 3 и 12, $BD = 6$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

Доказательство.



В треугольниках ADB и DBC углы ADB и DBC равны как накрест лежащие, кроме того, $\frac{AD}{DB} = \frac{DB}{BC} = 2$. Поэтому треугольники CBD и BDA подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

? баллов

Тренинг 2 (задания 23 и 24)

Работа 16

№ 24 с 2021 года

№25

Дано:
ABCD-трапеция
BC, AD-основания
BC=3
AD=12
BD=6

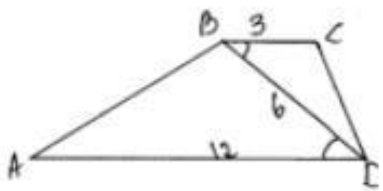
Доказать:
$\triangle CBD \sim \triangle BDA$

Решение:

$\frac{BD}{BC}=\frac{6}{3}=2$

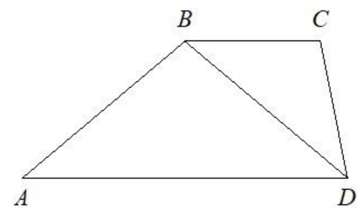
$\frac{AD}{BD}=\frac{12}{6}=2$ ~~...~~ $2=2 \Rightarrow$

$\frac{BD}{BC}=\frac{AD}{BD}$, $\angle CBD=\angle ADB$ (накрестлежащие углы при $BC \parallel AD$) $\Rightarrow \triangle CBD \sim \triangle BDA$ (по двум сходственным сторонам и углу между ними)



25 Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 3 и 12, $BD=6$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

Доказательство.



В треугольниках ADB и DBC углы ADB и DBC равны как накрест лежащие, кроме того, $\frac{AD}{DB}=\frac{DB}{BC}=2$. Поэтому треугольники CBD и BDA подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

1 балл

Указания к зачету.

Вы оцениваете математическую корректность решения математической задачи выпускника 9 класса в соответствии с критериями оценивания заданий с развернутым ответом

Успехов!