Ряды

Лекция 2: Знакочередующиеся и знакопеременные ряды

- Ряды Лейбница
- Абсолютная и условная сходимость рядов
- Признаки сходимости Абеля и Дирихле

1.3. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Знакочередующийся ряд — это ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots (-1)^{n+1} u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n, \qquad (1.18)$$

где $u_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Теорема Лейбница (признак Лейбница)

Знакочередующийся ряд сходится, если:

1) последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает:

$$u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots; \qquad (1.19)$$

2) общий член ряда стремится к нулю, то есть

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \qquad (1.20)$$

Доказательство

Рассмотрим сумму $n = 2m$ первых членов ряда (1.18):

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Из (1.19) следует, что выражение в каждой скобке положительно, значит S_{2m} — положительна ($S_{2m} > 0$) и возрастает с увеличением m.

Запишем эту же сумму по-другому:

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

В силу (1.19) каждая из скобок положительна, поэтому в результате вычитания этих скобок из u_1 мы получим число, меньшее чем u_1, то есть

$$S_{2m} < u_1$$

Таким образом, S_{2m} при увеличении m возрастает и ограничена сверху, следовательно, S_{2m} имеет предел

$$\lim_{n\to\infty} S_{2m} = S, \quad 0 < S < u_1.$$

Мы доказали, что последовательность «четных» частичных сумм имеет предел S.

Докажем теперь, что «нечетные» частичные суммы также стремятся к пределу S.

Рассмотрим сумму $n = 2m + 1$ первых членов ряда (1.18):

$$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}.$$

Так как по условию

$$\lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0,$$

то

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} = S.$$

Итак, последовательность «нечетных» частичных сумм имеет предел S.

Таким образом, ряд (1.18) сходится.

Замечания

1. Теорема Лейбница справедлива, если неравенства (1.19) выполняются, начиная с некоторого номера N.

2. Теорема Лейбница геометрически иллюстрируется следующим образом. Будем на числовой прямой откладывать частичные суммы:

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 - u_2 = S_1 - u_2, \;\; S_3 = S_2 + u_3, \;\; S_4 = S_3 - u_4, \;\; S_5 = S_4 + u_5, \ldots.$$

Точки, соответствующие частичным суммам, будут приближаться к некоторой точке S, которая изображает сумму ряда.

3. Оценка ошибки.

Заменим S частичной суммой S_n. Оценим ошибку, которую мы допускаем при данной замене.

Отброшенный ряд (остаток) представляет собой знакочередующийся ряд

$$(-1)^{n+1}(u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots),$$

сумма которого по абсолютной величине меньше первого члена этого ряда (то есть меньше u_{n+1}).

Значит, ошибка, совершаемая при замене S на S_n, не превосходит по абсолютной величине первого из отброшенных членов.

Пример. Проверить, что знакочередующийся ряд сходится и вычислить его сумму с точностью до 0,01:

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{4^4}+\ldots(-1)^{n+1}\frac{1}{4^n}+\ldots$$

Решение

Проверим условия (1.19) и (1.20):

1) $u_n > u_{n+1}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4^n}=0.$

Так как оба условия выполняются, то ряд сходится.

Четвертый член ряда будет первым, меньшим 0,01:

$$a_4=\frac{1}{256}\approx 0{,}003<0{,}01.$$

Поэтому, для выполнения заданной точности достаточно взять первых три слагаемых:

$$S=\frac{1}{4}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}\approx 0{,}203\approx 0{,}20.$$

1.4. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость

Ряд называется ***знакопеременным***, если среди его членов имеются как положительные так и отрицательные члены.

Знакочередующиеся ряды являются частным случаем знакопеременных рядов.

Теорема (достаточный признак сходимости знакопеременного ряда).

Пусть дан знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n. \tag{1.21}$$

Если сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots, \tag{1.22}$$

составленный из абсолютных величин данного ряда, то сходится и сам знакопеременный ряд.

Доказательство

Пусть S_n и G_n — суммы первых n членов ряда (1.21) и (1.22); S_n' — сумма всех положительных членов ряда (1.21); S_n'' — сумма абсолютных величин всех отрицательных первых n членов ряда (1.21).

Тогда

$$S_n = S_n' - S_n'' \qquad G_n = S_n' + S_n''.$$

По условию G_n имеет предел G.

S_n', S_n'' — положительные возрастающие величины, меньшие G, следовательно, они имеют пределы S', S''.

Из соотношения $S_n = S_n' - S_n''$ следует, что S_n имеет предел и он равен $S' - S''$, то есть знакопеременный ряд (1.21) сходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{\sin\alpha}{1^2}+\frac{\sin 2\alpha}{2^2}+\frac{\sin 3\alpha}{3^2}+\ldots+\frac{\sin n\alpha}{n^2}+\ldots,$$

где α — любое число.

Решение

Рассмотрим ряд

$$\left|\frac{\sin\alpha}{1^2}\right|+\left|\frac{\sin 2\alpha}{2^2}\right|+\left|\frac{\sin 3\alpha}{3^2}\right|+\ldots.$$

Так как $\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то данный по условию ряд сходится.

Данный признак является достаточным, но не необходимым.

Абсолютная и условная сходимость

Знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1.23}$$

называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов:

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{1.24}$$

Если же знакопеременный ряд (1.23) сходится, а ряд (1.24) расходится, то ряд (1.23) называется ***условно сходящимся***.

Пример. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

Решение

Данный ряд сходится по признаку Лейбница. Ряд, составленный из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

расходится (как гармоничный). Данный по условию ряд является условно сходящимся.

Пример. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n-1}}{n^n}.$$

Решение

Трудно проверить условия теоремы Лейбница. Исследуем на сходимость ряд, составленный из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n}.$$

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n n^n}{(n+1)^{n+1}2^{n-1}}=2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1}=\frac{2}{e}\cdot 0=0<1.$$

Значит ряд, составленный из абсолютных величин, сходится. Поэтому данный по условию ряд сходится, причем абсолютно.

Свойства абсолютно сходящихся рядов

1. Если ряд абсолютно сходится и имеет сумму S, то ряд, полученный из данного ряда перестановкой членов, так же сходится и имеет ту же сумму S, что и исходный ряд.

2. Абсолютно сходящиеся ряды с суммами S_1 и S_2 можно почленно складывать (вычитать). В результате получится абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна $S_1 + S_2$ $(S_1 - S_2)$.

3. Под произведением двух рядов

$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ и $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$ понимают ряд вида

$$u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + (u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1) + \ldots + (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \ldots + u_n v_1) + \ldots$$

Произведение двух абсолютно сходящихся рядов с суммами S_1 и S_2 есть абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна $S_1 S_2$.

Замечание

В случае условно сходящихся рядов соответствующие свойства не имеют места.

Задачи для самостоятельного решения

1. Исследовать на сходимость и установить сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots .$$

Ответ. Ряд сходится, $S_n=\frac{1}{2}$.

2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$.

Ответ. Ряд расходится.

3. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{5n^5-1}$.

Ответ. Ряд сходится.

4. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{2n+1}\right)^{n}$.

Ответ. Ряд расходится.

5. Исследовать числовой ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n!}$.

Ответ. Ряд сходится.

6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n}{4n-1}$.

Ответ. Ряд расходится.

7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+1}{n^2+2}\right)^2$.

Ответ. Ряд сходится абсолютно.

8. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$.

Ответ. Ряд сходится условно.

Признаки Даламбера и Коши для знакопеременных рядов.

Пусть $\sum u_n$ - знакопеременный ряд.

Признак Даламбера. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho$, то при $\rho<1$ ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при $\rho>1$ ряд будет расходящимся. При $\rho=1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Признак Коши. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \rho$, то при $\rho<1$ ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при $\rho>1$ ряд будет расходящимся. При $\rho=1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Часто ряд представляет собой сумму парных произведений $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. В этом случае, имеют место два достаточных признака.

Признак Абеля

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, а последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Признак Дирихле

Пусть частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничены в совокупности (то есть $|B_n| \le C, \cdot n = 1, 2, 3, \cdots$, где $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$), а последовательность $\{a_n\}$ монотонна и стремится к нулю, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Для обоих признаков сходимости гарантируется только условная.Доказательство этих признаков основывается на преобразовании Абеля: $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k-1} - a_k) B_k$.

У признака Абеля более жесткое условие налагается на ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, зато для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - условие более мягкое, чем в признаке Дирихле.Отметим, что признак Лейбница сходимости знакопеременных рядов, получается из признака Дирихле: в ряде $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ ограничены в совокупности, а последовательность $\{a_n\}$ монотонна и стремится к нулю. Приведем примеры.

Пример 1. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(n\pi/12)}{\ln n}$ на сходимость.

Применим признак Дирихле. Последовательность $\left\{\frac{1}{\ln n}\right\}$ монотонно стремится к нулю. Остается показать, что частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin(n\pi/12)$ ограничены. Легко заметить, что точки $\varphi=\frac{n\pi}{12}$, расположены на единичной окружности центрально симметрично, и для любой точки $\varphi_n=\frac{n\pi}{12}$, имеется точка $\varphi_{n+12}=\frac{(n+12)\pi}{12}=\frac{n\pi}{12}+\pi$, так что по формулам приведения $\sin\frac{n\pi}{12}=-\sin\left(\frac{n\pi}{12}+\pi\right)$. Отсюда следует, что $B_k=B_{k+24}$, то есть частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin(n\pi/12)$ могут принимать лишь конечное число значений, а значит, они ограничены в совокупности. Следовательно, оба условия признака Лейбница выполнены и ряд сходится.

Пример 2. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$ на сходимость.

Рассмотрим последовательность $B_n = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos n\alpha$. Умножим это равенство на $\sin\frac{\alpha}{2}$ и преобразуем: $\sin\frac{\alpha}{2} B_n = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{3\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{5\alpha}{2} - \sin\frac{3\alpha}{2}\right) + \cdots +$

$$+\frac{1}{2}\left(\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2} - \sin\frac{(2n-1)\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right) = \cos(n+1)\alpha \cdot \sin n\alpha$$

Таким образом, $|B_n| = \left|\frac{\cos(n+1)\alpha \cdot \sin n\alpha}{\sin(\alpha/2)}\right| \le \frac{1}{|\sin(\alpha/2)|}$. Для нашего примера

$|B_n| = |\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos n\alpha| \le \frac{1}{|\sin(1/2)|}$.

Таким образом, частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\cos n$ ограничены, а последовательность $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ монотонно стремится к нулю. По признаку Дирихле исходный ряд сходится.

Пример 3. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\cdot\arccos(1/n)}{\sqrt{n}}$ на сходимость.

В предыдущем примере мы установили сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{\sqrt{n}}$. Осталось заметить, что последовательность $\{\arccos(1/n)\}$ монотонная и ограниченная (эта последовательность, монотонно возрастая, стремится к $\pi/2$). Следовательно, по признаку Абеля ряд сходится.Отметим, что для полного исследования нужно бы еще исследовать ряды на абсолютную сходимость. Для всех трех примеров мы этого делать не будем, хотя отметим, что ни один из трех рядов не сходится абсолютно. Покажем отсутствие абсолютной сходимости для второго примера. Для этого проведем следующие выкладки:

$$\left|\frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right|\geq\frac{\cos^2 n}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2\sqrt{n}}+\frac{\cos 2n}{2\sqrt{n}}$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{2\sqrt{n}}$ сходится, то их сумма $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}+\frac{\cos 2n}{2\sqrt{n}}\right)$ расходится, следовательно, расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{\sqrt{n}}$. Таким образом, по признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{2\sqrt{n}}$ не сходится абсолютно, то есть сходится условно.