

Тригонометрические уравнения

практикум

ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$tg \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$1 + ctg^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$ctg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$1 + tg^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$tg \alpha \cdot ctg \alpha = 1$$

$$tg \alpha = \frac{1}{ctg \alpha}$$

$$ctg \alpha = \frac{1}{tg \alpha}$$

α	$0^\circ (0 \text{ рад})$	$30^\circ (\pi/6)$	$45^\circ (\pi/4)$	$60^\circ (\pi/3)$	$90^\circ (\pi/2)$	$180^\circ (\pi)$	$270^\circ (3\pi/2)$	$360^\circ (2\pi)$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	\emptyset	0	\emptyset	0
$ctg \alpha$	\emptyset	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	\emptyset	0	\emptyset

Формулы корней простых тригонометрических уравнений

cost = a, где $|a| \leq 1$

$$\begin{cases} t = \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ t = -\arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

или

$$t = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи

$$\begin{aligned} \text{cost} &= 0 \\ t &= \pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cost} &= 1 \\ t &= 0 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cost} &= -1 \\ t &= \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

sint = a, где $|a| \leq 1$

$$\begin{cases} t = \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ t = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

или

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи

$$\begin{aligned} \text{sint} &= 0 \\ t &= 0 + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sint} &= 1 \\ t &= \pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sint} &= -1 \\ t &= -\pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Итак, формулы для решения простейших тригонометрических уравнений:

Уравнение	Решения
$\sin x = a, a \leq 1$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a, a \leq 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Значения $\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{ctg}$ острых углов от 0° до 90° ,
которые необходимо помнить:

Аргумент	Функция			
	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$0^\circ (0)$	0	1	0	не определен
$30^\circ \left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$45^\circ \left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60^\circ \left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$90^\circ \left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	не определен	0

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

Пример. Решить уравнение

Решение. $x = (-1)^k \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

Пример. Решить уравнение

Решение. $x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ

Ⓐ а) $\sin x = -\frac{1}{2}$

Ⓐ б) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ⓐ в) $\sin x = -3$

Ⓐ а) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ⓐ б) $\cos x = -\frac{1}{2}$

Ⓐ в) $\cos x = 2$