

Тригонометрические уравнения

практикум

ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

α	0° (0 рад)	30° ($\pi/6$)	45° ($\pi/4$)	60° ($\pi/3$)	90° ($\pi/2$)	180° (π)	270° ($3\pi/2$)	360° (2π)
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	\emptyset	0	\emptyset	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	\emptyset	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	\emptyset	0	\emptyset

Формулы корней простых тригонометрических уравнений

$$\cos t = a, \text{ где } |a| \leq 1$$

$$\begin{cases} t = \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ t = -\arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ИЛИ

$$t = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи

$$\begin{aligned} \cos t &= 0 \\ t &= \pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos t &= 1 \\ t &= 0 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos t &= -1 \\ t &= \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\sin t = a, \text{ где } |a| \leq 1$$

$$\begin{cases} t = \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ t = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ИЛИ

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи

$$\begin{aligned} \sin t &= 0 \\ t &= 0 + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin t &= 1 \\ t &= \pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin t &= -1 \\ t &= -\pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Итак, формулы для решения простейших тригонометрических уравнений:

Уравнение	Решения
$\sin x = a, a \leq 1$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a, a \leq 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Значения $\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{ctg}$ острых углов от 0° до 90° ,
которые необходимо помнить:

Аргумент	Функция			
	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$0^\circ \quad (0)$	0	1	0	не определен
$30^\circ \quad \left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$45^\circ \quad \left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60^\circ \quad \left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$90^\circ \quad \left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	не определен	0

Пример. Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

Решение. $x = (-1)^k \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \pi k, k \in Z \Rightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

Пример. Решить уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$.

Решение. $x = \pm \arccos\frac{1}{2} + 2\pi k, k \in Z \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ

⊙ а) $\sin x = -\frac{1}{2}$

⊙ б) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

⊙ в) $\sin x = -3$

⊙ а) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

⊙ б) $\cos x = -\frac{1}{2}$

⊙ в) $\cos x = 2$