

**Тема 8. «Непрерывность функции в точке и на числовом промежутке.
Свойства непрерывных функций».**

1. Определение непрерывности функции в точке.
2. Определение функции непрерывной в интервале, на отрезке.
3. Точки разрыва и их классификация.
4. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Понятие непрерывности функции

определение 1.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если она определена в этой точке (т.е. существует значение функции в этой точке $f(x_0)$) и имеет конечный предел при

$$x \rightarrow x_0$$

равный значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

ПРИМЕРЫ.



Функция $y = \frac{1}{x}$

не является непрерывной в точке $x=0$, т.к. не существует значения функции в этой точке:

$$y(0) = \frac{1}{0} \quad \cancel{\exists}$$

Функция

$$y = \begin{cases} x + 1, & x \geq 0 \\ x - 1, & x < 0 \end{cases}$$

существует в точке $x=0$, т.к. $y(0)=1$

Рассмотрим пределы этой функции в точке $x=0$.

Предел слева:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} (x - 1) = -1$$

Предел справа:

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} (x + 1) = 1$$

Эти пределы неравны, следовательно общего предела не существует и функция не является непрерывной в этой точке.



Функция $y = x^2$

является непрерывной в точке $x=0$, т.к.
существует значение функции в этой точке:
 $y(0)=0$

и существует предел $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

Определение непрерывности функции может
быть записано в виде:

определение 2.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$$



Непрерывность функции в данной точке выражается непрерывностью графика при прохождении этой точки.

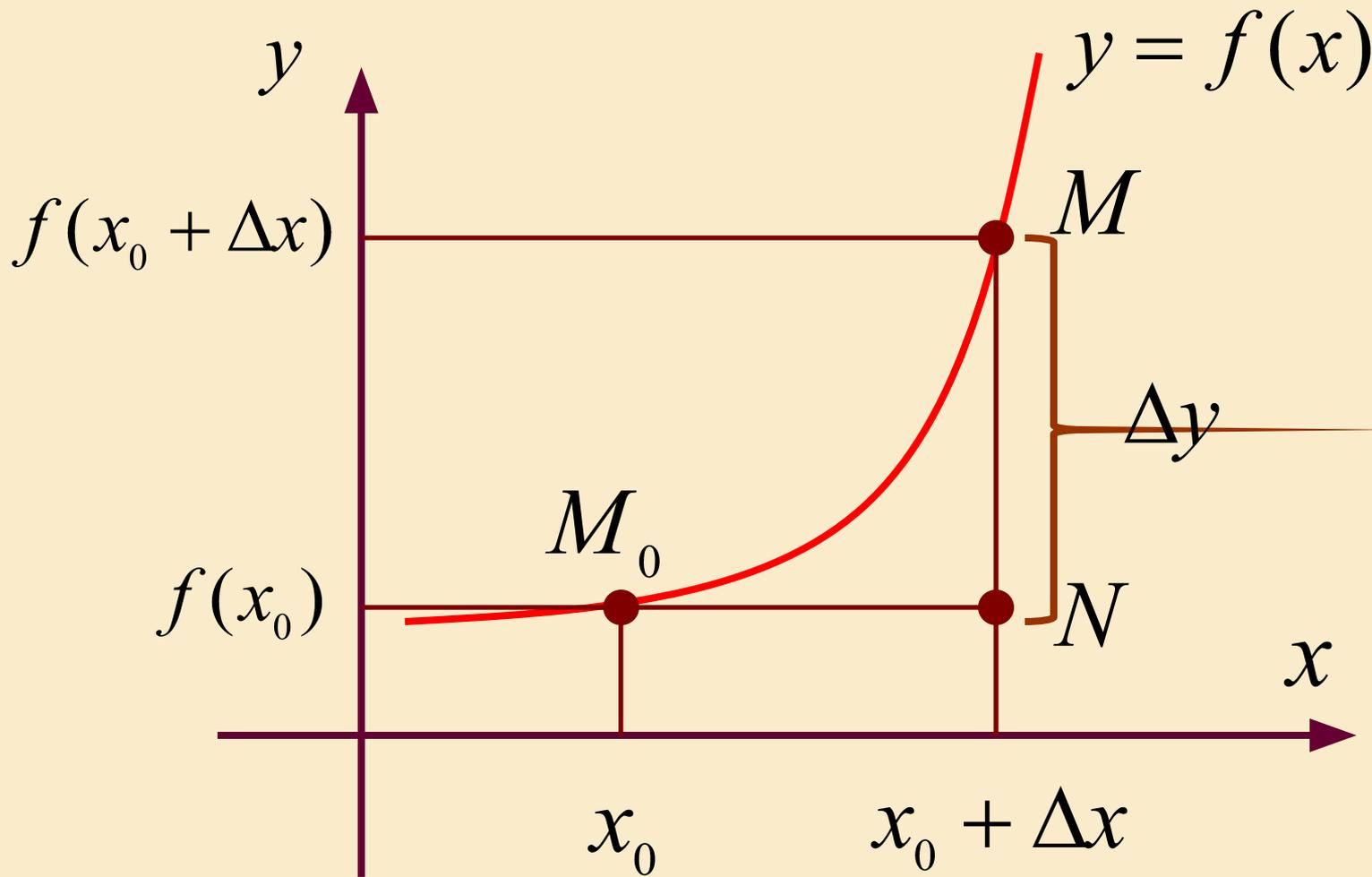
Рассмотрим график функции $y=f(x)$.

Дадим аргументу x_0 приращение Δx . Тогда функция получит приращение Δy :

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Графически:





определение 3.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если она определена в точке x_0 и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$



Точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$, если в этой точке функция не является непрерывной.

Точки разрыва бывают 1 и 2 рода.

Точка x_0 называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$, если существуют односторонние пределы функции слева и справа при $x \rightarrow x_0$

Точка x_0 называется точкой разрыва второго рода функции $f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов функции равен бесконечности или не существует.

ПРИМЕРЫ.



Функция $y = \frac{1}{x}$

имеет точку разрыва второго рода $x=0$,
поскольку:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$



2

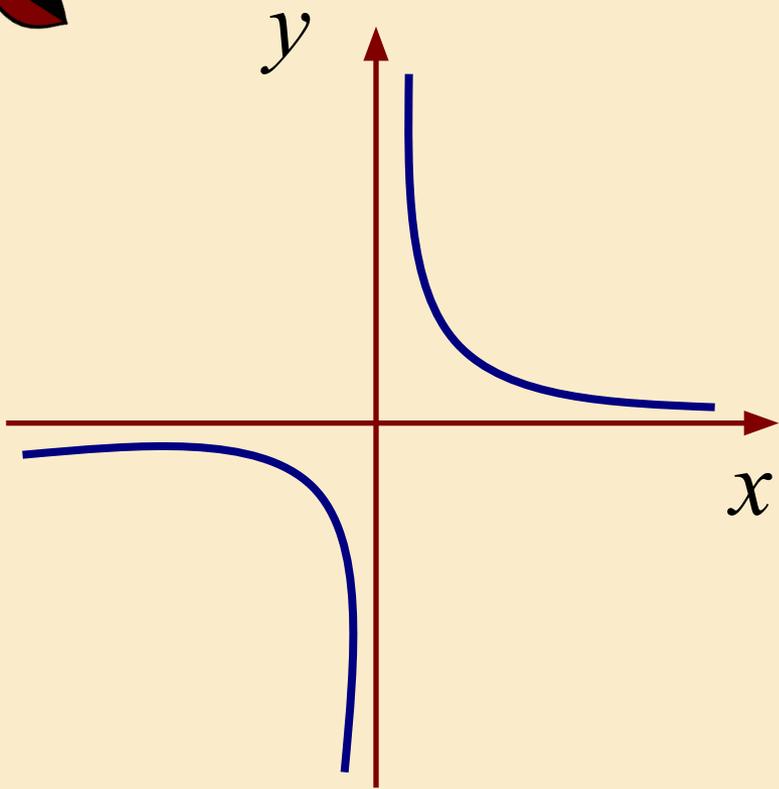
Функция

$$y = \begin{cases} x + 1, & x \geq 0 \\ x - 1, & x < 0 \end{cases}$$

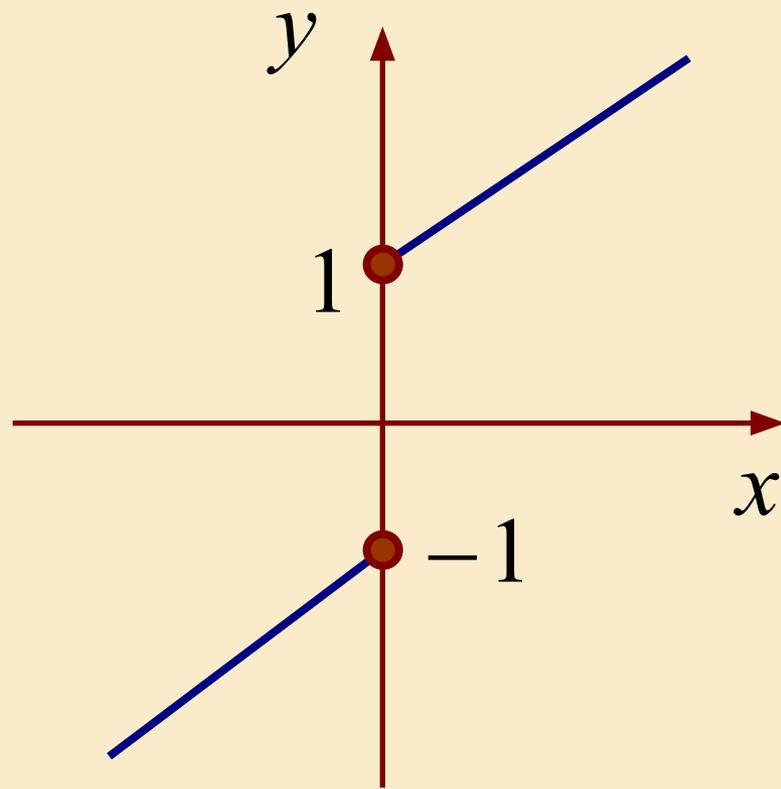
**имеет точку разрыва первого рода $x=0$,
поскольку:**

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} (x - 1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} (x + 1) = 1$$



$$y = \frac{1}{x}$$



$$y = \begin{cases} x + 1, & x \geq 0 \\ x - 1, & x < 0 \end{cases}$$

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ В ТОЧКЕ

1

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ – непрерывны в точке x_0 , то их сумма, разность, произведение и частное тоже являются функциями, непрерывными в точке x_0 .

2

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) > 0$, то существует такая окрестность точки x_0 , в которой $f(x) > 0$.

3

Если функция $y=f(u)$ непрерывна в точке u_0 , а $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 , причем $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0 .

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ

Функция $y=f(x)$ называется непрерывной на промежутке X , если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

ПРИМЕР.

Доказать непрерывность функции
 $y = \cos x$
на всей числовой оси.

Решение:

Найдем предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\cos(x + \Delta x) - \cos x) =$$

Используем формулу разности косинусов:

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\cos \frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} \right) = 0$$

Поскольку: $\left| \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \right| \leq 1$

А так же

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{\Delta x}{2} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \Delta x = \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}}_1 \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x}_0 = 0$$

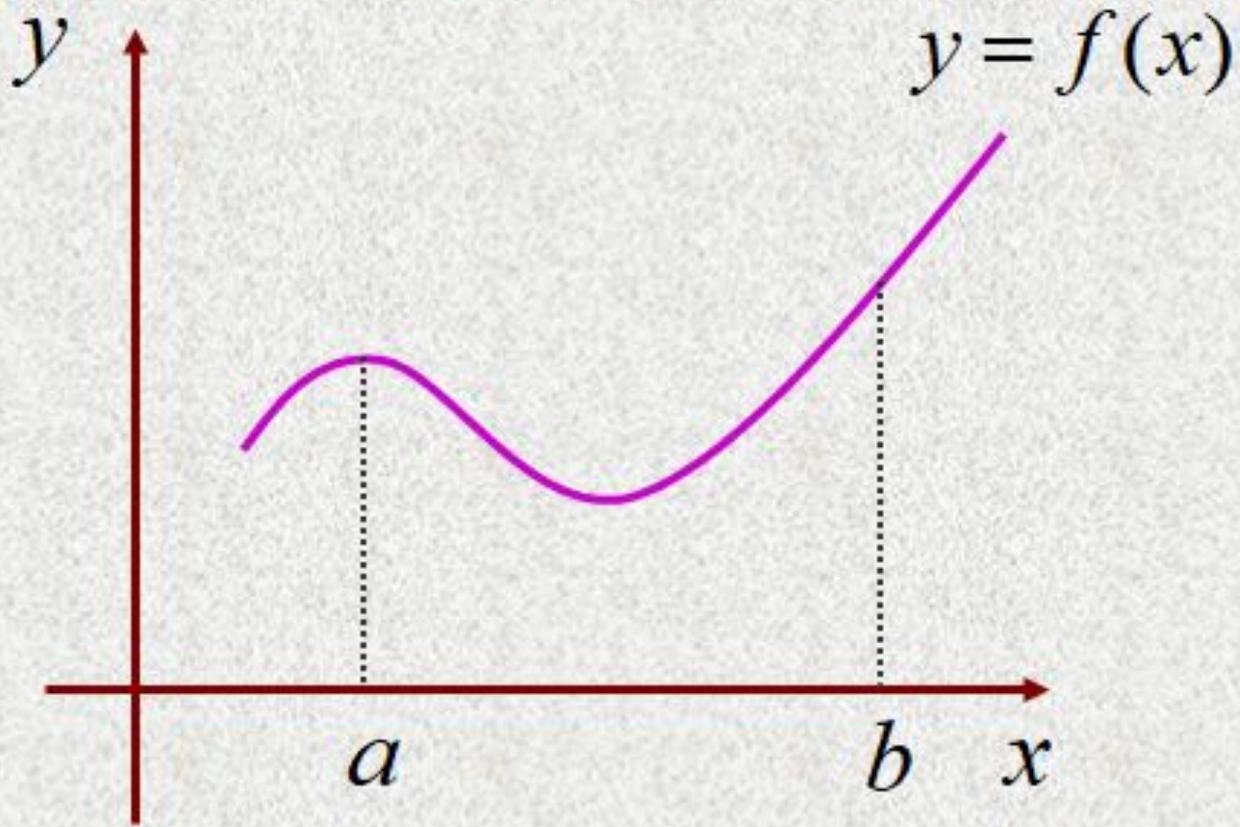
Следовательно: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$

и функция $y = \cos x$ является непрерывной на всей числовой оси.

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА ОТРЕЗКЕ

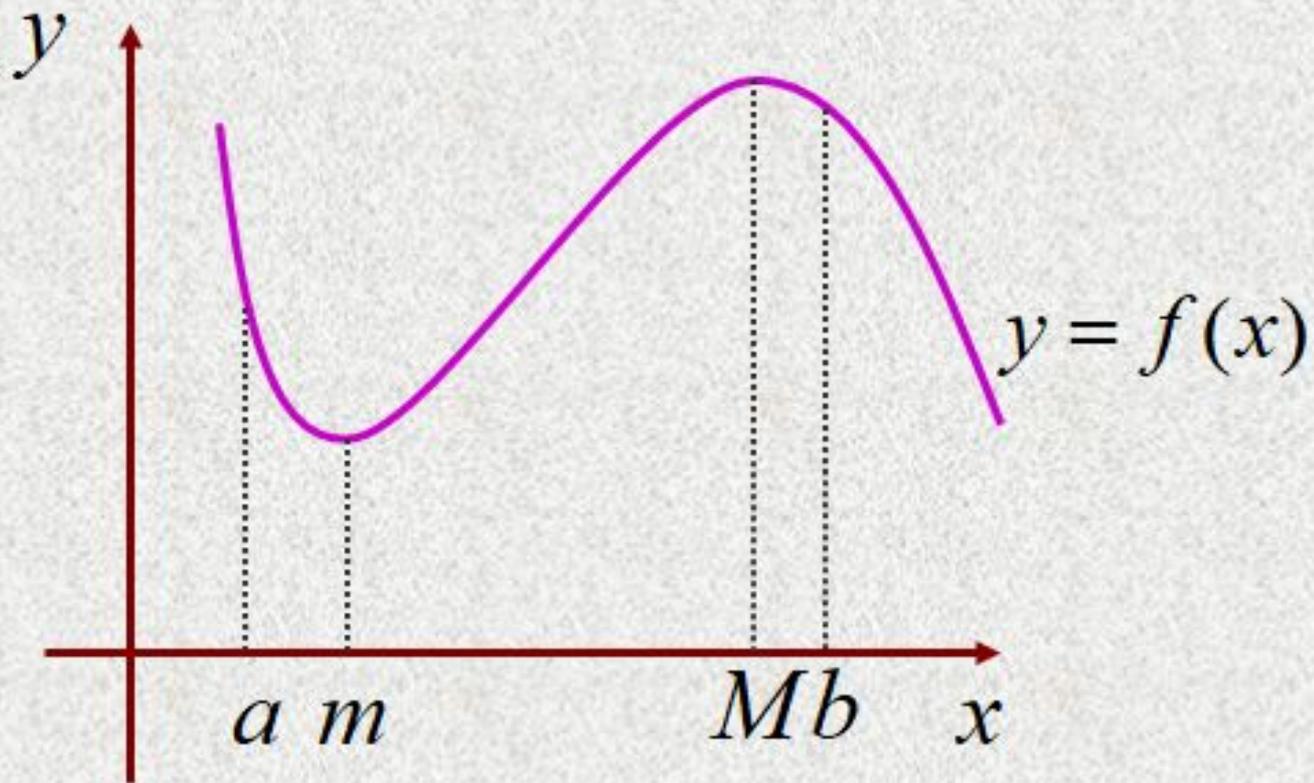
1

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.



Теорема Вейерштрасса

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке наименьшего значения m и наибольшего значения M .



Теорема Больцано-Коши

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, и значения ее на концах отрезка $f(a)$ и $f(b)$ имеют противоположные знаки, то внутри отрезка найдется точка ξ , такая что $f(\xi)=0$.

