~~*Тема 8.*~~ «Непрерывность функции в точке и на числовом промежутке. Свойства непрерывных функций».

1.Определение непрерывности функции в точке.

2.Определение функции непрерывной в интервале, на отрезке.

3. Точки разрыва и их классификация.

4. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Понятие непрерывности функции

определение 1.

Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, если она определена в этой точке (т.е. существует значение функции в этой точке $f(x_0)$) и имеет конечный предел при

$$x \to x_0$$

равный значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ПРИМЕРЫ.

1

Функция $y = \frac{1}{x}$

не является непрерывной в точке *x=0*, т.к. не существует значения функции в этой точке:

$$y(0) = \frac{1}{0} \quad \cancel{\exists}$$

2

Функция $y = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$

существует в точке *x=0* , т.к. *y(0)=1*

Рассмотрим пределы этой функции в точке *x=0* .

Предел слева: $\lim\limits_{x \to 0-0} (x-1) = -1$

Предел справа: $\lim\limits_{x \to 0+0} (x+1) = 1$

Эти пределы неравны, следовательно общего предела не существует и функция не является непрерывной в этой точке.

3

Функция $y = x^2$

является непрерывной в точке ***x=0,*** **т.к. существует значение функции в этой точке:** ***y(0)=0***

и существует предел $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$

Определение непрерывности функции может быть записано в виде:

определение 2.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right)$$

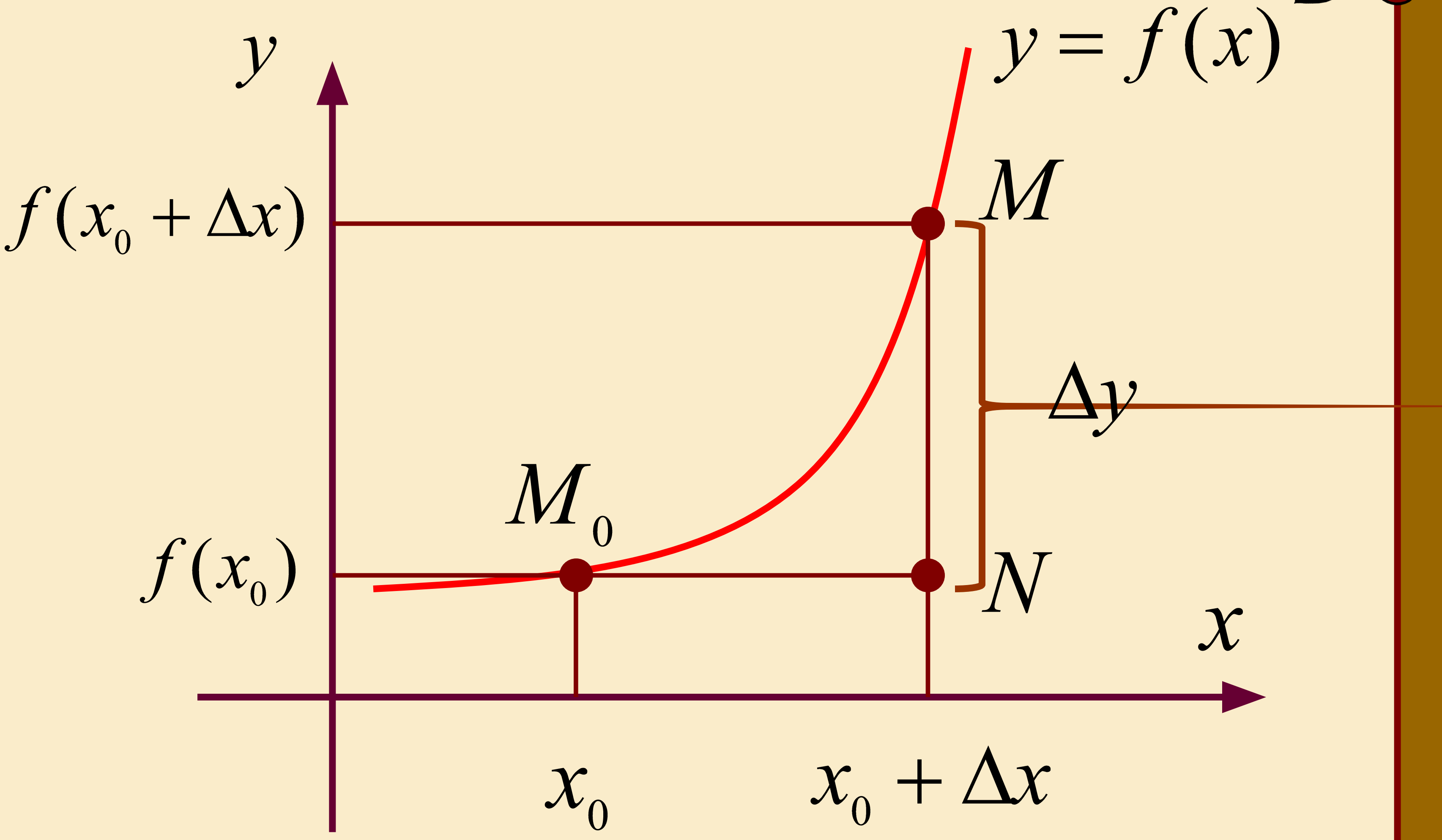
Непрерывность функции в данной точке выражается непрерывностью графика при прохождении этой точки.

Рассмотрим график функции *y=f(x)*.

Дадим аргументу x_0 приращение Δx. Тогда функция получит приращение Δy:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Графически:


y
$y = f(x)$
$f(x_0 + \Delta x)$
M
Δy
M_0
$f(x_0)$
N
x
x_0
$x_0 + \Delta x$

определение 3.

Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, если она определена в точке x_0 и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

Точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$, если в этой точке функция не является непрерывной.

Точки разрыва бывают 1 и 2 рода.

Точка x_0 называется точкой разрыва первого рода функции f(x), если существуют односторонние пределы функции слева и справа при $x \to x_0$

Точка x_0 называется точкой разрыва второго рода функции f(x), если хотя бы один из односторонних пределов функции равен бесконечности или не существует.

ПРИМЕРЫ.

1

Функция $y = \frac{1}{x}$

имеет точку разрыва второго рода x=0, поскольку:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

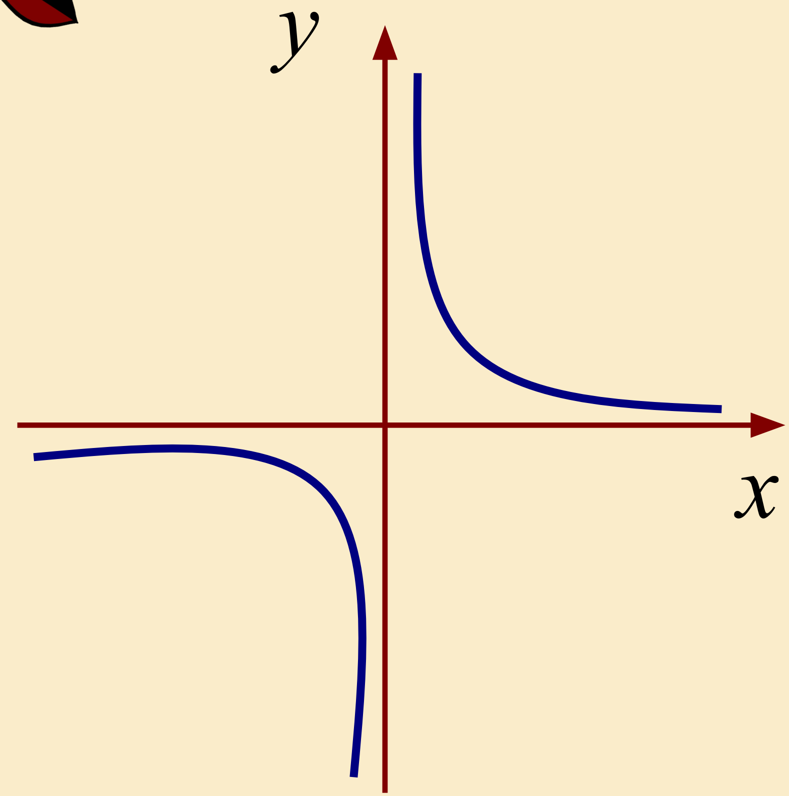
2

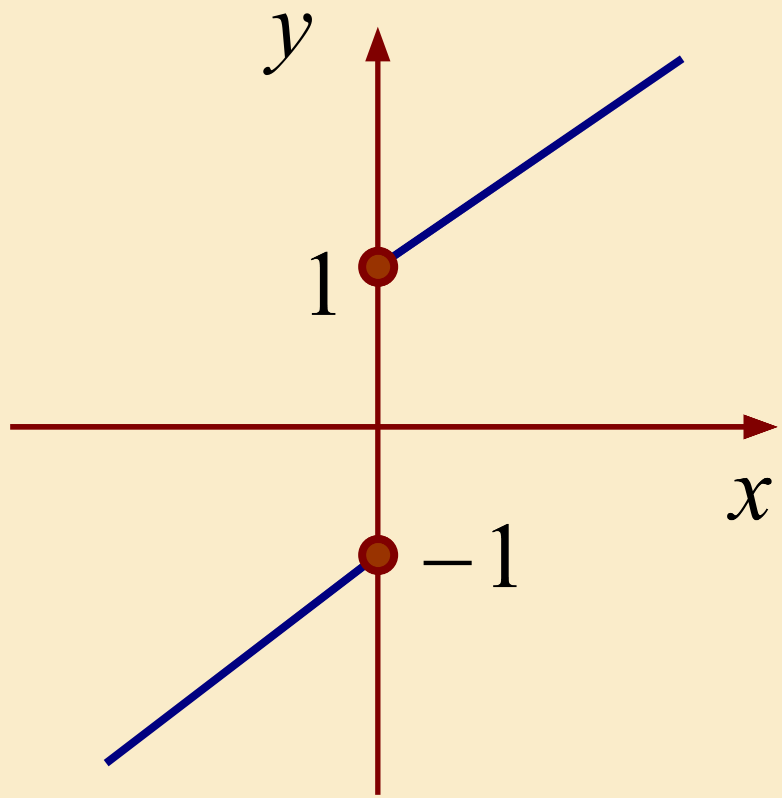
Функция $y = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$

имеет точку разрыва первого рода x=0, поскольку:

$$\lim_{x \to 0-0} (x-1) = -1$$

$$\lim_{x \to 0+0} (x+1) = 1$$





$$y = \frac{1}{x}$$

$$y = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$$

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ В ТОЧКЕ

1

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ – непрерывны в точке x_0, то их сумма, разность, произведение и частное тоже являются функциями, непрерывными в точке x_0.

2

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0)>0$, то существует такая окрестность точки x_0, в которой $f(x)>0$.

3

Если функция $y=f(u)$ непрерывна в точке u_0, а $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, причем $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ

Функция $y=f(x)$ называется непрерывной на промежутке X, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

ПРИМЕР.

Доказать непрерывность функции

$y=\cos x$

на всей числовой оси.

Решение:

Найдем предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\cos(x + \Delta x) - \cos x\right) =$$

Используем формулу разности косинусов:

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\cos \frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} \right) = 0$$

Поскольку: $\left|\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\right| \le 1$

А так же

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\Delta x}{2}=\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\Delta x=\frac{1}{2}\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}}_{1}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x}_{0}=0$$

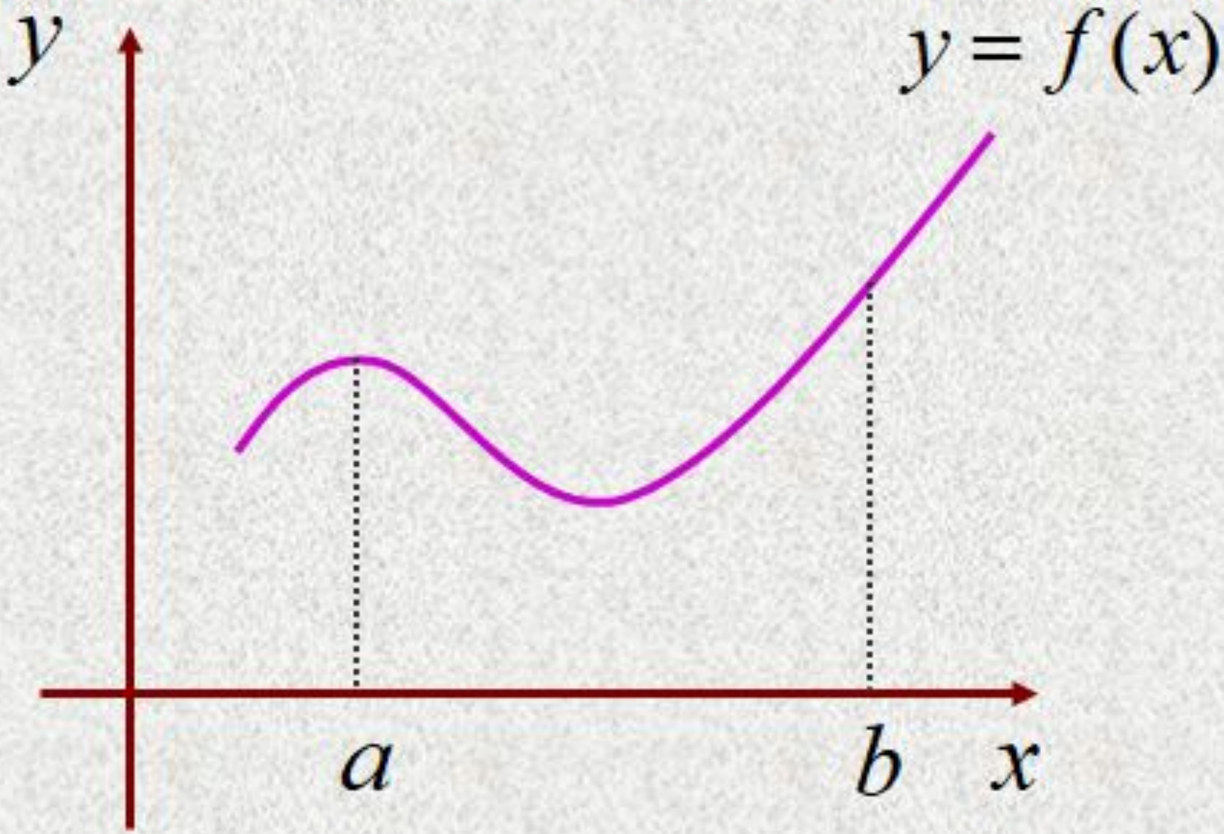
Следовательно: $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$

и функция *y=cos x* является непрерывной на всей числовой оси.

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА ОТРЕЗКЕ

1

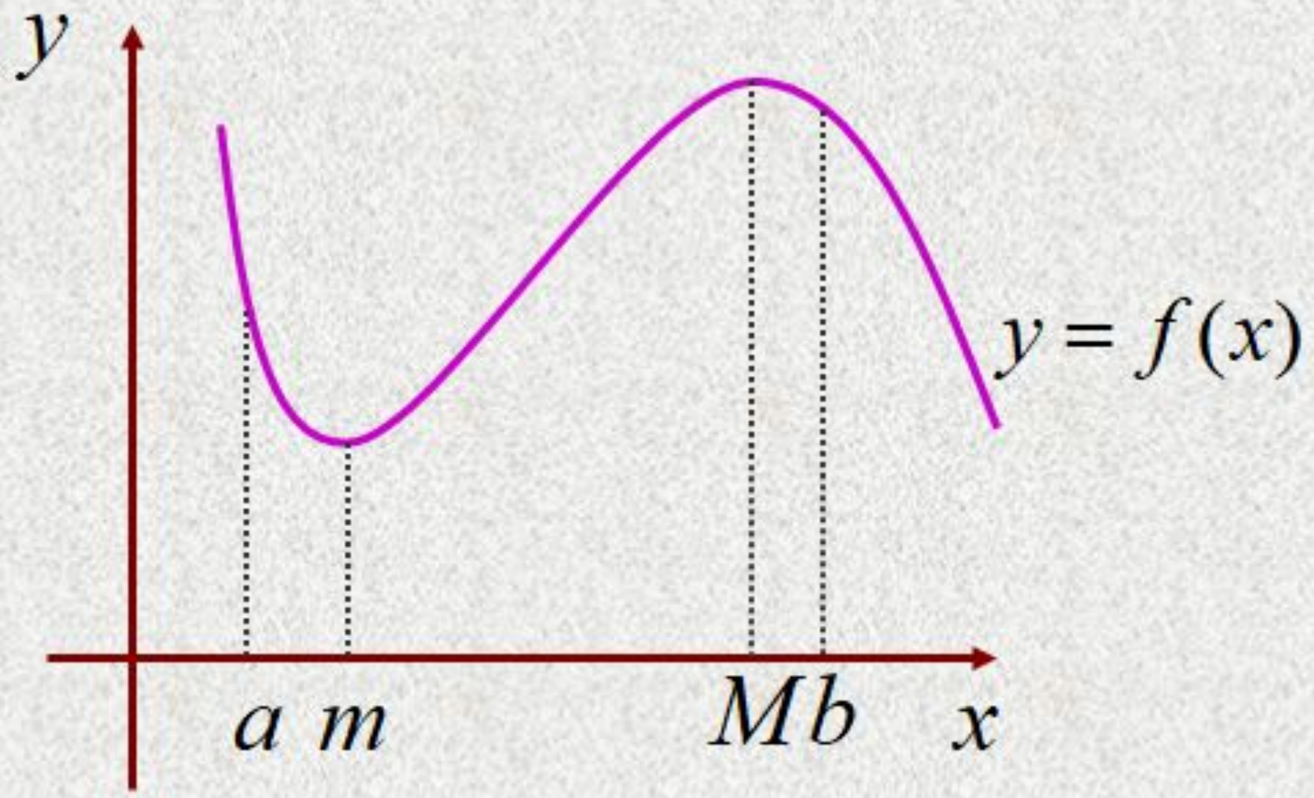
Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.


y
y = f(x)
a
b
x

2

Теорема Вейерштрасса

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке наименьшего значения m и наибольшего значения M.

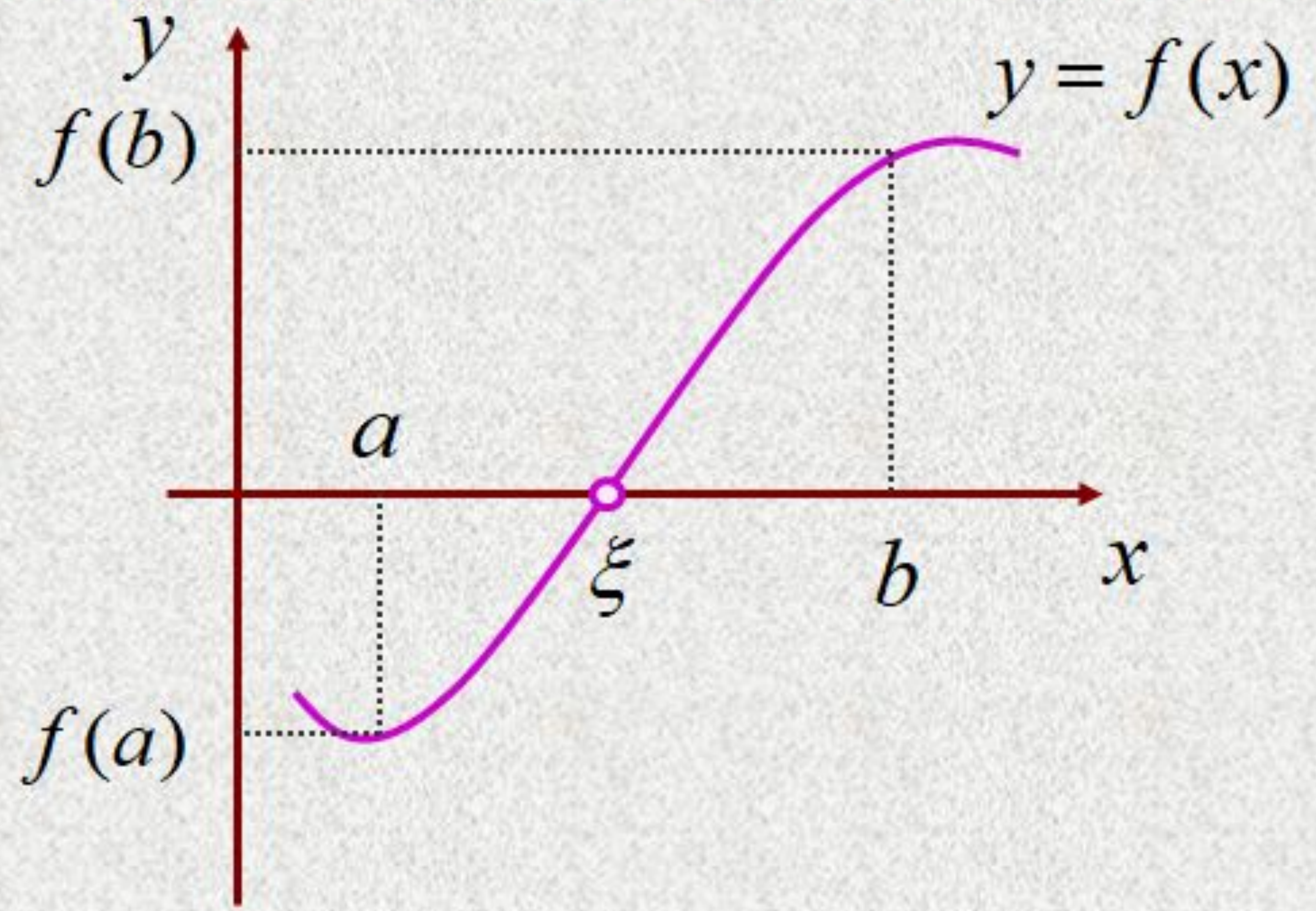


y
$y=f(x)$
a m
M b
x

3

Теорема Больцано-Коши

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, и значения ее на концах отрезка $f(a)$ и $f(b)$ имеют противоположные знаки, то внутри отрезка найдется точка ξ, такая что $f(\xi)=0$.


y
y = f(x)
f(b)
a
x
ξ
b
f(a)