

Решение тригонометрических уравнений

Работа учителя ГБОУ СОШ
№380

Трофименко З. С.

Уравнения, решаемые с помощью условия равенства одноимённых тригонометрических функций

Многие тригонометрические уравнения могут быть приведены к равенству одноимённых тригонометрических функций.

Такие уравнения решаются на основании условий равенства одноимённых тригонометрических функций, т. е. тех условий, которым должны удовлетворять два угла: α и β , если 1) $\sin \alpha = \sin \beta$, 2) $\cos \alpha = \cos \beta$, 3) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$.

Решение уравнения вида $\sin \alpha = \sin \beta$

Для того, чтобы синусы двух углов были равны, необходимо и достаточно, чтобы:

$\alpha - \beta = 2\pi n$ или $\alpha + \beta = (2n+1)\pi$, где n целое число.

Решить уравнение: $\sin 3x = \sin 5x$

Решение. На основании условия равенства двух синусов имеем: 1) $5x - 3x = 2\pi k$; $2x = 2\pi k$, $x = \pi k$, где k целое число.

2) $3x + 5x = (2k + 1)\pi$, $x = (2k+1)\pi/8$, где k целое число.

Ответ: $x = \pi k$; $x = (2k+1)\pi/8$, где k целое число.

Для того, чтобы косинусы двух углов были равны, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий: разность этих углов должна равняться произведению числа π на чётное число;

сумма этих углов должна равняться произведению числа π на чётное число. $\cos\alpha = \cos\beta$

$$\alpha - \beta = 2k\pi \text{ или } \alpha + \beta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Решение уравнения вида $\cos x = \cos y$

Для того чтобы косинусы двух углов были равны, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:

1) $x - y = 2\pi n$ или $x + y = 2\pi n$, где n -целое число

2) Решить уравнение: $\cos 3x = \cos 5x$

Решение: $5x - 3x = 2\pi n$,

$$2x = 2\pi n,$$

$$x = \pi n, \text{ где } n\text{-целое число}$$

или $5x + 3x = 2\pi n$,

$$8x = 2\pi n,$$

$$x = \frac{1}{4}\pi n$$

Ответ: $\frac{1}{4}\pi n$, где n целое число.

Решение уравнения вида $\operatorname{tg}x = \operatorname{tgy}$

Для того, чтобы тангенсы двух углов были равны, необходимо и достаточно одновременное выполнение двух условий: 1) тангенс каждого из двух углов существует;

2) разность этих углов равна числу π , умноженному на целое число.

Решить уравнение : $\operatorname{tg} (5x + \pi/3) = \operatorname{ctg} 3x$

Преобразуем уравнение и получим $\operatorname{tg} (5x + \pi/3) = \operatorname{tg} (\pi/2 - 3x)$.

На основании условия равенства тангенсов двух углов имеем:

$$5x + \pi/3 - \pi/2 + 3x = \pi n;$$

$8x = \pi/6 + \pi n$, $x = (6n + 1) \pi/48$, где n - целое число. При каждом значении x из этой совокупности каждая из частей уравнения существует.

Ответ: $(6n + 1) \pi/48$, где n – целое число.

Некоторые виды тригонометрических уравнений

- $a\sin^2x + b\sin x + c = 0;$

- $a\cos^2x + b\cos x + c = 0; a\tg^2x + b\tg x + c = 0 ;$

- $a\cos^2x + b\sin x + c = 0; a\sin^2x + b\cos x + c = 0;$

- $a \sin x + b \cos x = 0;$

- $a\sin^2x + b\sin x \cos x + c\cos^2x = 0;$

- $a\sin x + b\cos x = c, \text{ где } a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0;$

- Уравнения, правая часть которых равна нулю, решаются разложением левой части на множители. При решении нужно помнить, что произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю, а **другие множители при этом не теряют смысла.**

1 вариант

2 вариант

1) $2\sin^2x + 5\cos x + 1 = 0$; 1) $2\sin^2x - 5\cos x + 1 = 0$

2) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{2}$

3) $\sin 2x + \cos 2x = 0$; 3) $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 0$

4) $1 - 2\sin 2x = 6\cos^2 x$; 4) $1 + 2\sin 2x + 2\cos^2 x = 0$

Ответы:

1вариант

2вариант

$$1) \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z; \quad 1) \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$$

$$2) (-1)^k \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z; \quad 2) (-1)^k \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

$$3) -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z \quad 3) \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$$

$$4) -\frac{\pi}{4} + \pi k; \arctg 5 + \pi k, k \in Z$$

$$4) -\frac{\pi}{4} + \pi k; -\arctg 3 + \pi k,$$