Решение тригонометрических уравнений

Работа учителя ГБОУ СОШ №380

Трофименко З. С.

Уравнения, решаемые с помощью условия равенства одноимённых тригонометрических функций

Многие тригонометрические уравнения могут быть приведены к равенству одноимённых тригонометрических функций.

Такие уравнения решаются на основании условий равенства одноимённых тригонометрических функций, т. е. тех условий, которым должны удовлетворять два угла: α и β, если 1) $\sin\alpha = \sin\beta$, 2) $\cos\alpha = \cos\beta$,

3) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$.

Решение уравнения вида $\sin\alpha = \sin\beta$

Для того, чтобы синусы двух углов были равны, необходимо и достаточно, чтобы:

$\alpha - \beta = 2\pi n$ или $\alpha + \beta = (2n+1)\pi$, где n целое число.

Решить уравнение: $\sin 3x = \sin 5x$

Решение. На основании условия равенства двух синусов имеем: 1) $5x-3x = 2\pi k$; $2x = 2\pi k$, $x= \pi k$, где к целое число.

2) $3x+5x = (2k + 1)\pi$, $x = (2k+1)\pi/8$, где к целое число.

Ответ: $x= \pi k$; $x = (2k+1)\pi/8$, где к целое число.

Для того, чтобы косинусы двух углов были равны, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий: разность этих углов должна равняться произведению числа π на чётное число;

сумма этих углов должна равняться произведению числа π на чётное число. $\cos\alpha = \cos\beta$

$\alpha - \beta = 2\kappa\pi$ или $\alpha + \beta = 2\kappa\pi$, к$\in Z$

Решение уравнения вида $\cos x = \cos y$

Для того чтобы косинусы двух углов были равны, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:

1) $x - y = 2\pi n$ или $x + y = 2\pi n$, где n-целое число

2) Решить уравнение: $\cos 3x = \cos 5x$

Решение: $5x – 3x = 2\pi n$,

$2x = 2\pi n$,

$x = \pi n$, где n- целое число

или $5x + 3x = 2\pi n$,

$8x = 2\pi n$,

$x = ¼ \pi n$

Ответ: $¼ \pi n$, где n целое число.

Решение уравнения вида tgx = tgy

Для того, чтобы тангенсы двух углов были равны, необходимо и достаточно одновременное выполнение двух условий: 1) тангенс каждого из двух углов существует;

2) разность этих углов равна числу π, умноженному на целое число.

Решить уравнение : $\operatorname{tg}(5x + \pi/3) = \operatorname{ctg} 3x$

Преобразуем уравнение и получим $\operatorname{tg}(5x + \pi/3) = \operatorname{tg}(\pi/2 - 3x)$.

На основании условия равенства тангенсов двух углов имеем:

$5x + \pi/3 - \pi/2 + 3x = \pi n$;

$8x = \pi/6 + \pi n$, $x = (6n + 1)\pi/48$, где n- целое число. При каждом значении x из этой совокупности каждая из частей уравнения существует.

Ответ: $(6n + 1)\pi/48$, где n – целое число.

Некоторые виды тригонометрических уравнений

- $a\sin^2x+b\sin x+c=0$;
  $a\cos^2x+b\cos x+c=0$;$a\,tg^2x+b\,tgx+c=0$;
  $a\cos^2x+b\sin x+c=0$;$a\sin^2x+b\cos x+c=0$;
- $a\sin x + b\cos x=0$;
- $a\sin^2x+b\sin x\cos x+c\cos^2x=0$;
- $a\sin x+b\cos x=c$,где $a\neq0,b\neq0,c\neq0$;

- Уравнения, правая часть которых равна нулю, решаются разложением левой части на множители. При решении нужно помнить, что произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю, а **другие множители при этом не теряют смысла.**

1вариант

1) $2\sin^2 x+5\cos x+1=0$;

2) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{2}$;

3) $\sin 2x+\cos 2x=0$;

4) $1-2\sin 2x=6\cos^2 x$;

2вариант

1) $2\sin^2 x-5\cos x+1=0$

2) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=\sqrt{2}$

3) $\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=0$

4) $1+2\sin 2x+2\cos^2 x=0$

Ответы:

1вариант

1) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi\kappa, \kappa \in Z$;

2) $(-1)^{к}\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}+\pi к, к\in Z$;

3) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi\kappa}{2}, к\in Z$

4) $-\frac{\pi}{4}+\pi к; \mathrm{arctg}5+\pi к, к\in Z$

2вариант

1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi к, к\in Z$

2) $(-1)^{к}\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}+\pi к, к\in Z$

3) $\frac{\pi}{3}+\pi к, к\in Z$

4) $-\frac{\pi}{4}+\pi к; -\mathrm{arctg}3+\pi к,$