

Решение логарифмических неравенств

Логарифмическим неравенством называется неравенство, в котором переменная находится под знаком логарифма

Логарифмическими неравенствами называют неравенства вида

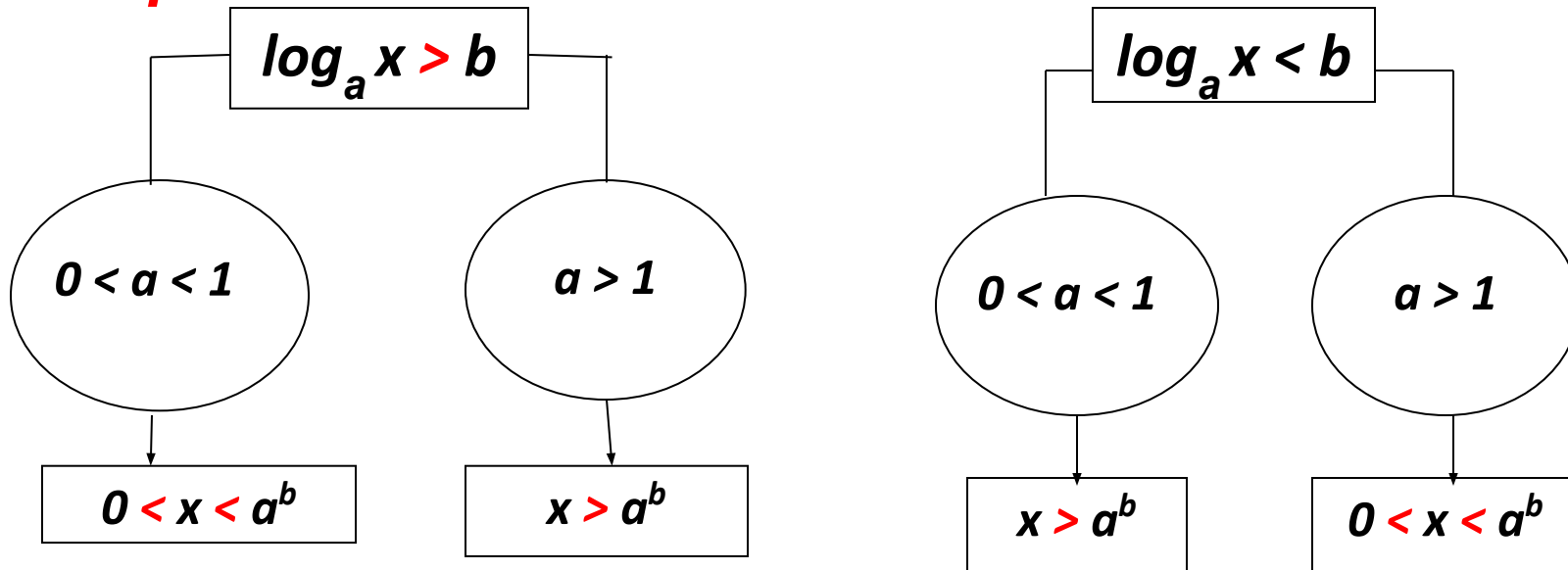
$$\log_a f(x) > \log_a g(x), \text{ где } a > 0, a \neq 1,$$

1. По определению логарифма

Простейшие логарифмические неравенства записываются следующим образом:

$$\log_a f(x) > b \quad \log_a f(x) < b$$

Схема сравнения логарифмических неравенств:



$$\log_{\frac{1}{6}}(x^2 - 3x + 2) \geq -1$$

$$\log_{0,25}(1 + x) < -1$$

$$\log_{\frac{1}{4}}(1 + x) < -1$$

$$1 + x > 4$$

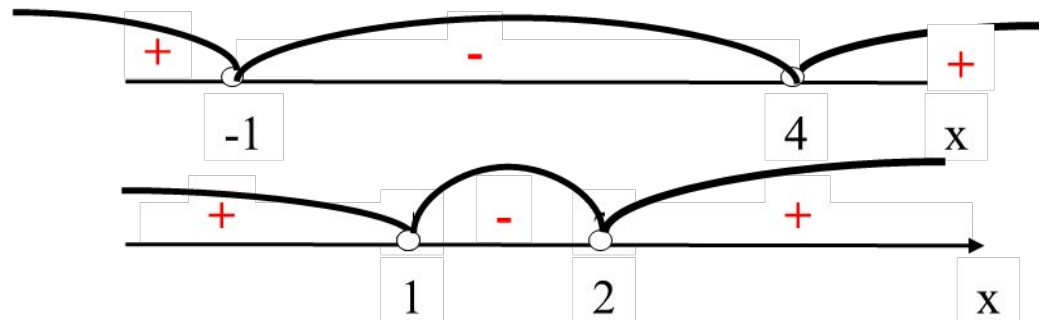
$$x > 3$$

Ответ : $(3; +\infty)$

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \leq 6 \\ x^2 - 3x + 2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0 \\ x^2 - 3x + 2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - 4)(x + 1) \leq 0 \\ (x - 1)(x - 2) > 0 \end{cases}$$



Ответ : $[-1; 1) \cup (2; 4]$.

2. Метод потенцирования

Суть метода в следующем: с помощью формул неравенство привести к виду $\log_a f(x) > \log_a g(x)$

Справедливы следующие утверждения:

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0; \end{cases} \quad a > 1$$

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0; \end{cases} \quad 0 < a < 1$$

$$1) \log_5(2x) > \log_5(x-1)$$

Т.к. $5 > 1$, то функция $y = \log_5 t$ – возрастающая и, учитывая ОДЗ, получаем

$$\begin{cases} 2x > x-1 \\ x-1 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1 \\ x > 1 \end{cases} \quad x > 1$$

Ответ: $(1; +\infty)$

$$2) \quad \log_{\frac{1}{2}}(2x) > \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$$

Т.к. $0 < \frac{1}{2} < 1$, то функция $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ — убывающая

и, учитывая ОДЗ, получаем

$$\begin{cases} 2x < x-1 \\ 2x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < -1 \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{решений нет}$$

Ответ: решений нет

$$3). \log_{\frac{1}{2}}(16 + 4x - x^2) \leq -4;$$

$$0 < \frac{1}{2} < 1$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(16 + 4x - x^2) \leq \log_{\frac{1}{2}} 16;$$

$$\begin{cases} 16 + 4x - x^2 > 0, \\ 16 + 4x - x^2 \geq 16. \end{cases}$$

$$16 + 4x - x^2 \geq 16,$$

$$4x - x^2 \geq 0,$$

$$x^2 - 4x \leq 0,$$

$$x(x - 4) \leq 0, \quad x \in [0; 4].$$

Ответ: $[0; 4]$

Самостоятельно :

$$1) \log_{\frac{1}{3}}(x-2) < \log_{\frac{1}{3}}(4-x)$$

$$\log_2(x^2 + 2x - 3) < \log_2(7 - x)$$

Найдите ошибку:

$$\log_8(5x-10) < \log_8(14-x),$$

$$5x-10 < 14-x,$$

$$6x < 24,$$

$$x < 4.$$

Ответ: $x \in (-\infty; 4)$.

Решить верно:

$$\log_8(5x-10) < \log_8(14-x)$$

Ответ: $x \in (2; 4)$.

3. Метод введения новой переменной:

Ищем в неравенстве некоторое повторяющееся выражение, которое обозначим новой переменной, тем самым, упрощая вид неравенства. Например:

$$4\log_2^2 x - 5\log_2 x + 1 \leq 0, \quad \text{ОДЗ: } x > 0,$$

$$\log_2 x = t,$$

$$4t^2 - 5t + 1 \leq 0,$$

$$4(t - 1)\left(t - \frac{1}{4}\right) \leq 0,$$

$$(t - 1)\left(t - \frac{1}{4}\right) \leq 0, \quad t \in \left[\frac{1}{4}; 1\right].$$

$$\frac{1}{4} \leq \log_2 x \leq 1, \quad \log_2 2^{\frac{1}{4}} \leq \log_2 x \leq \log_2 2,$$

$$2 > 1, \quad 2^{\frac{1}{4}} \leq x \leq 2, \quad x \in [\sqrt[4]{2}; 2].$$

Ответ: $[\sqrt[4]{2}; 2]$

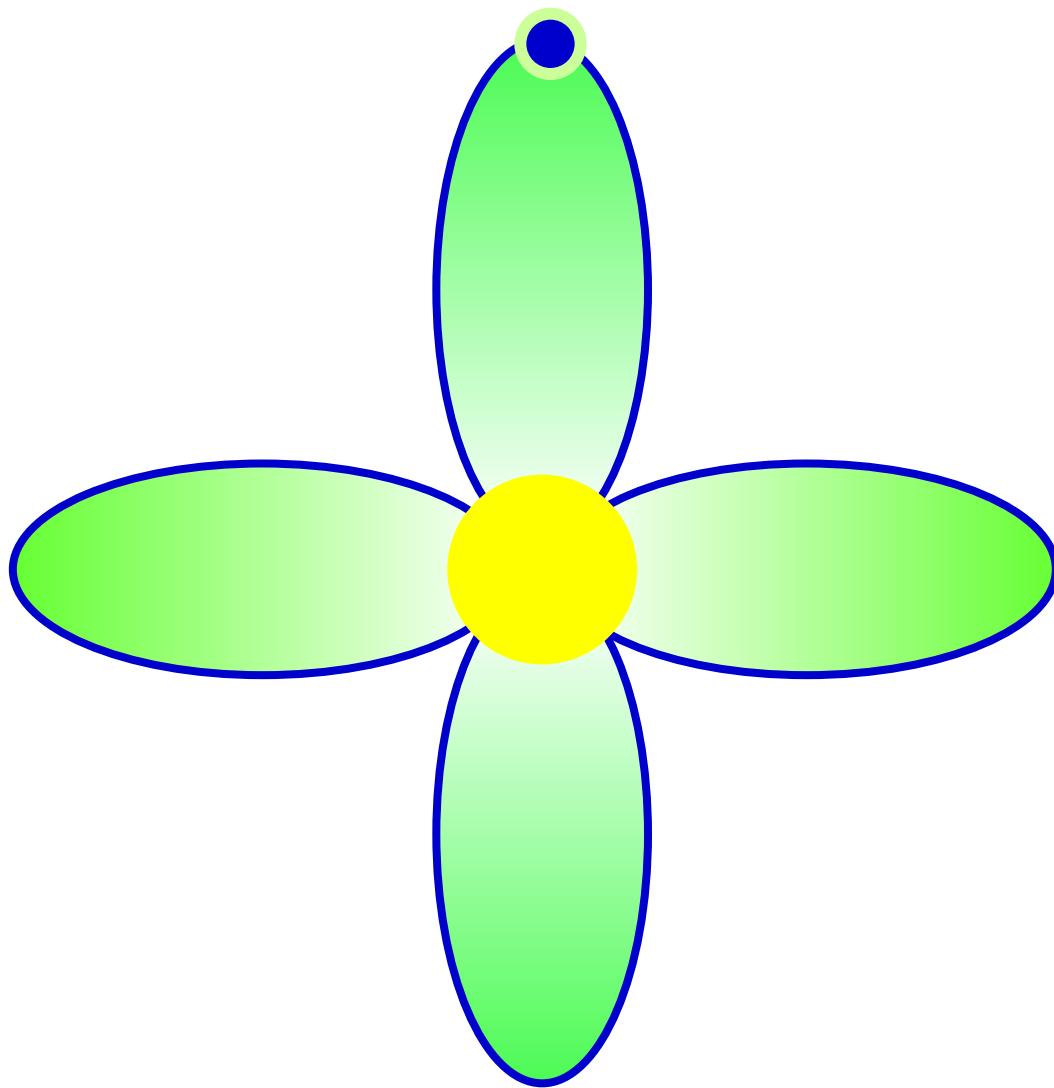
Решить неравенство

$$(\log_5(2x - 1))^2 - \log_5(2x - 1) - 2 \leq 0$$

$$2x - 1 > 0, \quad x > 0,5$$

$$\text{Пусть } y = \log_5(2x - 1)$$

Физминутка для глаз



**Правильному применению методов
можно научиться, только применяя их на
различных примерах**

Цейтен

