Решение логарифмических неравенств

Логарифмическим неравенством называется неравенство, в котором переменная находится под знаком логарифма

Логарифмическими неравенствами называют неравенства вида

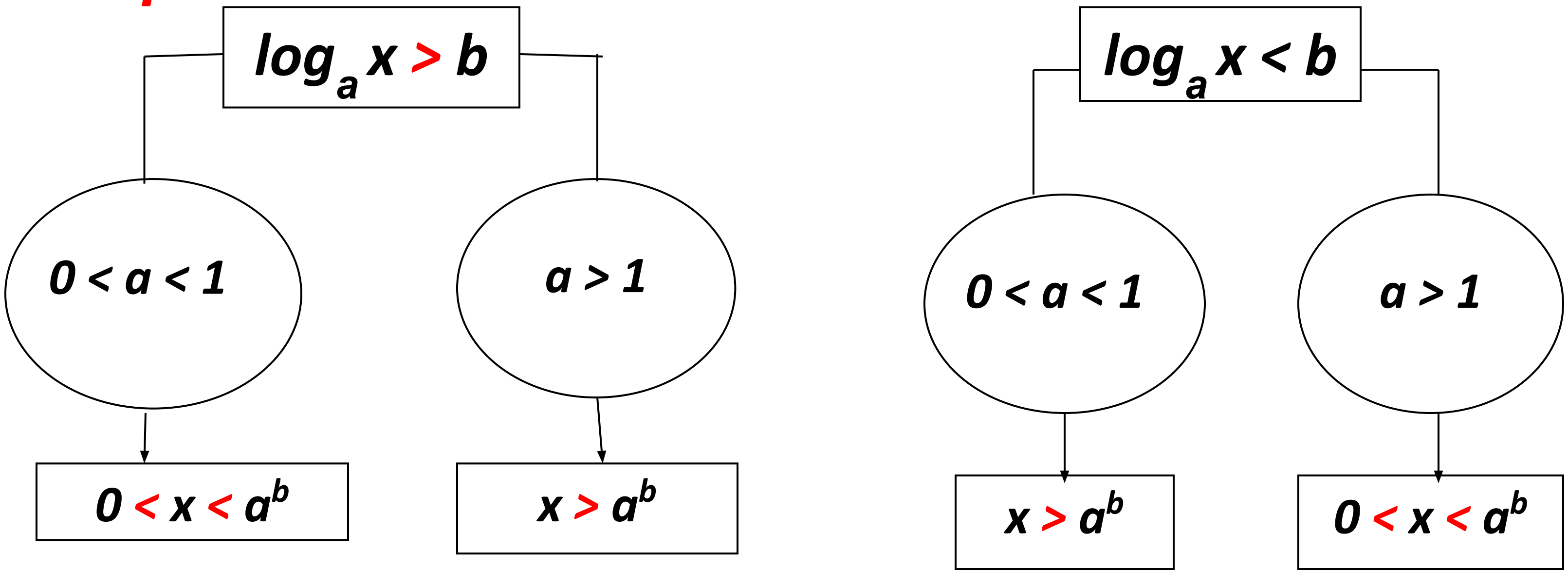
$$\log_a f(x) > \log_a g(x), \text{где } \alpha > 0, \alpha \neq 1,$$

1. По определения логарифма

Простейшие логарифмические неравенства записывается следующим образом:

$$\log_a f(x) > b \qquad \log_a f(x) < b$$

Схема сравнения логарифмических неравенств:



$$\log_{0,25}(1+x) < -1$$

$$\log_{\frac{1}{4}}(1+x) < -1$$

$$1 + x > 4$$

$$x > 3$$

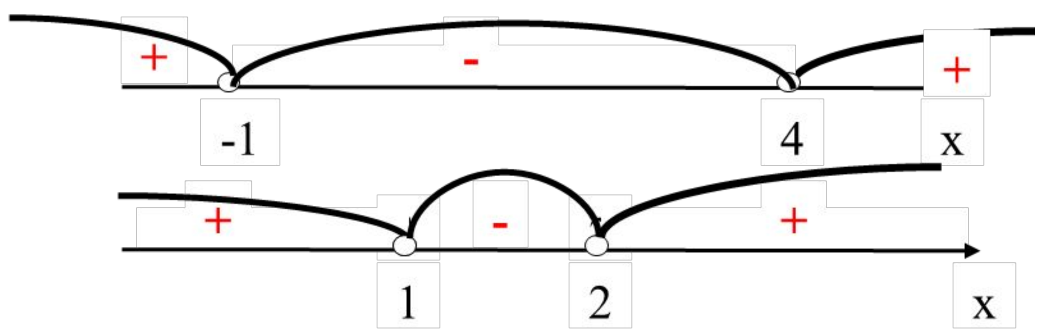
Ответ: $(3;+\infty)$

$$\log_{\frac{1}{6}}(x^2 - 3x + 2) \geq -1$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \leq 6 \\ x^2 - 3x + 2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0 \\ x^2 - 3x + 2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-4)(x+1) \leq 0 \\ (x-1)(x-2) > 0 \end{cases}$$



Ответ: $[-1;1) \cup (2;4]$.

2. Метод потенцирования

Суть метода в следующем: с помощью формул неравенство привести к виду $\log_a f(x) > \log_a g(x)$

Справедливы следующие утверждения:

$$\log_a f(x) \ge \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ f(x) > 0, \qquad a > 1 \\ g(x) > 0; \end{cases}$$

$$\log_a f(x) \ge \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) > 0, \qquad 0 < a < 1 \\ g(x) > 0; \end{cases}$$

$$1)\ \log_5(2x) \rangle \log_5(x-1)$$

Т.к. $5 \rangle 1$, *то функция* $y = \log_5 t$ – *возрастающая*

и, учитывая ОДЗ, получаем

$$\begin{cases} 2x \rangle x-1 \\ x-1 \rangle 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \rangle -1 \\ x \rangle 1 \end{cases} \qquad x \rangle 1$$

$$\textit{Ответ}:\ (1; +\infty)$$

$$2)\quad \log_{\frac{1}{2}}(2x) \rangle \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$$

Т.к. $0 \langle \dfrac{1}{2} \langle 1$, *то функция* $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ *– убывающая*

и, учитывая ОДЗ, получаем

$$\begin{cases} 2x \langle\; x-1 \\ 2x \rangle\; 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \langle -1 \\ x \rangle\; 0 \end{cases} \qquad \textit{решений нет}$$

Ответ: решений нет

3). $\log_{\frac{1}{2}}(16+4x-x^2) \le -4$;

$$0 < \frac{1}{2} < 1$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(16+4x-x^2) \le \log_{\frac{1}{2}}16;$$

$$\begin{cases} 16+4x-x^2 > 0, \\ 16+4x-x^2 \ge 16. \end{cases}$$

$$16+4\mathrm{x}-x^2 \ge 16,$$

$$4x-x^2 \ge 0,$$

$$x^2-4x \le 0,$$

$$x(x-4) \le 0, \quad x \in [0;\ 4].$$

Ответ: [0; 4]

Самостоятельно :

1) $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) < \log_{\frac{1}{3}}(4-x)$

$\log_2(x^2+2x-3) < \log_2(7-x)$

Найдите ошибку:

$$\log_8(5x-10) < \log_8(14-x),$$

$$5x-10 < 14-x,$$

$$6x < 24,$$

$$x < 4.$$

Ответ: $x \in (-\infty; 4)$.

Решить верно:

$$\log_8(5x-10) < \log_8(14-x)$$

Ответ: $x \in (2;4)$.

3.Метод введения новой переменной:

Ищем в неравенстве некоторое повторяющееся выражение, которое обозначим новой переменной, тем самым, упрощая вид неравенства. Например:

$4\log_2^2 x - 5\log_2 x + 1 \le 0,$ ОДЗ: $x > 0,$

$\log_2 x = t,$

$4t^2 - 5t + 1 \le 0,$

$4(t-1)(t-\frac{1}{4}) \le 0,$

$(t-1)(t-\frac{1}{4}) \le 0,$ $t \in [\frac{1}{4}; 1].$

$\frac{1}{4} \le \log_2 x \le 1,$ $\log_2 2^{\frac{1}{4}} \le \log_2 x \le \log_2 2,$

$2 > 1,$ $2^{\frac{1}{4}} \le x \le 2,$ $x \in [\sqrt[4]{2}; 2].$

Ответ: $[\sqrt[4]{2}; 2]$

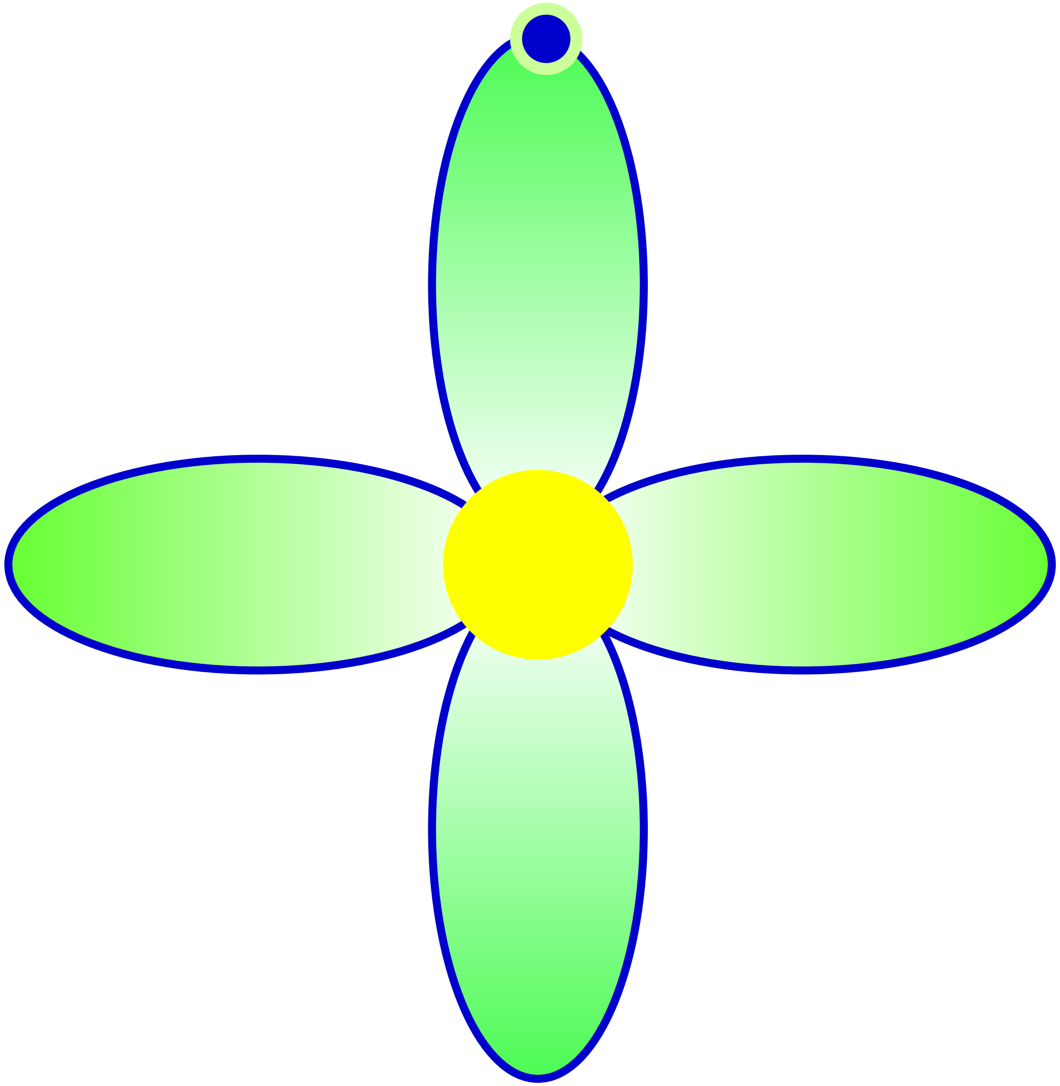
Решить неравенство

$$(\log_5(2x-1))^2 - \log_5(2x-1) - 2 \le 0$$

$$2x - 1 > 0, \quad x > 0{,}5$$

Пусть $y = \log_5(2x-1)$

Физминутка для глаз



Правильному применению методов можно научиться, только применяя их на различных примерах

Цейтен