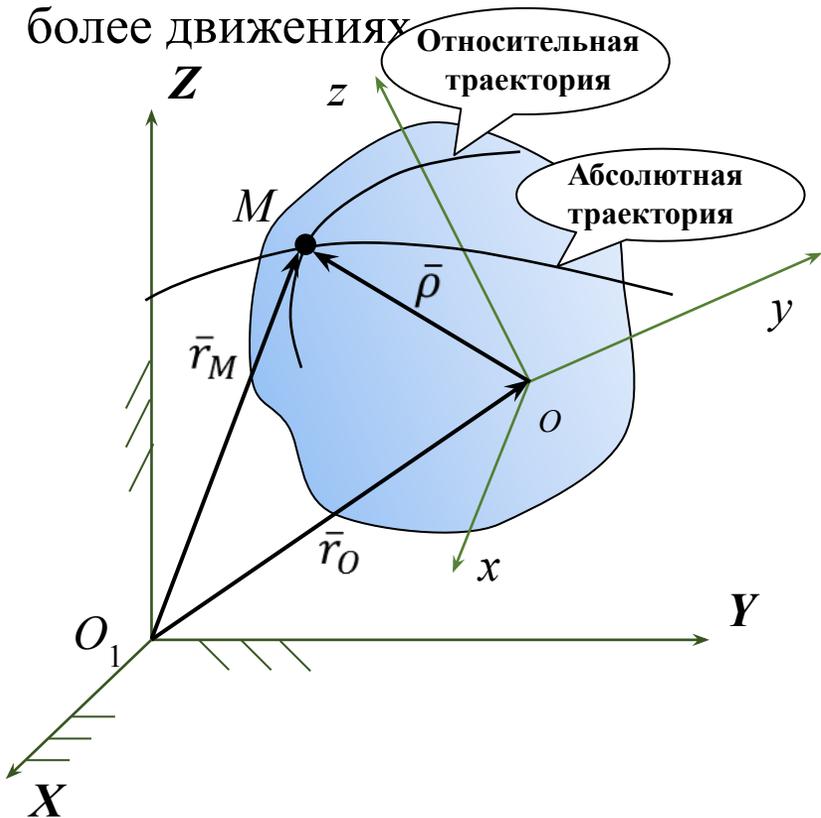


Сложное движение точки



Часто приходится рассматривать движение точки одновременно относительно нескольких систем координат, одна из которых условно принимается за неподвижную. Движение точки M называется **сложным**, если точка по отношению к основной (неподвижной) системе отсчета участвует в двух или более движениях.



Абсолютным движением точки M называется движение, совершаемое ею по отношению к неподвижной системе отсчёта O_1XYZ . Абсолютной траекторией точки M является годограф радиуса-вектора \bar{r}_M .

Абсолютной скоростью и абсолютным ускорением точки M называются скорость и ускорение точки M относительно неподвижной системы отсчёта. Обозначаются v_a и a_a .

Относительным движением точки M называется движение, совершаемое ею по отношению к подвижной системе отсчёта $Oxuz$. Относительной траекторией точки M является годограф радиуса-вектора $\bar{\rho}$.

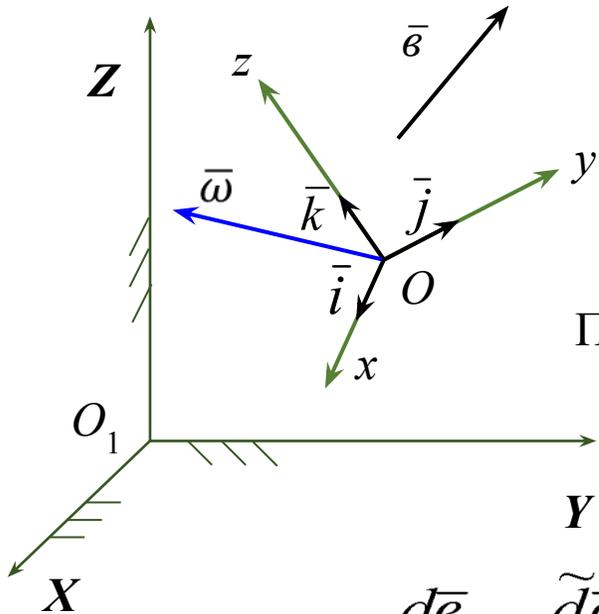
Относительной скоростью и относительным ускорением точки M (обозначаются \bar{v}_r и \bar{a}_r) называются скорость и ускорение точки M относительно подвижной системы отсчёта.

Переносным движением для точки M называется движение вместе с подвижной системой, т.е. движение местоположения точки M в подвижной системе $Oxyz$ вместе с ней относительно неподвижной $OXYZ$.

Переносной скоростью и переносным ускорением точки M (обозначаются \bar{v}_e и \bar{a}_e) называются скорость и ускорение неизменно связанной с подвижной системой отсчета точки, с которой в данный момент времени совпадает точка M , т.е. местоположения точки M в подвижной системе .



Формула Бура



Рассмотрим изменение некоторого вектора \bar{b} по отношению к двум системам координат.

В подвижной системе отсчета $Oxyz$ $\bar{b}(t) = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}$

Продифференцируем это выражение по времени:

$$\frac{d\bar{b}}{dt}(t) = \frac{db_x}{dt} \bar{i} + \frac{db_y}{dt} \bar{j} + \frac{db_z}{dt} \bar{k} + b_x \dot{\bar{i}} + b_y \dot{\bar{j}} + b_z \dot{\bar{k}}$$

Первые три слагаемые учитывают изменение вектора при неизменных ортах $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

$$\frac{db_x}{dt} \bar{i} + \frac{db_y}{dt} \bar{j} + \frac{db_z}{dt} \bar{k} = \frac{\tilde{d}\bar{b}}{dt} \quad \text{— локальная производная вектора } \bar{b}.$$

$$\dot{\bar{i}} = \bar{\omega} \times \bar{i}, \quad \dot{\bar{j}} = \bar{\omega} \times \bar{j}, \quad \dot{\bar{k}} = \bar{\omega} \times \bar{k} \quad \text{— формулы Пуассона.}$$

$$\frac{d\bar{b}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{b}}{dt} + b_x (\bar{\omega} \times \bar{i}) + b_y (\bar{\omega} \times \bar{j}) + b_z (\bar{\omega} \times \bar{k}) =$$

$$= \frac{\tilde{d}\bar{b}}{dt} + \bar{\omega} \times b_x \bar{i} + \bar{\omega} \times b_y \bar{j} + \bar{\omega} \times b_z \bar{k} = \frac{\tilde{d}\bar{b}}{dt} + \bar{\omega} \times (b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}) = \frac{\tilde{d}\bar{b}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{b}.$$

$$\boxed{\frac{d\bar{b}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{b}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{b}}$$

— формула Бура.

Полная (абсолютная) производная произвольного вектора, равна сумме локальной производной этого вектора и векторного произведения угловой скорости подвижной системы отсчёта на дифференцируемый вектор.

Теорема о сложении скоростей при сложном движении



Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.

Доказательство.

Для любого момента времени верно векторное равенство:

$$\bar{r}_M = \bar{r}_O + \bar{\rho}$$

Продифференцируем его по времени

$$\frac{d\bar{r}_M}{dt} = \frac{d\bar{r}_O}{dt} + \frac{d\bar{\rho}}{dt}$$

По формуле Бура

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\tilde{\rho}}{dt} + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho}; \quad \bar{v}_r = \frac{d\tilde{\rho}}{dt}; \quad \frac{d\bar{r}_M}{dt} = \bar{v}_a; \quad \frac{d\bar{r}_O}{dt} = \bar{v}_O.$$

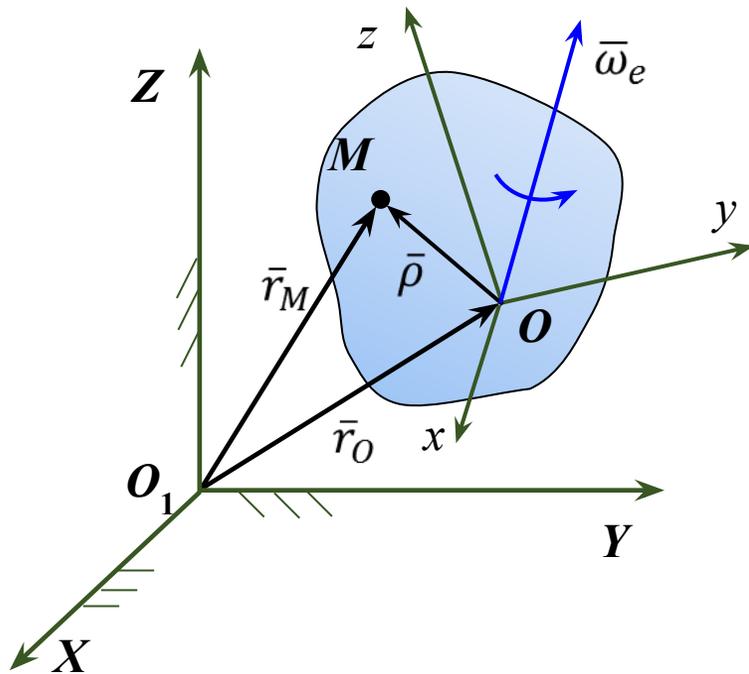
Тогда получаем

$$\bar{v}_a = \bar{v}_O + \bar{v}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho}.$$

Поскольку

$$\bar{v}_e = \bar{v}_O + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho}, \quad \text{то окончательно имеем:}$$

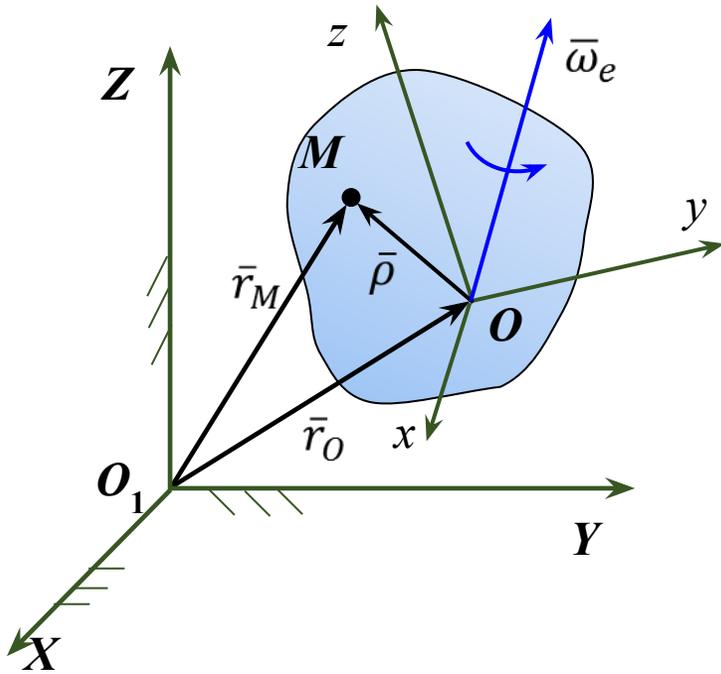
$$\boxed{\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e.}$$



Теорема о сложении ускорений при сложном движении



Кинематическая теорема Кориолиса. Абсолютное ускорение точки является векторной суммой трех ускорений: относительного, переносного и ускорения Кориолиса.



Док-во: по теореме о сложении скоростей, абсолютная скорость точки

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_O + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho}.$$

Продифференцируем по времени $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}_r}{dt} + \frac{d}{dt}(\bar{v}_O + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho}).$

Воспользовавшись формулой Бура, получим

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{\tilde{d}\bar{v}_r}{dt} + \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r + \frac{d\bar{v}_O}{dt} + \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times \frac{d\bar{\rho}}{dt} = \\ &= \bar{a}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r + \bar{a}_O + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times \left(\frac{\tilde{d}\bar{\rho}}{dt} + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho} \right) = \\ &= \bar{a}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r + \bar{a}_O + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{\rho}) = \\ &= \bar{a}_r + (\bar{a}_O + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{\rho})) + 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r. \end{aligned}$$

Здесь $\bar{a}_O + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{\rho}) = \bar{a}_e$ – переносное ускорение,

$2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r = \bar{a}_k$ – ускорение Кориолиса.

Окончательно

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_k$$

– **кинематическая теорема Кориолиса.**

Ускорение Кориолиса. Правило Жуковского



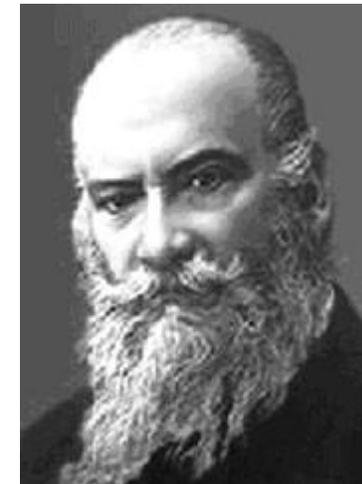
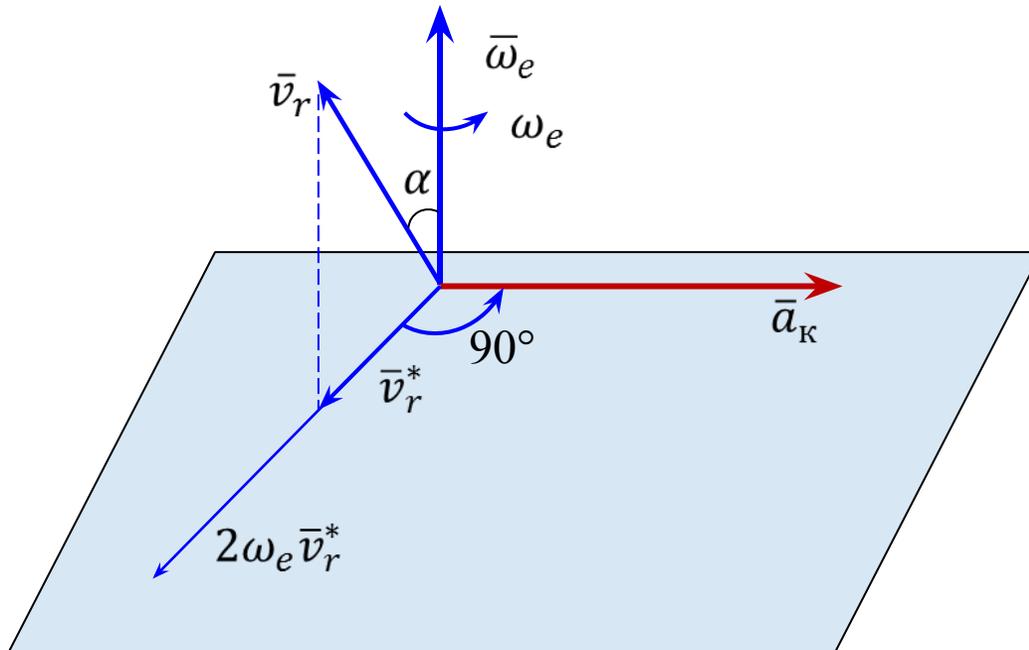
$$\bar{a}_k = 2 \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r$$

Вектор \bar{a}_k перпендикулярен плоскости, содержащей векторы $\bar{\omega}_e$ и \bar{v}_r и направлен так, что если смотреть с конца этого вектора, то кратчайший поворот вектора $\bar{\omega}_e$ к вектору \bar{v}_r наблюдается против поворота часовой стрелки.

По модулю ускорение Кориолиса

$$a_k = 2\omega_e v_r \sin\alpha, \text{ где } \alpha = \widehat{\bar{\omega}_e, \bar{v}_r}.$$

Правило Жуковского. Чтобы получить ускорение Кориолиса, надо спроецировать относительную скорость точки на плоскость, перпендикулярную вектору переносной угловой скорости, полученную проекцию увеличить в 2 раза и повернуть ее на 90° в направлении дуговой стрелки ω_e .



Нули ускорения Кориолиса.

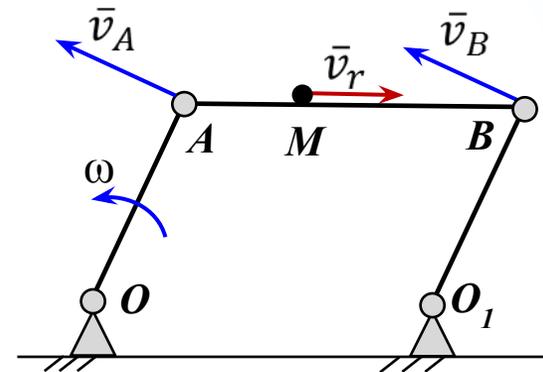
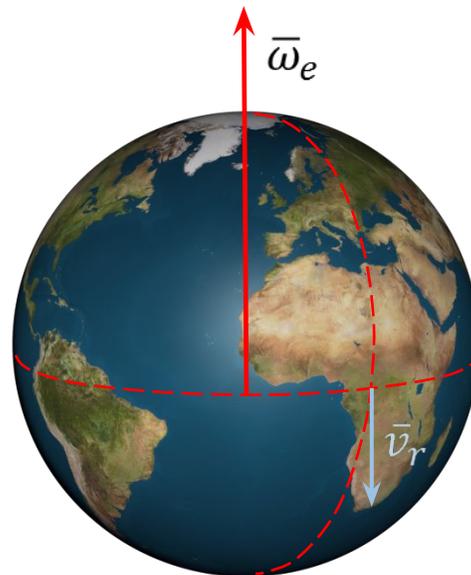


Рассмотрим случаи, когда ускорение Кориолиса обращается в нуль.

$$\bar{a}_k = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r = 0$$

1. Переносное движение – поступательное, $\omega_e = 0$
2. $v_r = 0$, например, при смене направления относительного движения

3. $\bar{\omega}_e \parallel \bar{v}_r$



Пример

Земной шар радиуса R вращается равномерно с угловой скоростью ω . Вдоль меридиана движется автомобиль с постоянной скоростью u относительно Земли. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение автомобиля, приняв его за материальную точку. Автомобиль находится на широте α .

Решение.

Свяжем подвижную систему координат с Землей. Тогда:

переносное движение – (вместе с вращающейся Землей) - по окружности радиуса h (расстояние до оси вращения Земли).

Относительная траектория – окружность радиуса R .

По теореме о сложении скоростей: $\bar{v}_A = \bar{v}_r + \bar{v}_e$

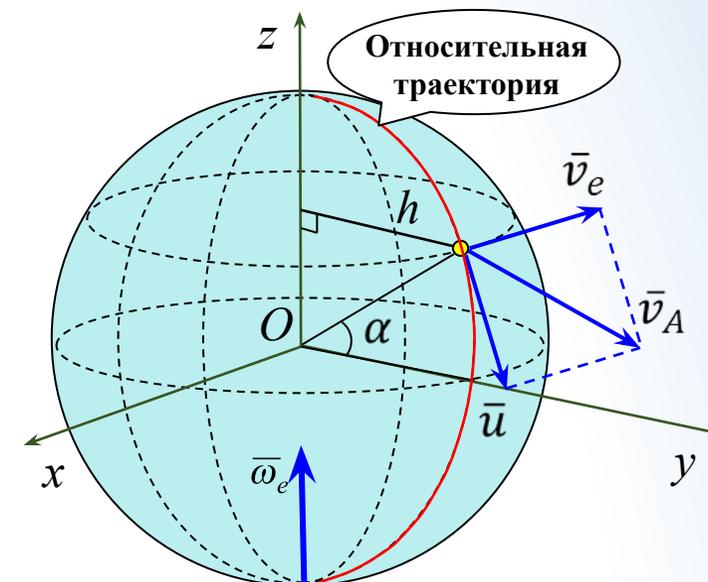
Относительная скорость $\bar{v}_r = \bar{u}$

Переносная скорость направлена по касательной к параллели и равна:

$$v_e = \omega h = \omega R \cos \alpha$$

Поскольку переносная и относительная скорости ортогональны, то:

$$v_A = \sqrt{(v_r)^2 + (v_e)^2} = \sqrt{u^2 + (\omega R \cos \alpha)^2}$$



Пример



По теореме о сложении ускорений:

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_k$$

Относительная траектория окружность, поэтому:

$$\bar{a}_r = \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau, \quad \text{относительная скорость постоянная} \Rightarrow \bar{a}_r^\tau = \bar{u} = \mathbf{0},$$

$$a_r^n = \frac{v_r^2}{R} = \frac{u^2}{R}.$$

Переносное движение – по окружности, поэтому:

$$\bar{a}_e = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau, \quad \text{переносная угловая скорость постоянная} \Rightarrow$$

$$a_e^\tau = \varepsilon_e h = \mathbf{0}, \quad a_e^n = \omega_e^2 h = \omega_e^2 R \cos \alpha.$$

$$\bar{a}_k = 2 \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r, \quad a_k = 2 \omega_e v_r \sin(\widehat{\bar{\omega}_e, \bar{v}_r}) = 2 \omega_e u \sin \alpha.$$

$$\begin{cases} a_x = -a_k \\ a_y = -a_r^n \cos \alpha - a_e^n \\ a_z = -a_r^n \sin \alpha \end{cases}$$

