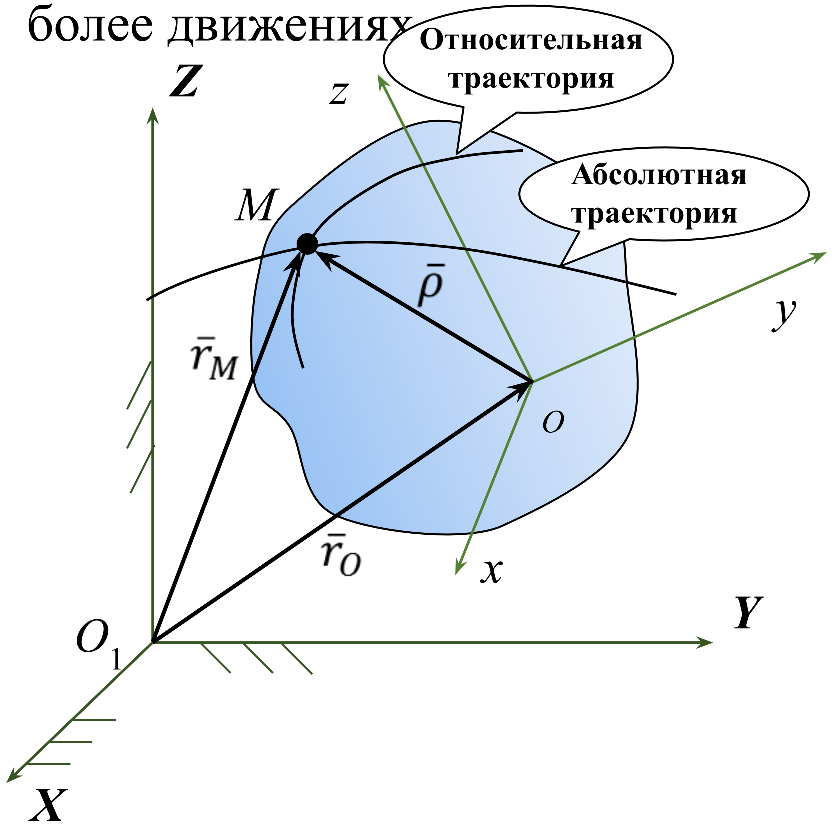
Сложное движение точки

Часто приходится рассматривать движение точки одновременно относительно нескольких систем координат, одна из которых условно принимается за неподвижную. Движение точки *M* называется ***сложным***, если точка по отношению к основной (неподвижной) системе отсчета участвует в двух или более движениях.



Абсолютным движением точки *M* называется движение, совершаемое ею по отношению к неподвижной системе отсчёта O_1XYZ. Абсолютной траекторией точки *M* является годограф радиуса-вектора $\bar{r}_M$.

Абсолютной скоростью и абсолютным ускорением точки *M* называются скорость и ускорение точки *M* относительно неподвижной системы отсчёта. Обозначаются v_a и a_a.

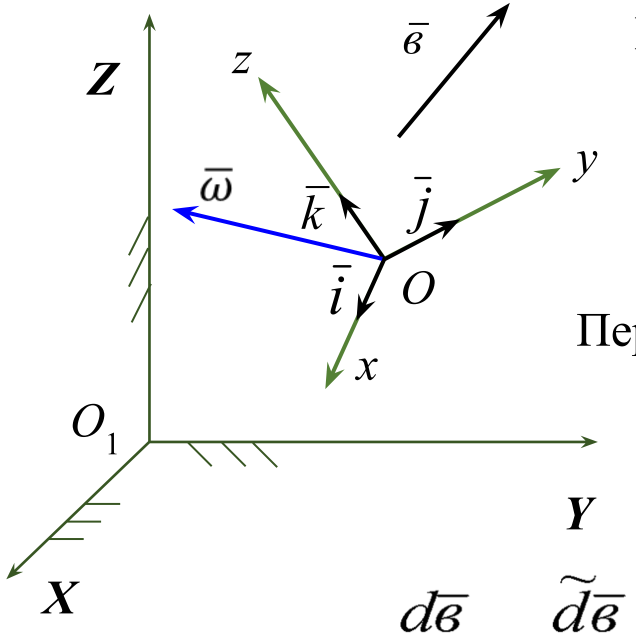
Относительным движением точки *M* называется движение, совершаемое ею по отношению к подвижной системе отсчёта *Oxyz*. Относительной траекторией точки *M* является годограф радиуса-вектора $\bar{\rho}$.

Относительной скоростью и относительным ускорением точки *M* (обозначаются $\bar{\boldsymbol{v}}_r$ и $\bar{\boldsymbol{a}}_r$) называются скорость и ускорение точки *M* относительно подвижной системы отсчёта.

Переносным движением для точки M называется движение вместе с подвижной системой, т.е. движение местоположения точки M в подвижной системе $Oxyz$ вместе с ней относительно неподвижной $O1XYZ$**.**

Переносной скоростью и переносным ускорением точки M (обозначаются $\bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{e}}$ и $\bar{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{e}}$) называются скорость и ускорение неизменно связанной с подвижной системой отсчета точки, с которой в данный момент времени совпадает точка M, т.е. местоположения точки M в подвижной системе **.**

Формула Бура



Рассмотрим изменение некоторого вектора $в$ по отношению к двум системам координат.

В подвижной системе отсчета $Oxyz$ $\quad \bar{в}(t) = в_x\bar{i} + в_y\bar{j} + в_z\bar{k}$

Продифференцируем это выражение по времени:

$$\dot{\bar{в}}(t) = \dot{в}_x\bar{i} + \dot{в}_y\bar{j} + \dot{в}_z\bar{k} + в_x\dot{\bar{i}} + в_y\dot{\bar{j}} + в_z\dot{\bar{k}}$$

Первые три слагаемые учитывают изменение вектора при неизменных ортах $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

$$\dot{в}_x\bar{i} + \dot{в}_y\bar{j} + \dot{в}_z\bar{k} = \frac{\tilde{d}\bar{в}}{dt}$$ – локальная производная вектора $\bar{b}$.

$$\dot{\bar{i}} = \bar{\omega}\times\bar{i},\quad \dot{\bar{j}} = \bar{\omega}\times\bar{j},\quad \dot{\bar{k}} = \bar{\omega}\times\bar{k}$$ – формулы Пуассона.

$$\frac{d\bar{в}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{в}}{dt} + в_x(\bar{\omega}\times\bar{i}) + в_y(\bar{\omega}\times\bar{j}) + в_z(\bar{\omega}\times\bar{k}) =$$

$$= \frac{\tilde{d}\bar{в}}{dt} + \bar{\omega}\times в_x\bar{i} + \bar{\omega}\times в_y\bar{j} + \bar{\omega}\times в_z\bar{k} = \frac{\tilde{d}\bar{в}}{dt} + \bar{\omega}\times(в_x\bar{i} + в_y\bar{j} + в_z\bar{k}) = \frac{\tilde{d}\bar{в}}{dt} + \bar{\omega}\times\bar{в}.$$

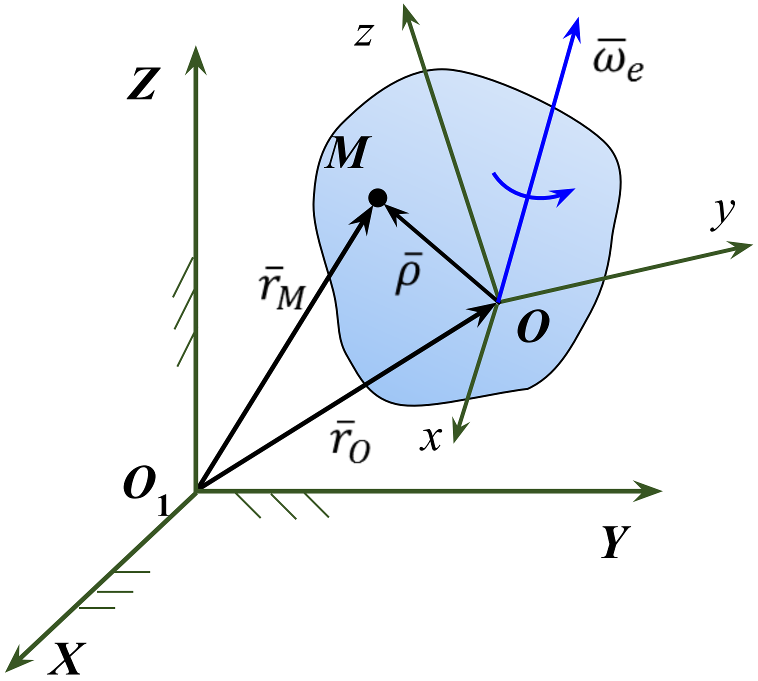
$$\boxed{\frac{d\bar{в}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{в}}{dt} + \bar{\omega}\times\bar{в}}$$ – ***формула Бура.***

Полная (абсолютная) производная произвольного вектора, равна сумме локальной производной этого вектора и векторного произведения угловой скорости подвижной системы отсчёта на дифференцируемый вектор.

Теорема о сложении скоростей при сложном движении

Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.

Доказательство.



Для любого момента времени верно векторное равенство:

$$\bar{r}_M = \bar{r}_O + \bar{\rho}$$

Продифференцируем его по времени $\dot{\bar{r}}_M = \dot{\bar{r}}_O + \dot{\bar{\rho}}$

По формуле Бура $\dfrac{d\bar{\rho}}{dt} = \dfrac{\tilde{d}\bar{\rho}}{dt} + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho}$; $\bar{v}_r = \dfrac{\tilde{d}\bar{\rho}}{dt}$; $\dot{\bar{r}}_M = \bar{v}_a$; $\dot{\bar{r}}_O = \bar{v}_O$.

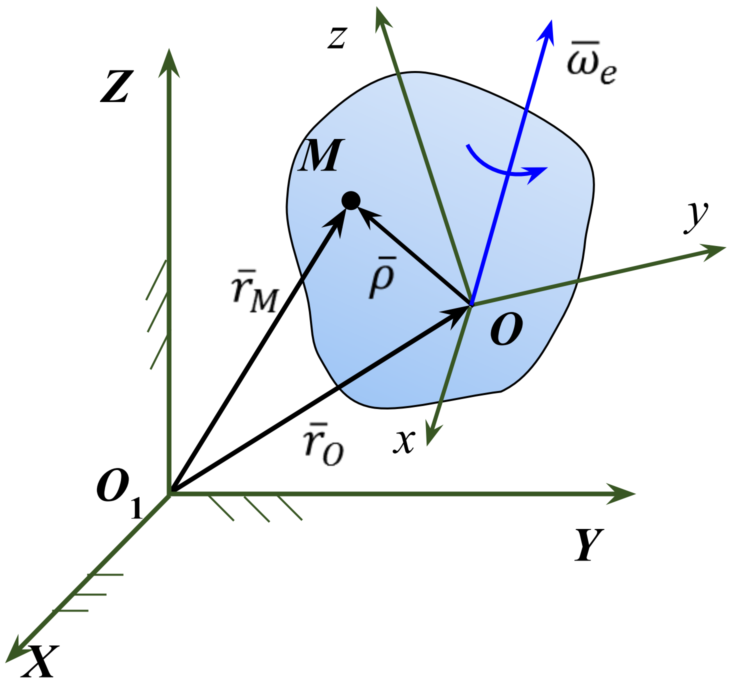
Тогда получаем $\bar{v}_a = \bar{v}_O + \bar{v}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho}$.

Поскольку $\bar{v}_e = \bar{v}_O + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho}$, то окончательно имеем:

$$\boxed{\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e.}$$

Теорема о сложении ускорений при сложном движении

Кинематическая теорема Кориолиса. Абсолютное ускорение точки является векторной суммой трех ускорений: относительного, переносного и ускорения Кориолиса.



Док-во: по теореме о сложении скоростей, абсолютная скорость точки

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_O + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho}.$$

Продифференцируем по времени $\bar{a} = \dfrac{d\bar{v}}{dt} = \dfrac{d\bar{v}_r}{dt} + \dfrac{d}{dt}(\bar{v}_O + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho}).$

Воспользовавшись формулой Бура, получим

$$\bar{a} = \frac{\tilde{d}\,\bar{v}_r}{dt} + \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r + \frac{d\bar{v}_O}{dt} + \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times \frac{d\bar{\rho}}{dt} =$$

$$= \bar{a}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r + \bar{a}_O + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times \left(\frac{\tilde{d}\,\bar{\rho}}{dt} + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho}\right) =$$

$$= \bar{a}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r + \bar{a}_O + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{\rho}) =$$

$$= \bar{a}_r + (\bar{a}_O + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{\rho})) + 2\,\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r.$$

Здесь $\bar{a}_O + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{\rho}) = \bar{a}_e$ – переносное ускорение, $2\,\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r = \bar{a}_к$ – ускорение Кориолиса.

Окончательно $\boxed{\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_к}$ – **кинематическая теорема Кориолиса.**

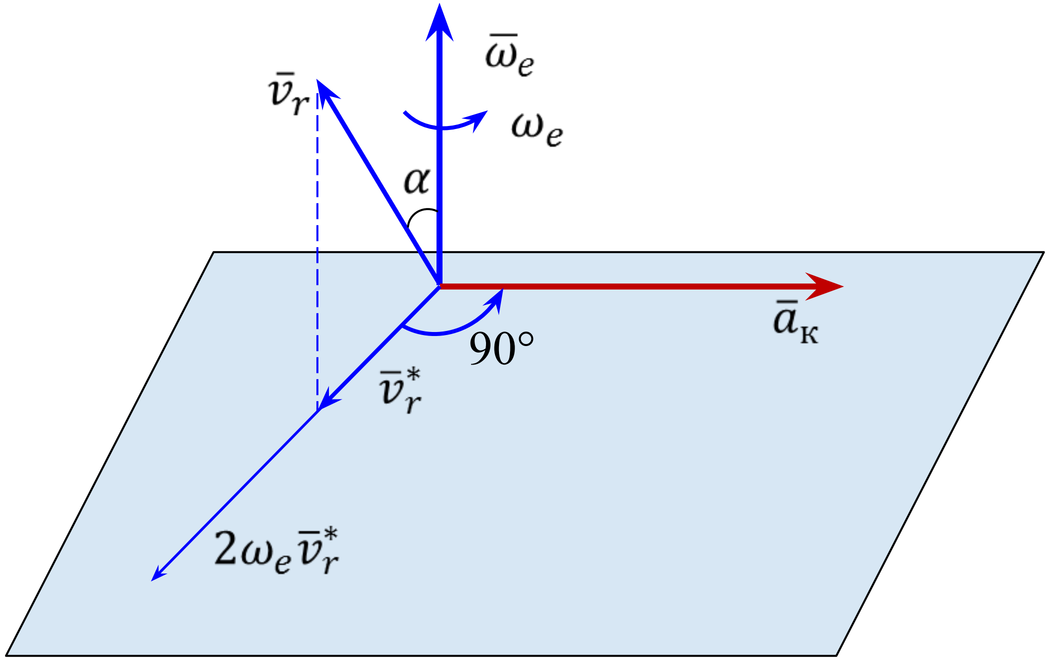
Ускорение Кориолиса. Правило Жуковского

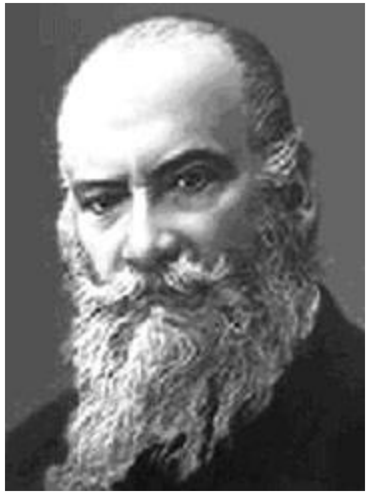
$$\bar{a}_к = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r$$

Вектор $\bar{a}_к$ перпендикулярен плоскости, содержащей векторы $\bar{\omega}_e$ и $\bar{v}_r$ и направлен так, что если смотреть с конца этого вектора, то кратчайший поворот вектора $\bar{\omega}_e$ к вектору $\bar{v}_r$ наблюдается против поворота часовой стрелки.

По модулю ускорение Кориолиса $a_к = 2\omega_e v_r sin\alpha$, где $\alpha = \widehat{\bar{\omega}_e, \bar{v}_r}$.

Правило Жуковского. Чтобы получить ускорение Кориолиса, надо спроецировать относительную скорость точки на плоскость, перпендикулярную вектору переносной угловой скорости, полученную проекцию увеличить в 2 раза и повернуть ее на 90° в направлении дуговой стрелки ω_e .





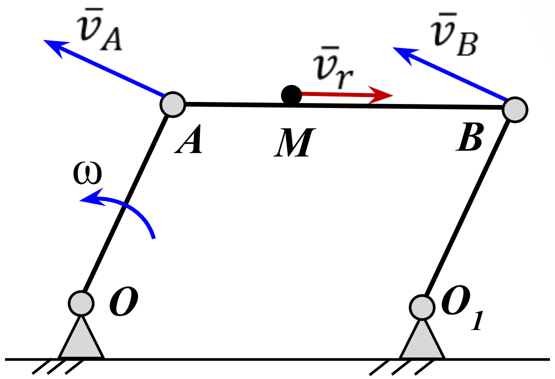
Нули ускорения Кориолиса.

Рассмотрим случаи, когда ускорение Кориолиса обращается в нуль.

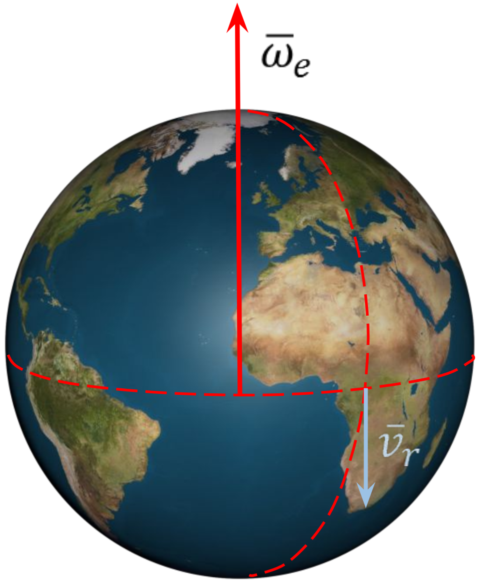
$$\bar{a}_к = 2\,\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r = 0$$

1. Переносное движение – поступательное, $\omega_e = 0$

2. $v_r = 0$, например, при смене направления относительного движения



3. $\bar{\omega}_e \parallel \bar{v}_r$

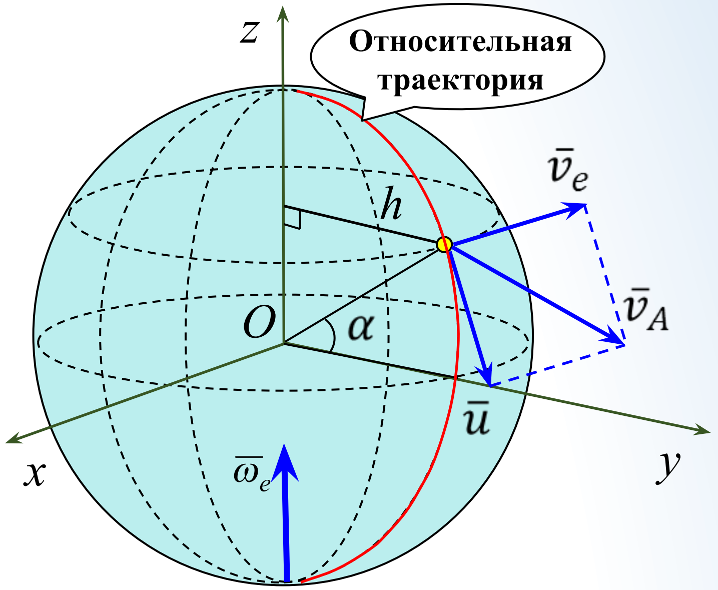


Пример

Земной шар радиуса R вращается равномерно с угловой скоростью ω. Вдоль меридиана движется автомобиль с постоянной скоростью u относительно Земли. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение автомобиля, приняв его за материальную точку. Автомобиль находится на широте α.

Решение.

Свяжем подвижную систему координат с Землей. Тогда:



переносное движение – (вместе с вращающейся Землей) - по окружности радиуса h (расстояние до оси вращения Земли).

Относительная траектория – окружность радиуса R.

По теореме о сложении скоростей: $\bar{v}_A = \bar{v}_r + \bar{v}_e$

Относительная скорость $\bar{v}_r = \bar{u}$

Переносная скорость направлена по касательной к параллели и равна:

$$v_e = \omega h = \omega R \cos\alpha$$

Поскольку переносная и относительная скорости ортогональны, то:

$$v_A = \sqrt{(v_r)^2 + (v_e)^2} = \sqrt{u^2 + (\omega R \cos\alpha)^2}$$

Пример

По теореме о сложении ускорений: $\overline{a} = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_к$

Относительная траектория окружность, поэтому:

$\overline{a}_r = \overline{a}_r^n + \overline{a}_r^\tau$, относительная скорость постоянная $\Rightarrow$ $a_r^\tau = \dot{u} = 0,$

$$a_r^n = \frac{v_r^2}{R} = \frac{u^2}{R}.$$

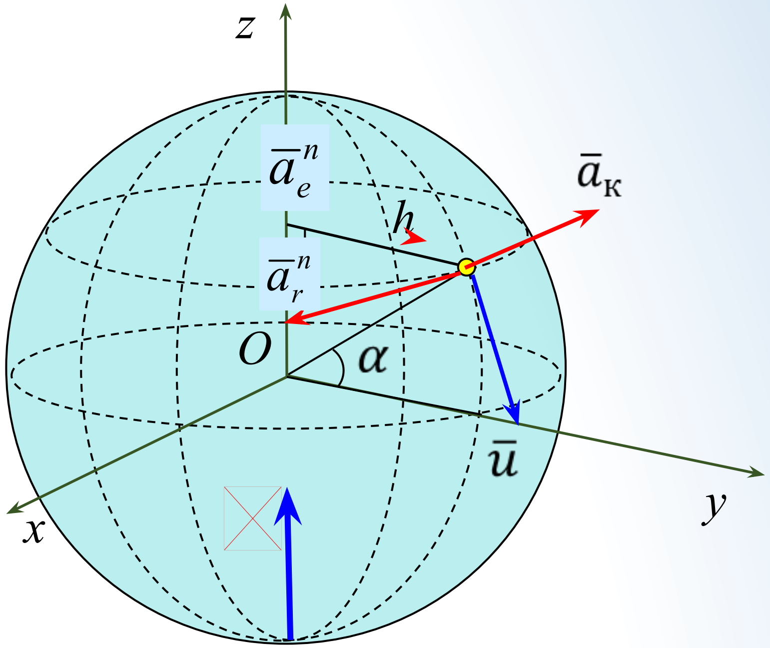
Переносное движение – по окружности, поэтому:

$\overline{a}_e = \overline{a}_e^n + \overline{a}_e^\tau$, переносная угловая скорость постоянная $\Rightarrow$

$$a_e^\tau = \varepsilon_e h = \dot{\omega}_e R\cos\alpha = 0, \qquad a_e^n = \omega_e^2 h = \omega_e^2 R\cos\alpha.$$

$$\overline{a}_к = 2\overline{\omega}_e \times \overline{v}_r, \quad a_к = 2\omega_e v_r \sin(\overline{\omega}_e \,\hat{,}\, \overline{v}_r) = 2\omega_e u \sin\alpha.$$

$$\begin{cases} a_x = -a_к \\ a_y = -a_r^n \cos\alpha - a_e^n \\ a_z = -a_r^n \sin\alpha \end{cases}$$



$\overline{\omega}_e$