

Под простейшими тригонометрическими уравнениями понимают уравнения вида:

$$\sin x = a$$

$$\cos x = a$$

$$\operatorname{tg} x = a$$

$$\operatorname{ctg} x = a$$

Решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$

Обычная форма записи решения:	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z$
Более удобная форма записи решения	$x_1 = \operatorname{arctg} a + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = \operatorname{arctg} a + \pi + 2\pi n, n \in Z$
Ограничения на число a	Ограничений нет

Графическое обоснование решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$ представлено на рисунке 3.

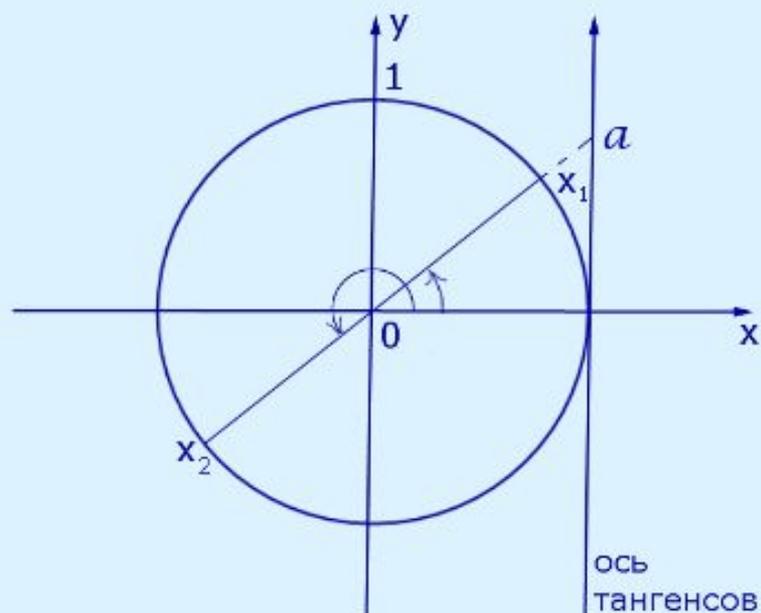


Рис. 3

Решение уравнения $\operatorname{ctg} x = a$

Обычная форма записи решения	$x = \operatorname{arccotg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
Более удобная форма записи решения	$x_1 = \operatorname{arccotg} a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$ $x_2 = \operatorname{arccotg} a + \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
Ограничения на число a	Ограничений нет

Графическое обоснование решения уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ представлено на рисунке 4.

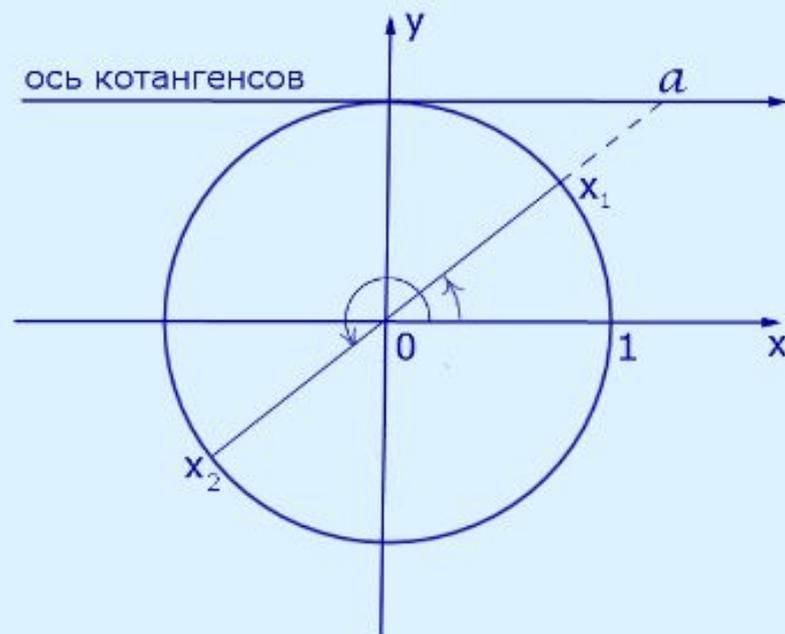


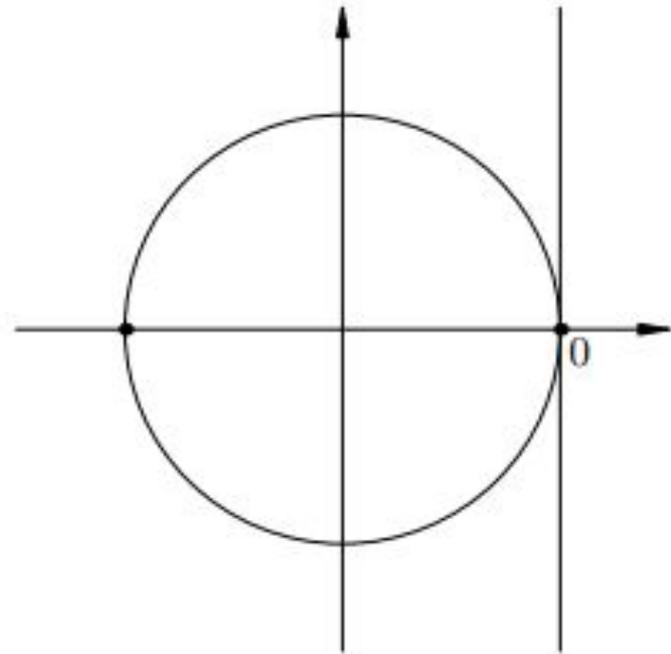
Рис. 4

Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x = 0.$$

Решение

Имеем диаметрально противоположную горизонтальную пару точек:



Эта пара, как мы уже знаем, описывается формулой:

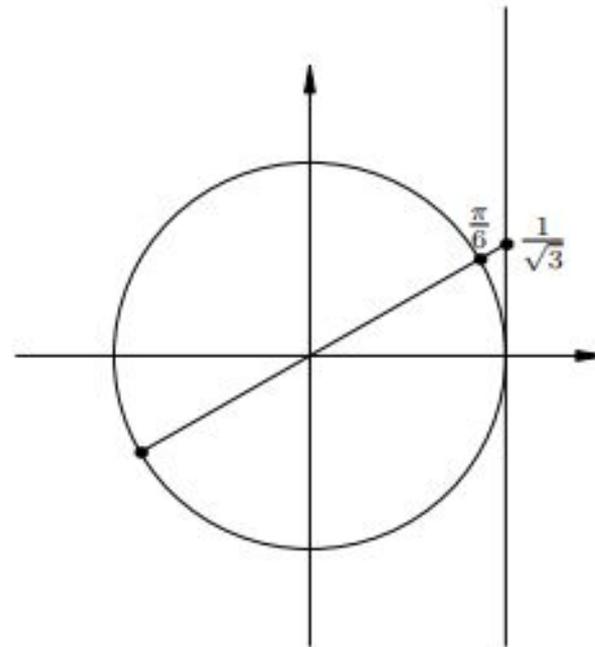
$$x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Решение

Имеем диаметральною пару:



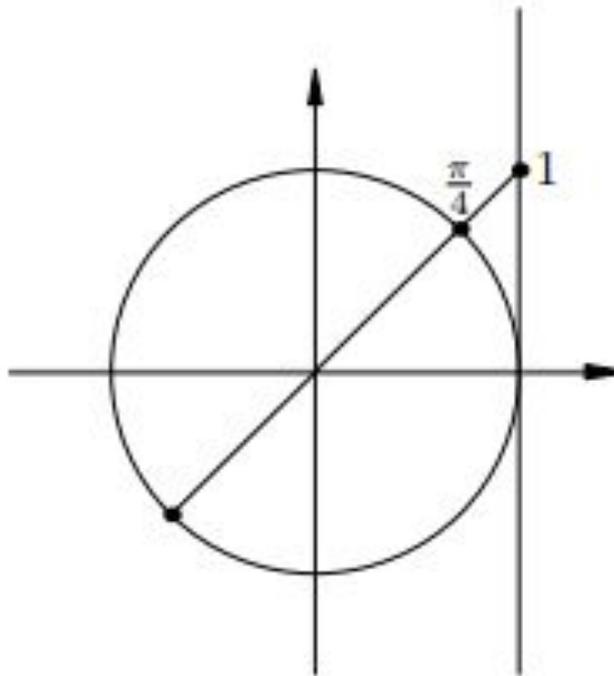
Вспоминаем второе полезное наблюдение и пишем ответ:

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x = 1.$$

Решение

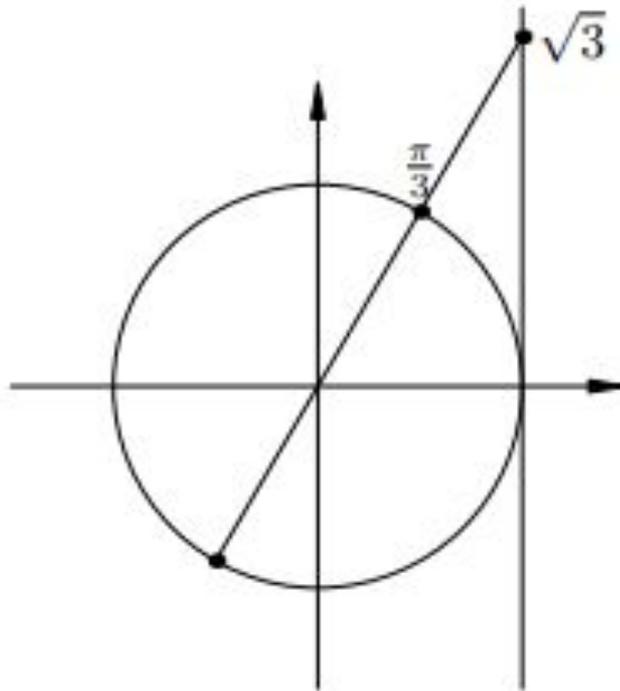


$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}.$$

Решение

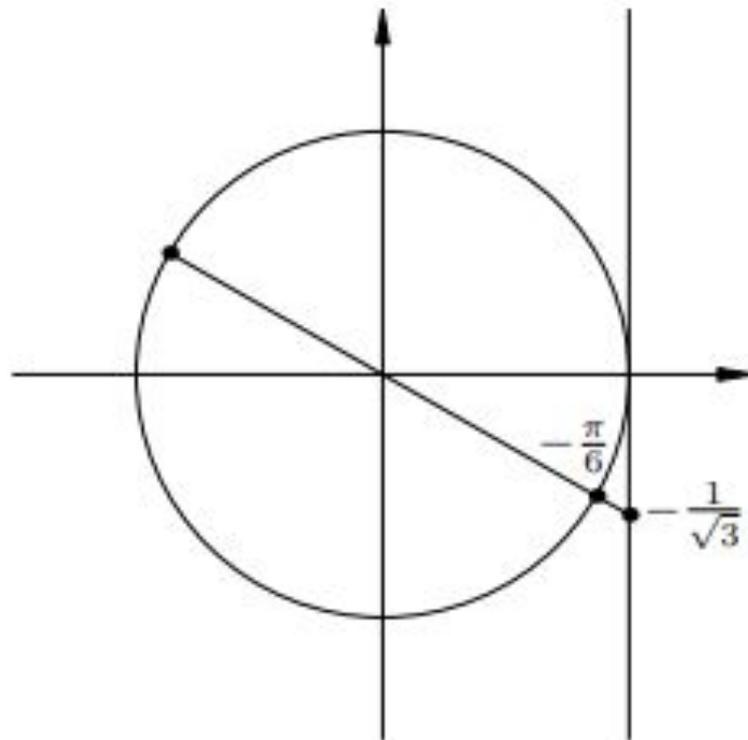


$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Решение

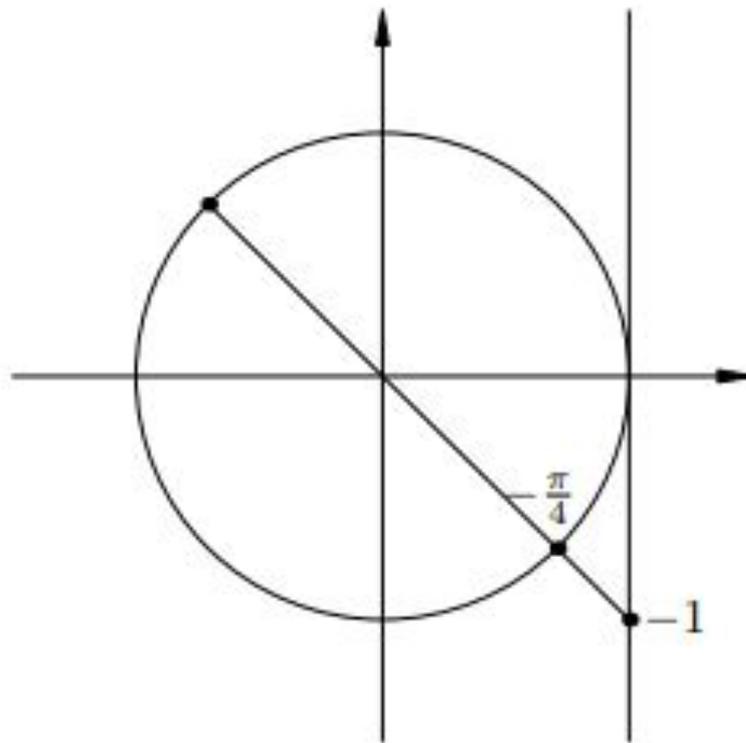


$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x = -1.$$

Решение

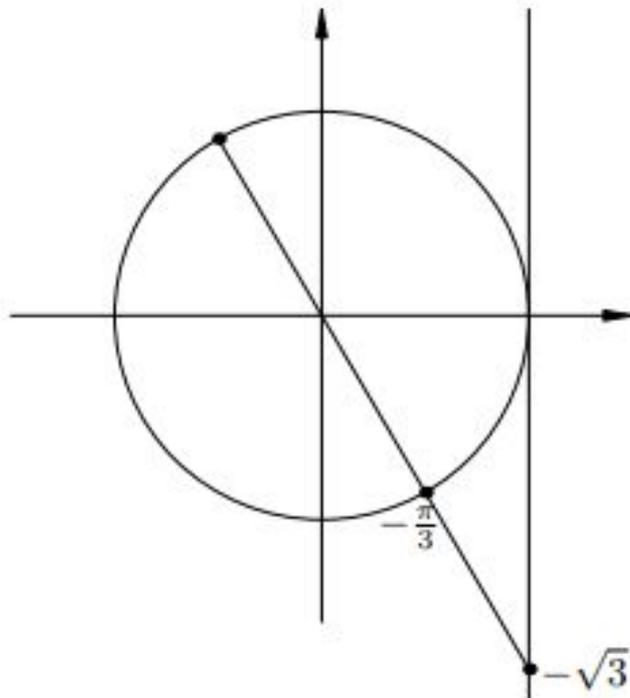


$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}.$$

Решение



$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Решите уравнение

Решите уравнение $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$

Решение

Решение

▶ $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 + \pi n, n \in \mathbf{Z},$

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi n, x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $\pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}.$ ◀

Комментарий

Сначала по формуле (1) найдем значение выражения $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$, а потом из полученного линейного уравнения найдем значение переменной x .

Решите уравнение

$$\operatorname{ctg} x = 5.$$

Решение

Решение

► $x = \operatorname{arctg} 5 + \pi n, n \in \mathbf{Z}.$

Ответ: $\operatorname{arctg} 5 + \pi n, n \in \mathbf{Z}.$ ◀

Комментарий

Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ имеет корни при любом значении a , поэтому всегда можно воспользоваться формулой (2):

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

Учитывая, что $\operatorname{arctg} 5$ не является табличным значением (см. табл. 19, приведенную на с. 156), полученная формула дает окончательный ответ.