Простейшие тригонометрические уравнения, содержащие тангенс или котангенс

10.2.4.5 обосновывать решения простейших тригонометрических уравнений.

Под простейшими тригонометрическими уравнениями понимают уравнения вида:

$$\sin x = a$$

$$\cos x = a$$

$$tgx = a$$

$$ctgx = a$$

Решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$

Обычная форма записи решения:	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z$
Более удобная форма записи решения	$x_1 = \operatorname{arctg} a + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = \operatorname{arctg} a + \pi + 2\pi n, n \in Z$
Ограничения на число a	Ограничений нет

Графическое обоснование решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$ представлено на рисунке 3.

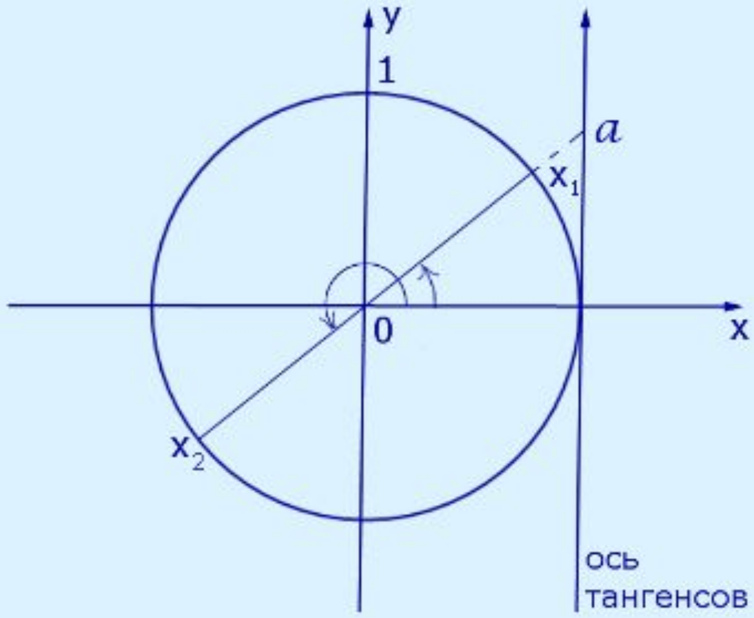


Рис. 3

Решение уравнения $\operatorname{ctg} x = a$

Обычная форма записи решения	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in Z$
Более удобная форма записи решения	$x_1 = \operatorname{arcctg} a + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = \operatorname{arcctg} a + \pi + 2\pi n, n \in Z$
Ограничения на число a	Ограничений нет

Графическое обоснование решения уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ представлено на рисунке 4.

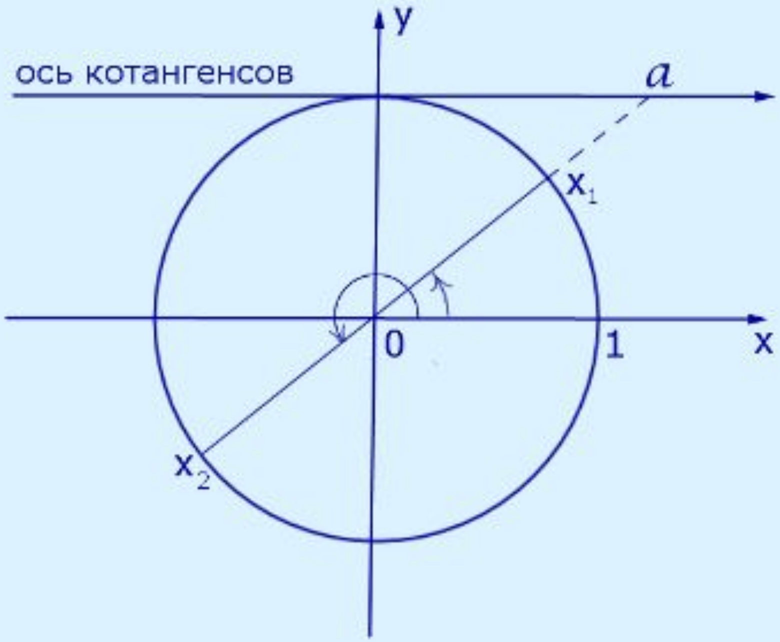


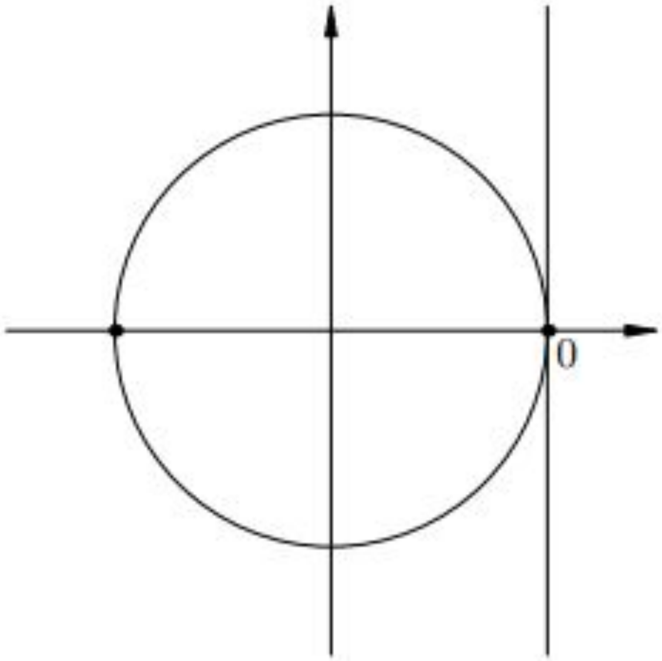
Рис. 4

Решите уравнение

$$tgx = 0.$$

Решение

Имеем диаметральную горизонтальную пару точек:



Эта пара, как мы уже знаем, описывается формулой:

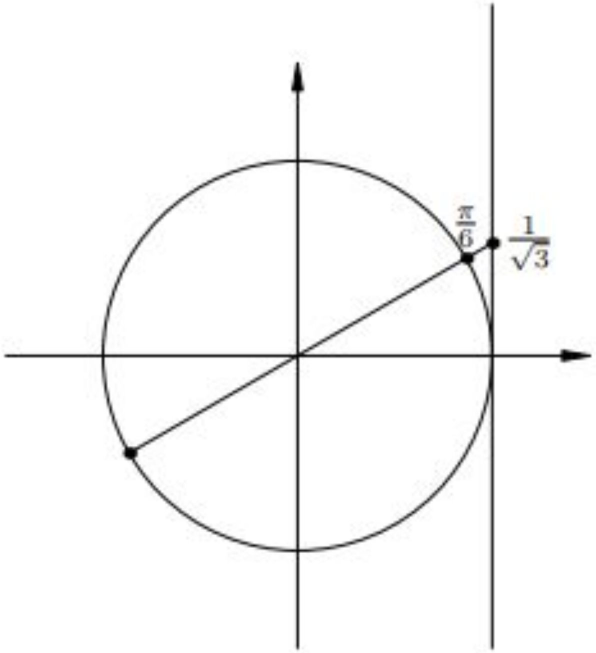
$$x = \pi n,\ \ n \in Z.$$

Решите уравнение

$$tgx = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Решение

Имеем диаметральную пару:



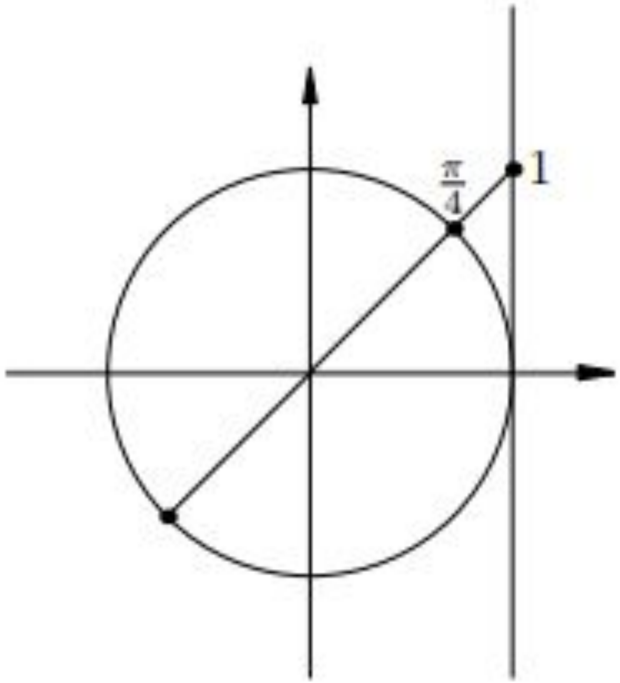
Вспоминаем второе полезное наблюдение и пишем ответ:

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi n, \;\; n \in Z.$$

Решите уравнение

$$tgx = 1.$$

Решение

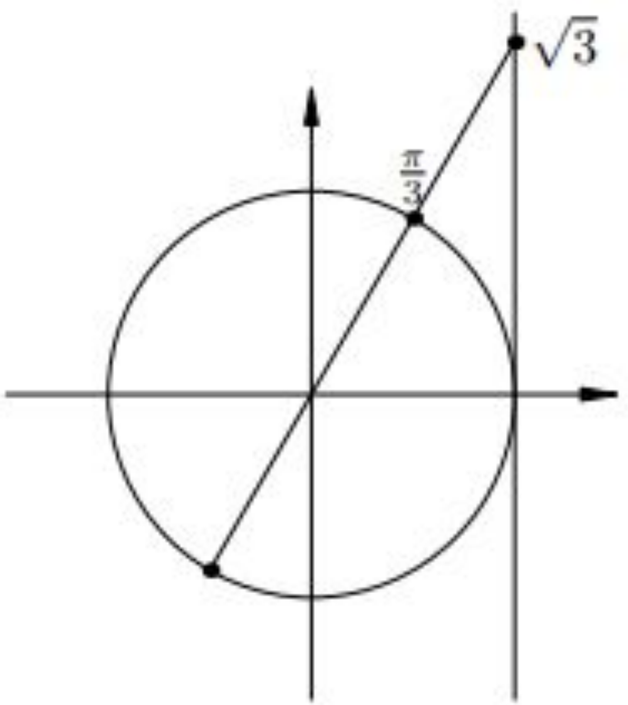


$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$$

Решите уравнение

$$tgx = \sqrt{3}.$$

Решение

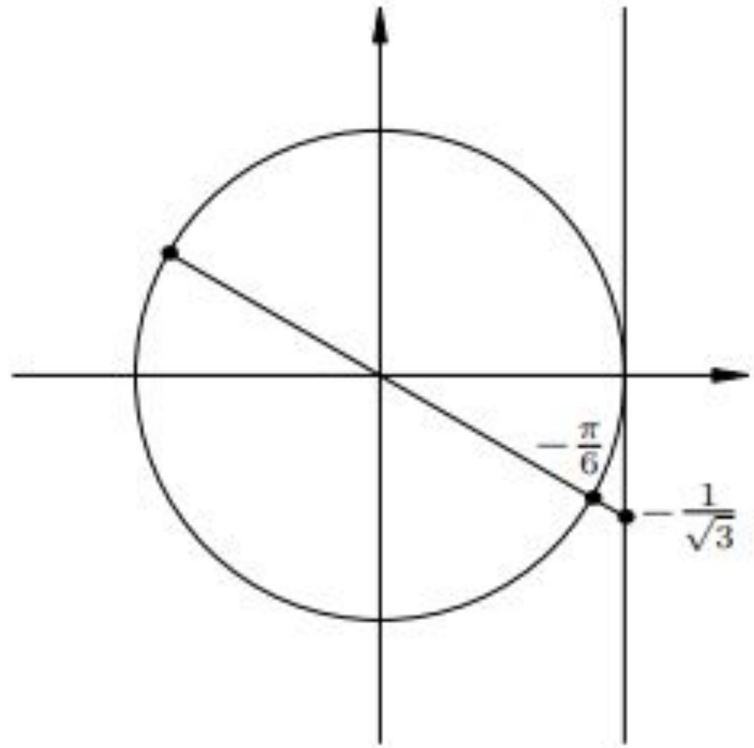


$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n, \ n \in Z.$$

Решите уравнение

$$tgx = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Решение

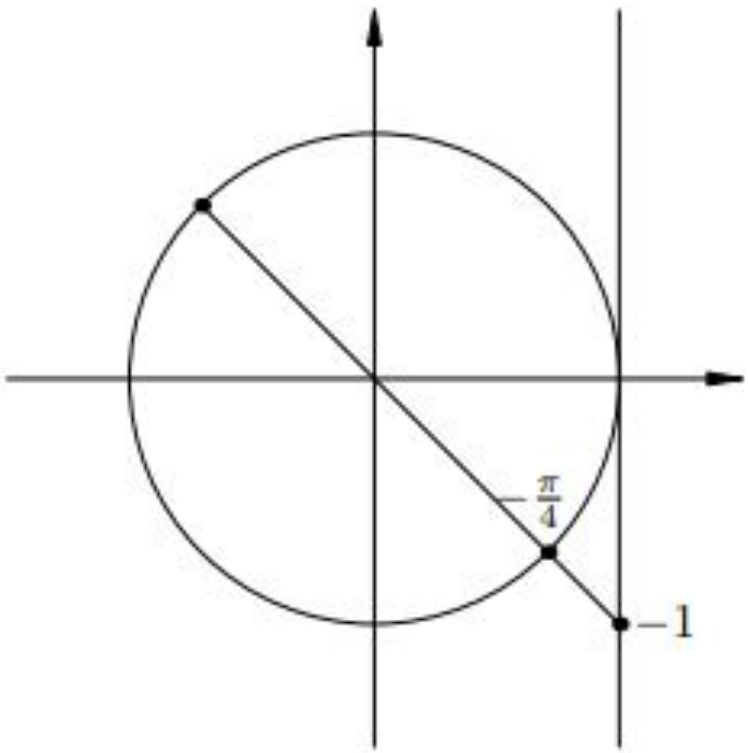


$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ \ n \in Z.$$

Решите уравнение

$$tgx = -1.$$

Решение

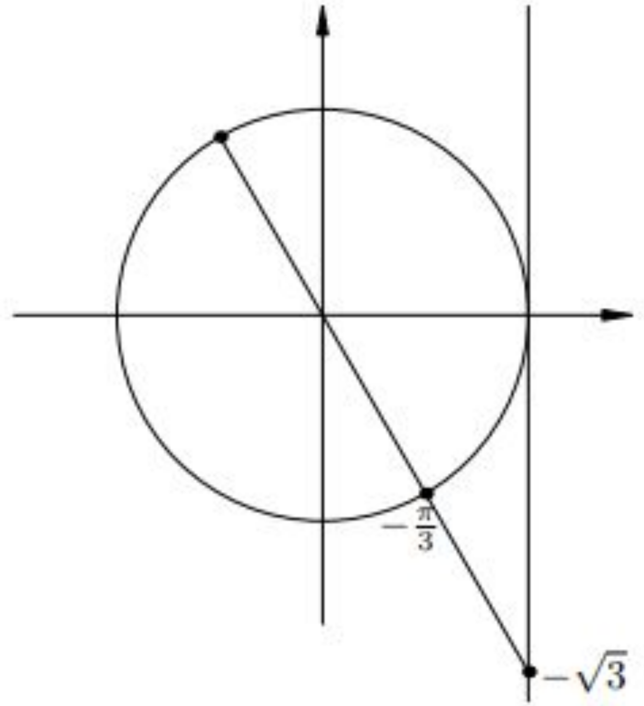


$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ \ n \in Z.$$

Решите уравнение

$$tgx = -\sqrt{3}.$$

Решение



$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, \;\; n \in Z.$$

Решите уравнение

Решите уравнение $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=1.$

Решение

Решение	Комментарий
$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}1+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z},$ $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ x=\pi+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$ *Ответ:* $\pi+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$	Сначала по формуле (1) найдем значение выражения $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}$, а потом из полученного линейного уравнения найдем значение переменной x.

Решите уравнение

$$\operatorname{ctg} x = 5.$$

Решение

Решение	Комментарий
$x = \operatorname{arcctg} 5 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ *Ответ:* $\operatorname{arcctg} 5 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$	Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ имеет корни при любом значении a, поэтому всегда можно воспользоваться формулой (2): $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ Учитывая, что $\operatorname{arcctg} 5$ не является табличным значением (см. табл. 19, приведенную на с. 156), полученная формула дает окончательный ответ.