

Дискретная математика

Лекция 2
Множества

1.1. Общие понятия теории множеств

Совокупность элементов, объединённых некоторым признаком, свойством, составляет понятие **множество**. Например, *множество* книг в библиотеке, *множество* студентов в группе, *множество* натуральных чисел \mathbb{N} и т. д.

Запись $a \in M$ означает: элемент a *принадлежит* множеству M , т. е. элемент a обладает некоторым признаком. Аналогично $a \notin M$ читается: элемент a *не принадлежит* множеству M .

Изображение множеств

Множества удобно изображать с помощью *кругов Эйлера*.

Множество K на рис. 1.1 называют **подмножеством** множества M и обозначают

$$K \subset M$$

Множество K называется **подмножеством** множества

M ($K \subset M$) если для любого

$$x \in K \text{ выполняется } x \in M$$

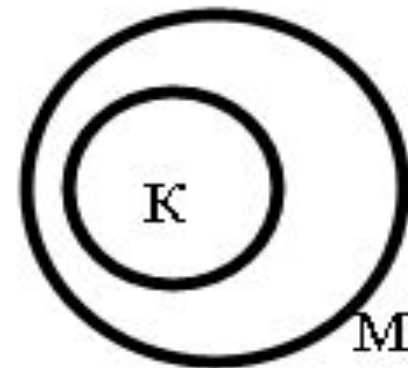


Рис. 1.1.

Универсальным называется множество U , состоящее из всех возможных элементов, обладающих данным признаком.

Если множество не содержит элементов, обладающих данным признаком, то оно называется **пустым** и обозначается \emptyset .

Равными называют два множества A и B , состоящие из одинаковых элементов: $A = B$

Число элементов множества A называется **мощностью** множества и обозначается $|A|$ или $n(A)$.

Множество, элементами которого являются подмножества множества M , называется *семейством множества M* или *булеаном* этого множества и обозначается $B(M)$.

Мощность булеана множества M вычисляется по формуле

$$|B(M)| = 2^n$$

где n – это мощность множества M .

Пример. $M = \{y, x, a\}, n = 3, |B(M)| = 2^3 = 8,$

$$B(M) = \{\emptyset, \{y\}, \{x\}, \{a\}, \{y, x\}, \{x, a\}, \{y, a\}, \{y, x, a\}\}.$$

Множество считается **заданным**, если *перечислены* все его элементы, или *указано свойство*, которым обладают те и только те элементы, которые принадлежат данному множеству. Само свойство называется **характеристическим**.

В качестве характеристического свойства может выступать указанная для этого свойства *порождающая процедура*, которая описывает способ получения элементов нового множества из уже полученных элементов или из других объектов.

Примеры задания множества

Множество всех чисел, являющихся неотрицательными степенями числа 2 можно задать:

а) перечислением элементов: $M_{2^n} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$

б) указанием характеристического свойства:

$$; M_{2^n} = \{2^i \mid i \in \mathbb{Z}, i \geq 0\}$$

в) с помощью порождающей процедуры по *индуктивным* правилам:

$$\begin{aligned} & 1 \in M_{2^n} \\ \text{если } k \in M_{2^n}, & \text{ то } (2k) \in M_{2^n} \end{aligned}$$

Вместо выражения

«любое x из множества X »

можно писать $\forall x \in X$, где перевёрнутая латинская буква \forall взята от начала английского слова **Any** – любой.

Вместо выражения

«существует элемент x из множества X »

кратко пишут: $\exists x \in X$, где перевёрнутая латинская буква \exists является начальной в английском слове **Existence** – существование.

1.4. Классификация множеств.

Мощность множества

Множество, содержащее конечное число элементов, называется **конечным**. Пустое множество является **конечным** и имеет мощность, равную нулю, т.е. $|\emptyset| = 0$. Множество, не являющееся конечным, называется **бесконечным**.

Бесконечное множество, эквивалентное множеству натуральных чисел \mathbb{N} , называется **счётным**. В противном случае бесконечное множество будет **несчётным**.

Основная теорема о конечных множествах

Теорема. Любое конечное множество не эквивалентно никакому его собственному подмножеству, кроме самого себя.

Следствие. Всякое непустое конечное множество эквивалентно одному и только одному отрезку натурального ряда чисел $[1, n]$.

Счётными являются множество \mathbb{Z} целых чисел и \mathbb{Q} рациональных чисел. Множество \mathbb{R} действительных чисел **несчётно**.

Множество действительных чисел называется множеством **мощности континуума** (от лат. continuum – непрерывный).