Дискретная математика

Лекция 2
Множества

1.1. Общие понятия теории множеств

Совокупность элементов, объединённых некоторым признаком, свойством, составляет понятие **множество**. Например, *множество* книг в библиотеке, *множество* студентов в группе, *множество* натуральных чисел N и т. д.

Запись $a \in M$ означает: элемент *a* *принадлежит* множеству *M*, т. е. элемент *a* обладает некоторым признаком. Аналогично $a \notin M$ читается: элемент *a* *не принадлежит* множеству *M*.

Изображение множеств

Множества удобно изображать с помощью *кругов Эйлера*.

Множество *K* на рис. 1.1 называют **подмножеством** множества *M* и обозначают $K \subset M$.

Множество *K* называется **подмножеством** множества *M* ($K \subset M$), если для любого $x \in K$ выполняется $x \in M$.

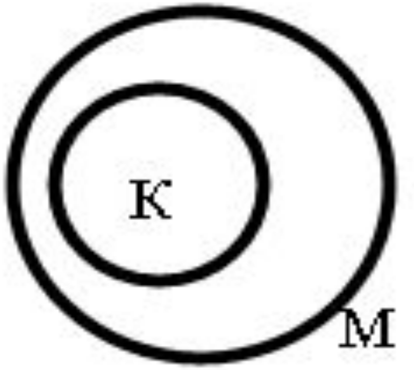

Рис. 1.1.

Универсальным называется множество U, состоящее из всех возможных элементов, обладающих данным признаком.

Если множество не содержит элементов, обладающих данным признаком, то оно называется **пустым** и обозначается $\varnothing$.

Равными называют два множества A и B, состоящие из одинаковых элементов: $A = B$.

Число элементов множества A называется **мощностью** множества и обозначается $|A|$ или $n(A)$.

Множество, элементами которого являются подмножества множества *M*, называется *семейством множества* *M* или *булеаном* этого множества и обозначается *B(M).*

Мощность булеана множества *M* *вычисляется по формуле*

$$|B(M)| = 2^n,$$

где *n – это мощность множества M.*

<u>Пример</u>. $M = \{y, x, a\}, n = 3, |B(M)| = 2^3 = 8,$

$$B(M) = \{\varnothing, \{y\}, \{x\}, \{a\}, \{y, x\}, \{x, a\}, \{y, a\}, \{y, x, a\}\}.$$

Множество считается **заданным**, если *перечислены* все его элементы, или *указано свойство*, которым обладают те и только те элементы, которые принадлежат данному множеству. Само свойство называется **характеристическим**.

В качестве характеристического свойства может выступать указанная для этого свойства *порождающая процедура*, которая описывает способ получения элементов нового множества из уже полученных элементов или из других объектов.

Примеры задания множества

Множество всех чисел, являющихся неотрицательными степенями числа 2 можно задать:

а) перечислением элементов: $M_{2^n} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$;

б) указанием характеристического свойства:

$M_{2^n} = \{2^i \mid i \in Z, i \geq 0\}$;

в) с помощью порождающей процедуры по *индуктивным* правилам:

$1 \in M_{2^n}$;

если $k \in M_{2^n}$, то $(2k) \in M_{2^n}$.

Вместо выражения

«любое *x* из множества X»

можно писать $\forall x \in X$, где перевёрнутая латинская буква А взята от начала английского слова **Any** – любой.

Вместо выражения

«существует элемент *x* из множества X»

кратко пишут: $\exists x \in X$, где перевёрнутая латинская буква Е является начальной в английском слове **Existence** – существование.

1.4. Классификация множеств. Мощность множества

Множество, содержащее конечное число элементов, называется **конечным**. Пустое множество является *конечным* и имеет мощность, равную нулю, т.е. $|\varnothing| = 0$. Множество, не являющееся конечным, называется **бесконечным**.

Бесконечное множество, эквивалентное множеству натуральных чисел N, называется **счётным**. В противном случае бесконечное множество будет **несчётным**.

Основная теорема о конечных множествах

Теорема. Любое конечное множество не эквивалентно никакому его собственному подмножеству, кроме самого себя.

Следствие. Всякое непустое конечное множество эквивалентно одному и только одному отрезку натурального ряда чисел $[1, n]$.

Счётными являются множество Z целых чисел и Q рациональных чисел. Множество R действительных чисел *несчётно.*

Множество действительных чисел называется множеством *мощности континуума* (от лат. continuum – непрерывный).